Παράδειγμα

Μέτρηση ταχύτητας με σφάλμα

X = πραγμ. ταχυτ. $\sim \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{50}\right)$

σππ $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{50} e^{-x/50} & , x > 0 \\ 0 & , \text{διαφ.} \end{cases}$

Y = μετρούμ. ταχυτ = πραγμ + σφάλμα

$(Y \mid X = x) \sim \mathcal{N}\left(x, \frac{x^2}{100}\right)$

δεσμ. σππ $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad y \in \mathbb{R}$

$$= \frac{10}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{50(y-x)^2}{x^2}}, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

$$\Rightarrow \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_{Y|X}(y|x)$$

$$= \frac{1}{50} e^{-\frac{x}{50}} \cdot \frac{10}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{50(y-x)^2}{x^2}}, \quad x>0, \; y \in \mathbb{R}$$

Δεκ 10-3:35 μμ

Αναλογίες μεταξύ διακρ. & συνεχ. τμ.

Διακρ.	Συνεχής
$p_{X\|Y}(x\|y) = \dfrac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$	$f_{X\|Y}(x\|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$
$E[X\|A] = \sum_x x\, p_{X\|A}(x)$	$E[X\|A] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X\|A}(x)\, dx$
$E[X\|Y=y] = \sum_x x\, p_{X\|Y}(x\|y)$	$E[X\|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X\|Y}(x\|y)\, dx$
$E[X] = \sum_y p_Y(y)\, E[X\|Y=y]$	$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\, E[X\|Y=y]\, dy$

Παραδείγματα

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(2x+y), & \text{αν } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$$

$c = ;$ $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$\Rightarrow \int_0^1\int_0^1 c(2x+y)\,dx\,dy = 1$

$\Rightarrow c\left[\int_0^1\int_0^1 2x\,dx\,dy + \int_0^1 y\int_0^1 dx\,dy\right] = 1$

$\Rightarrow c\left[\int_0^1 x^2\Big|_{x=0}^{1}\,dy + \int_0^1 y\,dy\right] = 1$

$\Rightarrow c\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{3}.$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2x+y), & \text{αν} \quad 0 \le x, y \le 1 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{y \in \mathbb{R}}}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

$$= \begin{cases} 0, & y<0 \ \text{ή} \ y>1 \\ \int_0^1 \frac{2}{3}(2x+y)\,dx & 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 x\,dx + \frac{2}{3}y\int_0^1 dx = \frac{2}{3}(1+y)$$

Δεκ 10-3:51 μμ

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Για $y<0$ ή $y>1$ δεν ορίζεται
(οπότε $f_Y(y)=0$)

Για $0 \le y \le 1$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 0, & x<0 \text{ ή } x>1 \\ \dfrac{\cancel{\frac{1}{3}}(2x+y)}{\cancel{\frac{2}{3}}(1+y)} & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Δεκ 10-3:55 μμ

$$E[X \mid Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

Για $y<0$ ή $y>1$ δεν ορίζεται.

Για $0 \le y \le 1$:

$$E[X \mid Y=y] = \int_0^1 x \cdot \frac{2x+y}{1+y}\, dx$$

$$= \frac{1}{1+y}\left[2\int_0^1 x^2\, dx + y\int_0^1 x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{1+y}\left(\frac{2}{3} + \frac{y}{2}\right) = \frac{4+3y}{6+6y}.$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) \, dx$$

ή

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \, E[X \mid Y=y] \, dy$$

Ανεξαρτησία

1] Ανεξ. ενδεχομένων

A, B ανεξ $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

2] Ανεξ. διακρ. τ.μ

X, Y ανεξ $\Leftrightarrow P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)\,P_Y(y)$

$P(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) = P(\{X=x\}) \cdot P(\{Y=y\})$

3] Ανεξ. συνεχών τ.μ.

X, Y ανεξ. $\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$

Άσκηση 1:

(X,Y) με σππ $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(xy+x+y+1), \\ x,y \in [0,1] \\ 0, \text{ διαφ.} \end{cases}$

X, Y ανεξ. ;

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \text{ ή } x\geq 1 \\ \int_0^1 c(xy+x+y+1)\,dy & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 (xy+x+y+1)\,dy = x\int_0^1 y\,dy + x\int_0^1 dy + \int_0^1 y\,dy + \int_0^1 dy$$

$$= x/2 + x + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}(1+x)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3c}{2}(1+x), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \frac{3c}{2}\int_0^1 (1+x)\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{3c}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{4}{9}.$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(1+x), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi. \end{cases}$$

Όμοια:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(1+y), & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi. \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{9}(xy+x+y+1), & 0 \le x, y \le 1 \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi. \end{cases}$$

Έστω

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

X, Y ανεξάρτητες.

Δεκ 10-4:36 μμ

Άσκηση 2:

(X,Y) τ.δ. με σππ. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+y), & 0 \le x, y \le 1 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

X, Y ανεξ ;

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \text{ ή } x>1 \\ \int_0^1 c(x+y)\,dy, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 (x+y)\,dy = x\int_0^1 dy + \int_0^1 y\,dy = x + \frac{1}{2}$$

Δεκ 10-4:37 μμ

$$f_X(x) = \begin{cases} c\left(x+ \frac{1}{2}\right), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow c\int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 1$$

$$\Rightarrow c\left(\int_0^1 x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 dx\right) = 1 \Rightarrow c = 1.$$

$$f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi. \end{cases}$$

Όμοια (συμμετρία)

$$f_Y(y) = \begin{cases} y+\frac{1}{2}, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi. \end{cases}$$

Γενικά $\exists\, x, y \in \mathbb{R}$:

$$f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)$$

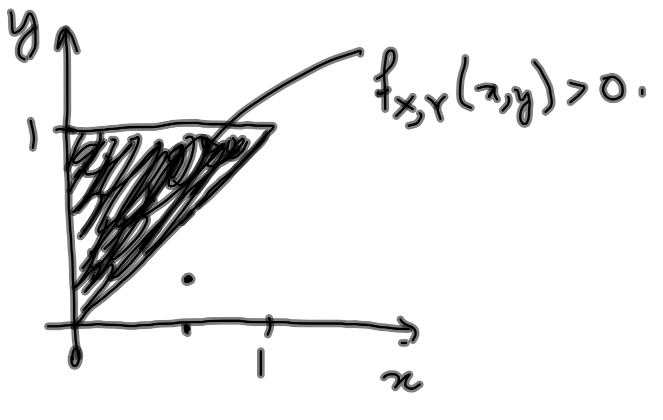
οπότε

X, Y όχι ανεξ.

Άσκηση 3!

(X,Y) με σππ

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\left(x e^{-yx} + 5x^2\right), & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$$



Αν πάρω (x, y) με $0 \le y < x \le 1$

τότε $f_{X,Y}(x,y) = 0$.

Όμως

$$f_X(x) = \int_x^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy > 0$$

$$f_Y(y) = \int_0^y f_{X,Y}(x,y)\,dx > 0$$

οπότε $f_{X,Y}(x,y) = 0 < f_X(x) f_Y(y)$ $\Rightarrow$ X, Y όχι ανεξ.

$\neq$

Δεκ 10-4:47 μμ

Παρατήρηση:

Αν (X,Y) με $f_{X,Y}(x,y)>0$ μόνο σε κάποιο τρίγωνο κλπ. (όχι ορθογώνιο) τότε X, Y όχι ανεξ.

Άσκηση 4: (Θεωρ. Ολικής Μέσης Τιμής)

$X \sim Exp\left(\frac{1}{50}\right)$ $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{50} e^{-x/50}, & x > 0 \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi. \end{cases}$

$\shortparallel$

πραγμ. τεχνιτ.

$Y \sim N\left(x, \frac{x^2}{100}\right)$

$\shortparallel$

μετρούμ. τεχνιτ. $f_{Y|X}(y|x) = \frac{10}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{50(y-x)^2}{x^2}}$, $y \in \mathbb{R}$, $x > 0$

$E[Y] = ;$

1ος τρόπος (κακός)

$$\left.\begin{array}{l} f_X(x) \\ f_{Y|X}(y|x) \end{array}\right\} \Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_{Y|X}(y|x)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x,y)\, dx$$

$$\Rightarrow E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy$$

2ος τρόπος (Θεωρ. ολ. Μ.Τ)

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \underbrace{E[Y \mid X = x]}_{= x} dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} f_X(x) \, x \, dx$$

$$= E[X]$$

$$= 50.$$