Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 7:
Εισαγωγή στη Στατιστική Συμπερασματολογία

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων I

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων I

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων Ι

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).
- Μοντέλο για τα δεδομένα (σμπ. ή σππ.) που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ:

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων I

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).
- Μοντέλο για τα δεδομένα (σμπ. ή σππ.) που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ:
  $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων I

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).
- Μοντέλο για τα δεδομένα (σμπ. ή σππ.) που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ:
  $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.
- Μια υπόθεση H για τη θ: $H : \theta \in A$ (π.χ. $H : \theta = 0$, $H : \theta \neq 0$, $H : \theta < 0$ κλπ.).

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων Ι

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).
- Μοντέλο για τα δεδομένα (σμπ. ή σππ.) που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ:
  $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.
- Μια υπόθεση H για τη θ: $H : \theta \in A$ (π.χ. $H : \theta = 0$, $H : \theta \neq 0$, $H : \theta < 0$ κλπ.).
- Στο κλασικό πλαίσιο, υπάρχουν 2 υποθέσεις:

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων I

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).
- Μοντέλο για τα δεδομένα (σμπ. ή σππ.) που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ:
  $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.
- Μια υπόθεση H για τη θ: $H : \theta \in A$ (π.χ. $H : \theta = 0$, $H : \theta \neq 0$, $H : \theta < 0$ κλπ.).
- Στο κλασικό πλαίσιο, υπάρχουν 2 υποθέσεις:
  H_0: Μηδενική υπόθεση (προεπιλεγμένο μοντέλο, συντηρητική υπόθεση).

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων I

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).
- Μοντέλο για τα δεδομένα (σμπ. ή σππ.) που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ:
  $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.
- Μια υπόθεση H για τη θ: $H:\ \theta \in A$ (π.χ. $H:\ \theta = 0$, $H:\ \theta \neq 0$, $H:\ \theta < 0$ κλπ.).
- Στο κλασικό πλαίσιο, υπάρχουν 2 υποθέσεις:
  H_0: Μηδενική υπόθεση (προεπιλεγμένο μοντέλο, συντηρητική υπόθεση).
  H_1: Εναλλακτική υπόθεση (νέο προτεινόμενο μοντέλο).

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων I

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).
- Μοντέλο για τα δεδομένα (σμπ. ή σππ.) που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ:
  $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.
- Μια υπόθεση H για τη θ: $H : \theta \in A$ (π.χ. $H : \theta = 0$, $H : \theta \neq 0$, $H : \theta < 0$ κλπ.).
- Στο κλασικό πλαίσιο, υπάρχουν 2 υποθέσεις:
  H_0: Μηδενική υπόθεση (προεπιλεγμένο μοντέλο, συντηρητική υπόθεση).
  H_1: Εναλλακτική υπόθεση (νέο προτεινόμενο μοντέλο).
- Στόχος του ελέγχου:

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων I

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).
- Μοντέλο για τα δεδομένα (σμπ. ή σππ.) που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ: $p_X(x; \theta)$ ($f_X(x; \theta)$).
- Μια υπόθεση H για τη θ: $H : \theta \in A$ (π.χ. $H : \theta = 0$, $H : \theta \neq 0$, $H : \theta < 0$ κλπ.).
- Στο κλασικό πλαίσιο, υπάρχουν 2 υποθέσεις:
  H_0: Μηδενική υπόθεση (προεπιλεγμένο μοντέλο, συντηρητική υπόθεση).
  H_1: Εναλλακτική υπόθεση (νέο προτεινόμενο μοντέλο).
- Στόχος του ελέγχου:
  Αφού παρατηρήσω $X = x$ (δεδομένα) να δεχτώ ή να απορρίψω την H_0 (προς χάριν της H_1).

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων II

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων ΙΙ

- Διαμέριση του χώρου των δυνατών παρατηρήσεων:

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων II

- Διαμέριση του χώρου των δυνατών παρατηρήσεων: Διαμερίζω το σύνολο των δυνατών τιμών x των δεδομένων σε δυο περιοχές R και R^c.

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων II

- Διαμέριση του χώρου των δυνατών παρατηρήσεων: Διαμερίζω το σύνολο των δυνατών τιμών x των δεδομένων σε δυο περιοχές R και R^c.
- Κανόνας απόφασης:

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων II

- Διαμέριση του χώρου των δυνατών παρατηρήσεων: Διαμερίζω το σύνολο των δυνατών τιμών x των δεδομένων σε δυο περιοχές R και R^c.
- Κανόνας απόφασης: Αν $x \in R$ τότε απορρίπτω την H_0.

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων ΙΙ

- Διαμέριση του χώρου των δυνατών παρατηρήσεων: Διαμερίζω το σύνολο των δυνατών τιμών x των δεδομένων σε δυο περιοχές R και R^c.
- Κανόνας απόφασης:
  Αν $x \in R$ τότε απορρίπτω την H_0.
  (R περιοχή απόρριψης).

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων II

- Διαμέριση του χώρου των δυνατών παρατηρήσεων:
  Διαμερίζω το σύνολο των δυνατών τιμών x των δεδομένων σε δυο περιοχές R και R^c.
- Κανόνας απόφασης:
  Αν $x \in R$ τότε απορρίπτω την H_0.
  (R περιοχή απόρριψης).
  Αν $x \in R^c$ τότε αποδέχομαι την H_0.

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων II

- Διαμέριση του χώρου των δυνατών παρατηρήσεων: Διαμερίζω το σύνολο των δυνατών τιμών x των δεδομένων σε δυο περιοχές R και R^c.
- Κανόνας απόφασης:
  Αν $x \in R$ τότε απορρίπτω την H_0.
  (R περιοχή απόρριψης).
  Αν $x \in R^c$ τότε αποδέχομαι την H_0.
  (R περιοχή αποδοχής).

Πλαίσιο στατιστικών ελέγχων υποθέσεων II

- Διαμέριση του χώρου των δυνατών παρατηρήσεων:
  Διαμερίζω το σύνολο των δυνατών τιμών x των δεδομένων σε δυο περιοχές R και R^c.
- Κανόνας απόφασης:
  Αν $x \in R$ τότε απορρίπτω την H_0.
  (R περιοχή απόρριψης).
  Αν $x \in R^c$ τότε αποδέχομαι την H_0.
  (R περιοχή αποδοχής).
- Κανόνας απόφασης = Επιλογή περιοχής απόρριψης.

Σφάλματα

Σφάλματα

- Υπάρχουν 4 περιπτώσεις που μπορεί να προκύψουν σε έναν έλεγχο υποθέσεων:

Σφάλματα

- Υπάρχουν 4 περιπτώσεις που μπορεί να προκύψουν σε έναν έλεγχο υποθέσεων:
    - H_0 αληθής, H_0 αποδεκτή,
    - H_0 αληθής, H_0 απορρίπτεται,
    - H_0 ψευδής, H_0 αποδεκτή,
    - H_0 ψευδής, H_0 απορρίπτεται.

Σφάλματα

- Υπάρχουν 4 περιπτώσεις που μπορεί να προκύψουν σε έναν έλεγχο υποθέσεων:
  - H_0 αληθής, H_0 αποδεκτή,
  - H_0 αληθής, H_0 απορρίπτεται,
  - H_0 ψευδής, H_0 αποδεκτή,
  - H_0 ψευδής, H_0 απορρίπτεται.
- Επιτυχής έλεγχος: H_0 αληθής, H_0 αποδεκτή

Σφάλματα

- Υπάρχουν 4 περιπτώσεις που μπορεί να προκύψουν σε έναν έλεγχο υποθέσεων:
  - H_0 αληθής, H_0 αποδεκτή,
  - H_0 αληθής, H_0 απορρίπτεται,
  - H_0 ψευδής, H_0 αποδεκτή,
  - H_0 ψευδής, H_0 απορρίπτεται.
- Επιτυχής έλεγχος: H_0 αληθής, H_0 αποδεκτή ή H_0 ψευδής, H_0 απορρίπτεται.

Σφάλματα

- Υπάρχουν 4 περιπτώσεις που μπορεί να προκύψουν σε έναν έλεγχο υποθέσεων:
  - H_0 αληθής, H_0 αποδεκτή,
  - H_0 αληθής, H_0 απορρίπτεται,
  - H_0 ψευδής, H_0 αποδεκτή,
  - H_0 ψευδής, H_0 απορρίπτεται.
- Επιτυχής έλεγχος: H_0 αληθής, H_0 αποδεκτή ή H_0 ψευδής, H_0 απορρίπτεται.
- Σφάλμα τύπου I: H_0 αληθής, H_0 απορρίπτεται.

Σφάλματα

- Υπάρχουν 4 περιπτώσεις που μπορεί να προκύψουν σε έναν έλεγχο υποθέσεων:
  - H_0 αληθής, H_0 αποδεκτή,
  - H_0 αληθής, H_0 απορρίπτεται,
  - H_0 ψευδής, H_0 αποδεκτή,
  - H_0 ψευδής, H_0 απορρίπτεται.
- Επιτυχής έλεγχος: H_0 αληθής, H_0 αποδεκτή ή H_0 ψευδής, H_0 απορρίπτεται.
- Σφάλμα τύπου I: H_0 αληθής, H_0 απορρίπτεται. (λανθασμένη απόρριψη της H_0).

Σφάλματα

- Υπάρχουν 4 περιπτώσεις που μπορεί να προκύψουν σε έναν έλεγχο υποθέσεων:
    - H_0 αληθής, H_0 αποδεκτή,
    - H_0 αληθής, H_0 απορρίπτεται,
    - H_0 ψευδής, H_0 αποδεκτή,
    - H_0 ψευδής, H_0 απορρίπτεται.
- Επιτυχής έλεγχος: H_0 αληθής, H_0 αποδεκτή ή H_0 ψευδής, H_0 απορρίπτεται.
- Σφάλμα τύπου I: H_0 αληθής, H_0 απορρίπτεται. (λανθασμένη απόρριψη της H_0).
- Σφάλμα τύπου II: H_0 ψευδής, H_0 αποδεκτή.

Σφάλματα

- Υπάρχουν 4 περιπτώσεις που μπορεί να προκύψουν σε έναν έλεγχο υποθέσεων:
  - H_0 αληθής, H_0 αποδεκτή,
  - H_0 αληθής, H_0 απορρίπτεται,
  - H_0 ψευδής, H_0 αποδεκτή,
  - H_0 ψευδής, H_0 απορρίπτεται.
- Επιτυχής έλεγχος: H_0 αληθής, H_0 αποδεκτή ή H_0 ψευδής, H_0 απορρίπτεται.
- Σφάλμα τύπου I: H_0 αληθής, H_0 απορρίπτεται. (λανθασμένη απόρριψη της H_0).
- Σφάλμα τύπου II: H_0 ψευδής, H_0 αποδεκτή. (λανθασμένη αποδοχή της H_0).

Σφάλματα (συνέχεια)

Σφάλματα (συνέχεια)

- Ποιό σφάλμα είναι χειρότερο ;

Σφάλματα (συνέχεια)

- Ποιό σφάλμα είναι χειρότερο ; ;

Σφάλματα (συνέχεια)

- Ποιό σφάλμα είναι χειρότερο ; ; ;

Σφάλματα (συνέχεια)

- Ποιό σφάλμα είναι χειρότερο ; ; ;
- Η H_0 είναι η συντηρητική υπόθεση.

Σφάλματα (συνέχεια)

- Ποιό σφάλμα είναι χειρότερο ; ; ;
- Η H_0 είναι η συντηρητική υπόθεση.

Σφάλματα (συνέχεια)

- Ποιό σφάλμα είναι χειρότερο ; ; ;
- Η H_0 είναι η συντηρητική υπόθεση.

Σφάλματα (συνέχεια)

- Ποιό σφάλμα είναι χειρότερο ; ; ;
- Η H_0 είναι η συντηρητική υπόθεση.
- Το σφάλμα τύπου I είναι πιο σημαντικό από το σφάλμα τύπου II.

Σφάλματα (συνέχεια)

- Ποιό σφάλμα είναι χειρότερο ; ; ;
- Η H_0 είναι η συντηρητική υπόθεση.
- Το σφάλμα τύπου I είναι πιο σημαντικό από το σφάλμα τύπου II.
- Πιθανότητα σφάλματος I:

Σφάλματα (συνέχεια)

- Ποιό σφάλμα είναι χειρότερο ; ; ;
- Η H_0 είναι η συντηρητική υπόθεση.
- Το σφάλμα τύπου I είναι πιο σημαντικό από το σφάλμα τύπου II.
- Πιθανότητα σφάλματος I:
  $\alpha(R) = P(X \in R; H_0)$:

Σφάλματα (συνέχεια)

- Ποιό σφάλμα είναι χειρότερο ; ; ;
- Η H_0 είναι η συντηρητική υπόθεση.
- Το σφάλμα τύπου I είναι πιο σημαντικό από το σφάλμα τύπου II.
- Πιθανότητα σφάλματος I:
  $\alpha(R) = P(X \in R; H_0)$: Πιθανότητα λανθ. απόρριψης.

Σφάλματα (συνέχεια)

- Ποιό σφάλμα είναι χειρότερο ; ; ;
- Η H_0 είναι η συντηρητική υπόθεση.
- Το σφάλμα τύπου Ι είναι πιο σημαντικό από το σφάλμα τύπου ΙΙ.
- Πιθανότητα σφάλματος Ι:
  $\alpha(R) = P(X \in R; H_0)$: Πιθανότητα λανθ. απόρριψης.
- Πιθανότητα σφάλματος ΙΙ:

Σφάλματα (συνέχεια)

- Ποιό σφάλμα είναι χειρότερο ; ; ;
- Η H_0 είναι η συντηρητική υπόθεση.
- Το σφάλμα τύπου I είναι πιο σημαντικό από το σφάλμα τύπου II.
- Πιθανότητα σφάλματος I:
  $\alpha(R) = P(X \in R; H_0)$: Πιθανότητα λανθ. απόρριψης.
- Πιθανότητα σφάλματος II:
  $\beta(R) = P(X \notin R; H_1)$:

Σφάλματα (συνέχεια)

- Ποιό σφάλμα είναι χειρότερο ; ; ;
- Η H_0 είναι η συντηρητική υπόθεση.
- Το σφάλμα τύπου I είναι πιο σημαντικό από το σφάλμα τύπου II.
- Πιθανότητα σφάλματος I:
  $\alpha(R) = P(X \in R; H_0)$: Πιθανότητα λανθ. απόρριψης.
- Πιθανότητα σφάλματος II:
  $\beta(R) = P(X \notin R; H_1)$: Πιθανότητα λανθ. αποδοχής.

Σφάλματα (συνέχεια)

- Ποιό σφάλμα είναι χειρότερο ; ; ;
- Η H_0 είναι η συντηρητική υπόθεση.
- Το σφάλμα τύπου Ι είναι πιο σημαντικό από το σφάλμα τύπου ΙΙ.
- Πιθανότητα σφάλματος Ι:
  $\alpha(R) = P(X \in R; H_0)$: Πιθανότητα λανθ. απόρριψης.
- Πιθανότητα σφάλματος ΙΙ:
  $\beta(R) = P(X \notin R; H_1)$: Πιθανότητα λανθ. αποδοχής.
- Ζητούμενο: Για δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας α να βρούμε τον έλεγχο που ελαχιστοποιεί το $\beta(R)$, μεταξύ των ελέγχων με $\alpha(R) \leq \alpha$.

Πηλίκο πιθανοφάνειας

Πηλίκο πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).

Πηλίκο πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).
- Μοντέλο για τα δεδομένα (σμπ. ή σππ.) που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ:

Πηλίκο πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).
- Μοντέλο για τα δεδομένα (σμπ. ή σππ.) που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ:
  $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.

Πηλίκο πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).
- Μοντέλο για τα δεδομένα (σμπ. ή σππ.) που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ:
  $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.
- Έλεγχος: $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι $H_1 : \theta = \theta_1$.

Πηλίκο πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).
- Μοντέλο για τα δεδομένα (σμπ. ή σππ.) που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ:
  $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.
- Έλεγχος: $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι $H_1 : \theta = \theta_1$.
  (απλή υπόθεση έναντι απλής υπόθεσης).

Πηλίκο πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).
- Μοντέλο για τα δεδομένα (σμπ. ή σππ.) που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ:
  $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.
- Έλεγχος: $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι $H_1 : \theta = \theta_1$.
  (απλή υπόθεση έναντι απλής υπόθεσης).
- Πηλίκο πιθανοφάνειας:

Πηλίκο πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).
- Μοντέλο για τα δεδομένα (σμπ. ή σππ.) που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ:
  $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.
- Έλεγχος: $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι $H_1 : \theta = \theta_1$.
  (απλή υπόθεση έναντι απλής υπόθεσης).
- Πηλίκο πιθανοφάνειας:

$$L(x) = \frac{p_X(x;H_1)}{p_X(x;H_0)} = \frac{p_X(x;\theta_1)}{p_X(x;\theta_0)} \left(\frac{f_X(x;H_1)}{f_X(x;H_0)} = \frac{f_X(x;\theta_1)}{f_X(x;\theta_0)} \right).$$

Πηλίκο πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα (δεδομ., παρατηρήσεις).
- Μοντέλο για τα δεδομένα (σμπ. ή σππ.) που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ:
  $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.
- Έλεγχος: $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι $H_1 : \theta = \theta_1$.
  (απλή υπόθεση έναντι απλής υπόθεσης).
- Πηλίκο πιθανοφάνειας:

$$L(x) = \frac{p_X(x;H_1)}{p_X(x;H_0)} = \frac{p_X(x;\theta_1)}{p_X(x;\theta_0)} \left(\frac{f_X(x;H_1)}{f_X(x;H_0)} = \frac{f_X(x;\theta_1)}{f_X(x;\theta_0)} \right).$$

- Για δεδομένο x, όσο πιο μεγάλο το $L(x)$ τόσο πιθανότερο είναι οι παρατηρήσεις να προήλθαν από την H_1 παρά από την H_0.

Έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας

Έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας

- Κανόνας απόφασης τύπου ΕΠΠ:

Έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας

- Κανόνας απόφασης τύπου ΕΠΠ:
  Απορρίπτω την H_0 όταν $L(x)$ αρκετά μεγάλο.

Έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας

- Κανόνας απόφασης τύπου ΕΠΠ:
  Απορρίπτω την H_0 όταν $L(x)$ αρκετά μεγάλο.
- Κατασκευή ΕΠΠ:

Έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας

- Κανόνας απόφασης τύπου ΕΠΠ:
  Απορρίπτω την H_0 όταν $L(x)$ αρκετά μεγάλο.
- Κατασκευή ΕΠΠ:
  - Β1: Επιλέγω επίπεδο α για το μέγιστο σφάλμα τύπου Ι

Έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας

- Κανόνας απόφασης τύπου ΕΠΠ:
  Απορρίπτω την H_0 όταν $L(x)$ αρκετά μεγάλο.
- Κατασκευή ΕΠΠ:
    - Β1: Επιλέγω επίπεδο α για το μέγιστο σφάλμα τύπου Ι (επίπεδο σημαντικότητας - πιθ. λανθασμ. απόρριψης).

Έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας

- Κανόνας απόφασης τύπου ΕΠΠ:
  Απορρίπτω την H_0 όταν $L(x)$ αρκετά μεγάλο.
- Κατασκευή ΕΠΠ:
  - Β1: Επιλέγω επίπεδο α για το μέγιστο σφάλμα τύπου I (επίπεδο σημαντικότητας - πιθ. λανθασμ. απόρριψης).
  - Β2: Βρίσκω κρίσιμη τιμή ξ ώστε $P(\text{Σφάλμα τύπου I}) \leq \alpha$, δηλ.

$$P(L(X) > \xi; H_0) \leq \alpha.$$

Έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας

- Κανόνας απόφασης τύπου ΕΠΠ:
  Απορρίπτω την H_0 όταν $L(x)$ αρκετά μεγάλο.
- Κατασκευή ΕΠΠ:
  - B1: Επιλέγω επίπεδο α για το μέγιστο σφάλμα τύπου I (επίπεδο σημαντικότητας - πιθ. λανθασμ. απόρριψης).
  - B2: Βρίσκω κρίσιμη τιμή ξ ώστε $P(\text{Σφάλμα τύπου I}) \leq \alpha$, δηλ.

$$P(L(X) > \xi; H_0) \leq \alpha.$$

  - B3: Παρατηρώ την τιμή x της X.

Έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας

- Κανόνας απόφασης τύπου ΕΠΠ:
  Απορρίπτω την H_0 όταν $L(x)$ αρκετά μεγάλο.
- Κατασκευή ΕΠΠ:
  - B1: Επιλέγω επίπεδο α για το μέγιστο σφάλμα τύπου Ι (επίπεδο σημαντικότητας - πιθ. λανθασμ. απόρριψης).
  - B2: Βρίσκω κρίσιμη τιμή ξ ώστε $P(\Sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha \text{ τύπου Ι}) \leq \alpha$, δηλ.

$$P(L(X) > \xi; H_0) \leq \alpha.$$

  - B3: Παρατηρώ την τιμή x της X.
    Αν $L(x) > \xi$, απορρίπτω την H_0.

Έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας

- Κανόνας απόφασης τύπου ΕΠΠ:
  Απορρίπτω την H_0 όταν $L(x)$ αρκετά μεγάλο.
- Κατασκευή ΕΠΠ:
  - B1: Επιλέγω επίπεδο α για το μέγιστο σφάλμα τύπου Ι (επίπεδο σημαντικότητας - πιθ. λανθασμ. απόρριψης).
  - B2: Βρίσκω κρίσιμη τιμή ξ ώστε $P(\text{Σφάλμα τύπου Ι}) \leq \alpha$, δηλ.

$$P(L(X) > \xi; H_0) \leq \alpha.$$

  - B3: Παρατηρώ την τιμή x της X.
    Αν $L(x) > \xi$, απορρίπτω την H_0.
    Αν $L(x) \leq \xi$, αποδέχομαι την H_0.

Λήμμα Neyman-Pearson

Λήμμα Neyman-Pearson

- Θεωρούμε επιλογή μιας συγκεκριμένης κρίσιμης τιμής ξ σε έναν ΕΠΠ:

Λήμμα Neyman-Pearson

- Θεωρούμε επιλογή μιας συγκεκριμένης κρίσιμης τιμής ξ σε έναν ΕΠΠ:
  Αν $L(x) > \xi$, απορρίπτω την H_0.

Λήμμα Neyman-Pearson

- Θεωρούμε επιλογή μιας συγκεκριμένης κρίσιμης τιμής ξ σε έναν ΕΠΠ:
  Αν $L(x) > \xi$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $L(x) \leq \xi$, αποδέχομαι την H_0.

Λήμμα Neyman-Pearson

- Θεωρούμε επιλογή μιας συγκεκριμένης κρίσιμης τιμής ξ σε έναν ΕΠΠ:
  Αν $L(x) > \xi$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $L(x) \leq \xi$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων Ι, ΙΙ του ΕΠΠ:

Λήμμα Neyman-Pearson

- Θεωρούμε επιλογή μιας συγκεκριμένης κρίσιμης τιμής ξ σε έναν ΕΠΠ:
  Αν $L(x) > \xi$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $L(x) \leq \xi$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων I, II του ΕΠΠ:
  $P(L(X) > \xi; H_0) = \alpha$,

Λήμμα Neyman-Pearson

- Θεωρούμε επιλογή μιας συγκεκριμένης κρίσιμης τιμής ξ σε έναν ΕΠΠ:
  Αν $L(x) > \xi$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $L(x) \leq \xi$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων I, II του ΕΠΠ:
  $P(L(X) > \xi; H_0) = \alpha$, $P(L(X) \leq \xi; H_1) = \beta$.

Λήμμα Neyman-Pearson

- Θεωρούμε επιλογή μιας συγκεκριμένης κρίσιμης τιμής ξ σε έναν ΕΠΠ:
  Αν $L(x) > \xi$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $L(x) \leq \xi$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων I, II του ΕΠΠ:
  $P(L(X) > \xi; H_0) = \alpha$, $P(L(X) \leq \xi; H_1) = \beta$.
- Έστω άλλος εναλ. έλεγχος με κρίσιμη περιοχή R:

Λήμμα Neyman-Pearson

- Θεωρούμε επιλογή μιας συγκεκριμένης κρίσιμης τιμής ξ σε έναν ΕΠΠ:
  Αν $L(x) > \xi$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $L(x) \leq \xi$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων Ι, ΙΙ του ΕΠΠ:
  $P(L(X) > \xi; H_0) = \alpha$, $P(L(X) \leq \xi; H_1) = \beta$.
- Έστω άλλος εναλ. έλεγχος με κρίσιμη περιοχή R:
  Αν $x \in R$, απορρίπτω την H_0.

Λήμμα Neyman-Pearson

- Θεωρούμε επιλογή μιας συγκεκριμένης κρίσιμης τιμής ξ σε έναν ΕΠΠ:
  Αν $L(x) > \xi$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $L(x) \leq \xi$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων I, II του ΕΠΠ:
  $P(L(X) > \xi; H_0) = \alpha$, $P(L(X) \leq \xi; H_1) = \beta$.
- Έστω άλλος εναλ. έλεγχος με κρίσιμη περιοχή R:
  Αν $x \in R$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $x \notin R$, αποδέχομαι την H_0.

Λήμμα Neyman-Pearson

- Θεωρούμε επιλογή μιας συγκεκριμένης κρίσιμης τιμής ξ σε έναν ΕΠΠ:
  Αν $L(x) > \xi$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $L(x) \leq \xi$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων I, II του ΕΠΠ:
  $P(L(X) > \xi; H_0) = \alpha$, $P(L(X) \leq \xi; H_1) = \beta$.
- Έστω άλλος εναλ. έλεγχος με κρίσιμη περιοχή R:
  Αν $x \in R$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $x \notin R$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων I, II του εναλ. ελέγχου:

Λήμμα Neyman-Pearson

- Θεωρούμε επιλογή μιας συγκεκριμένης κρίσιμης τιμής ξ σε έναν ΕΠΠ:
  Αν $L(x) > \xi$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $L(x) \leq \xi$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων Ι, ΙΙ του ΕΠΠ:
  $P(L(X) > \xi; H_0) = \alpha$, $P(L(X) \leq \xi; H_1) = \beta$.
- Έστω άλλος εναλ. έλεγχος με κρίσιμη περιοχή R:
  Αν $x \in R$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $x \notin R$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων Ι, ΙΙ του εναλ. ελέγχου:
  $P(X \in R; H_0) = \alpha'$,

Λήμμα Neyman-Pearson

- Θεωρούμε επιλογή μιας συγκεκριμένης κρίσιμης τιμής ξ σε έναν ΕΠΠ:
  Αν $L(x) > \xi$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $L(x) \leq \xi$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων I, II του ΕΠΠ:
  $P(L(X) > \xi; H_0) = \alpha$, $P(L(X) \leq \xi; H_1) = \beta$.
- Έστω άλλος εναλ. έλεγχος με κρίσιμη περιοχή R:
  Αν $x \in R$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $x \notin R$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων I, II του εναλ. ελέγχου:
  $P(X \in R; H_0) = \alpha'$, $P(X \notin R; H_1) = \beta'$.

Λήμμα Neyman-Pearson

- Θεωρούμε επιλογή μιας συγκεκριμένης κρίσιμης τιμής ξ σε έναν ΕΠΠ:
  Αν $L(x) > \xi$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $L(x) \leq \xi$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων I, II του ΕΠΠ:
  $P(L(X) > \xi; H_0) = \alpha$, $P(L(X) \leq \xi; H_1) = \beta$.
- Έστω άλλος εναλ. έλεγχος με κρίσιμη περιοχή R:
  Αν $x \in R$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $x \notin R$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων I, II του εναλ. ελέγχου:
  $P(X \in R; H_0) = \alpha'$, $P(X \notin R; H_1) = \beta'$.
- Θεωρ. N-P: $\alpha' \leq (<)\alpha \Rightarrow \beta' \geq (>)\beta$.

Λήμμα Neyman-Pearson

- Θεωρούμε επιλογή μιας συγκεκριμένης κρίσιμης τιμής ξ σε έναν ΕΠΠ:
  Αν $L(x) > \xi$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $L(x) \leq \xi$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων I, II του ΕΠΠ:
  $P(L(X) > \xi; H_0) = \alpha$, $P(L(X) \leq \xi; H_1) = \beta$.
- Έστω άλλος εναλ. έλεγχος με κρίσιμη περιοχή R:
  Αν $x \in R$, απορρίπτω την H_0.
  Αν $x \notin R$, αποδέχομαι την H_0.
- Πιθανότητες σφαλμάτων τύπων I, II του εναλ. ελέγχου:
  $P(X \in R; H_0) = \alpha'$, $P(X \notin R; H_1) = \beta'$.
- Θεωρ. N-P: $\alpha' \leq (<)\alpha \Rightarrow \beta' \geq (>)\beta$.
- Για συγκεκριμένο επίπεδο σημαντικότητας (πιθ. σφαλμ. τύπου I) α, ο κατάλληλος ΕΠΠ ελαχιστοποιεί την πιθανότητα σφάλματος τύπου II.

Παράδειγμα 1: Ζάρι δίκαιο ή μεροληπτικό ;

Παράδειγμα 1: Ζάρι δίκαιο ή μεροληπτικό ;

- Στατιστική παρατήρηση: X - Αποτέλεσμα ζαριάς.

Παράδειγμα 1: Ζάρι δίκαιο ή μεροληπτικό ;

- Στατιστική παρατήρηση: X - Αποτέλεσμα ζαριάς.
- Στόχος: Έλεγχος ζαριού.

Παράδειγμα 1: Ζάρι δίκαιο ή μεροληπτικό ;

- Στατιστική παρατήρηση: X - Αποτέλεσμα ζαριάς.
- Στόχος: Έλεγχος ζαριού.
- H_0 (δίκαιο ζάρι): $p_X(x; H_0) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \ldots, 6$.

Παράδειγμα 1: Ζάρι δίκαιο ή μεροληπτικό ;

- Στατιστική παρατήρηση: X - Αποτέλεσμα ζαριάς.
- Στόχος: Έλεγχος ζαριού.
- H_0 (δίκαιο ζάρι): $p_X(x; H_0) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \ldots, 6$.
- H_1 (μερολ. ζάρι): $p_X(x; H_1) = \begin{cases} \frac{1}{4}, x = 1, 2, \\ \frac{1}{8}, x = 3, 4, 5, 6. \end{cases}$

Παράδειγμα 1: Ζάρι δίκαιο ή μεροληπτικό ;

- Στατιστική παρατήρηση: X - Αποτέλεσμα ζαριάς.
- Στόχος: Έλεγχος ζαριού.
- H_0 (δίκαιο ζάρι): $p_X(x; H_0) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \ldots, 6$.
- H_1 (μερολ. ζάρι): $p_X(x; H_1) = \begin{cases} \frac{1}{4}, x = 1, 2, \\ \frac{1}{8}, x = 3, 4, 5, 6. \end{cases}$
- Να υπολογιστεί το πηλίκο πιθανοφάνειας για κάθε x.

Παράδειγμα 1: Ζάρι δίκαιο ή μεροληπτικό ;

- Στατιστική παρατήρηση: X - Αποτέλεσμα ζαριάς.
- Στόχος: Έλεγχος ζαριού.
- H_0 (δίκαιο ζάρι): $p_X(x; H_0) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \ldots, 6$.
- H_1 (μερολ. ζάρι): $p_X(x; H_1) = \begin{cases} \frac{1}{4}, x = 1, 2, \\ \frac{1}{8}, x = 3, 4, 5, 6. \end{cases}$
- Να υπολογιστεί το πηλίκο πιθανοφάνειας για κάθε x.
- Να διατυπωθεί ο ΕΠΠ και να βρεθούν οι περιοχές απόρριψης και οι πιθανότητες των σφαλμάτων I και II για κάθε κρίσιμη τιμή ξ του ΕΠΠ.

Παράδειγμα 1: Ζάρι δίκαιο ή μεροληπτικό ;

- Στατιστική παρατήρηση: X - Αποτέλεσμα ζαριάς.
- Στόχος: Έλεγχος ζαριού.
- H_0 (δίκαιο ζάρι): $p_X(x; H_0) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \ldots, 6$.
- H_1 (μερολ. ζάρι): $p_X(x; H_1) = \begin{cases} \frac{1}{4}, x = 1, 2, \\ \frac{1}{8}, x = 3, 4, 5, 6. \end{cases}$
- Να υπολογιστεί το πηλίκο πιθανοφάνειας για κάθε x.
- Να διατυπωθεί ο ΕΠΠ και να βρεθούν οι περιοχές απόρριψης και οι πιθανότητες των σφαλμάτων I και II για κάθε κρίσιμη τιμή ξ του ΕΠΠ.
- Ποιός είναι ο ΕΠΠ σε επίπεδο σημαντικότητας 5% ;

Παράδειγμα 2: Σήμα συστήματος ασφαλείας

Παράδειγμα 2: Σήμα συστήματος ασφαλείας

- Κάμερα ασφαλείας ανιχνεύει περιοδικά περιοχή.

Παράδειγμα 2: Σήμα συστήματος ασφαλείας

- Κάμερα ασφαλείας ανιχνεύει περιοδικά περιοχή.
- Καταγράφει σήμα $X = 1 + W$ ή $X = 0 + W$, ανάλογα με το αν η περιοχή έχει παραβιαστεί ή όχι.

Παράδειγμα 2: Σήμα συστήματος ασφαλείας

- Κάμερα ασφαλείας ανιχνεύει περιοδικά περιοχή.
- Καταγράφει σήμα $X = 1 + W$ ή $X = 0 + W$, ανάλογα με το αν η περιοχή έχει παραβιαστεί ή όχι.
- $W \sim \mathcal{N}(0, v)$ ο "θόρυβος" του σήματος, v γνωστό.

Παράδειγμα 2: Σήμα συστήματος ασφαλείας

- Κάμερα ασφαλείας ανιχνεύει περιοδικά περιοχή.
- Καταγράφει σήμα $X = 1 + W$ ή $X = 0 + W$, ανάλογα με το αν η περιοχή έχει παραβιαστεί ή όχι.
- $W \sim \mathcal{N}(0, v)$ ο "θόρυβος" του σήματος, v γνωστό.
- Στόχος: Έλεγχος παραβίασης (συναγερμός).

Παράδειγμα 2: Σήμα συστήματος ασφαλείας

- Κάμερα ασφαλείας ανιχνεύει περιοδικά περιοχή.
- Καταγράφει σήμα $X = 1 + W$ ή $X = 0 + W$, ανάλογα με το αν η περιοχή έχει παραβιαστεί ή όχι.
- $W \sim \mathcal{N}(0, v)$ ο "θόρυβος" του σήματος, v γνωστό.
- Στόχος: Έλεγχος παραβίασης (συναγερμός).
- H_0 (όχι παραβ.): $f_X(x; H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\{-\frac{x^2}{2v}\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2: Σήμα συστήματος ασφαλείας

- Κάμερα ασφαλείας ανιχνεύει περιοδικά περιοχή.
- Καταγράφει σήμα $X = 1 + W$ ή $X = 0 + W$, ανάλογα με το αν η περιοχή έχει παραβιαστεί ή όχι.
- $W \sim \mathcal{N}(0, v)$ ο "θόρυβος" του σήματος, v γνωστό.
- Στόχος: Έλεγχος παραβίασης (συναγερμός).
- H_0 (όχι παραβ.): $f_X(x; H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\{-\frac{x^2}{2v}\}$, $x \in \mathbb{R}$.
- H_1 (παραβ.): $f_X(x; H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\{-\frac{(x-1)^2}{2v}\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2: Σήμα συστήματος ασφαλείας

- Κάμερα ασφαλείας ανιχνεύει περιοδικά περιοχή.
- Καταγράφει σήμα $X = 1 + W$ ή $X = 0 + W$, ανάλογα με το αν η περιοχή έχει παραβιαστεί ή όχι.
- $W \sim \mathcal{N}(0, v)$ ο "θόρυβος" του σήματος, v γνωστό.
- Στόχος: Έλεγχος παραβίασης (συναγερμός).
- H_0 (όχι παραβ.): $f_X(x; H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\{-\frac{x^2}{2v}\}$, $x \in \mathbb{R}$.
- H_1 (παραβ.): $f_X(x; H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\{-\frac{(x-1)^2}{2v}\}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να υπολογιστεί το πηλίκο πιθανοφάνειας για κάθε x.

Παράδειγμα 2: Σήμα συστήματος ασφαλείας

- Κάμερα ασφαλείας ανιχνεύει περιοδικά περιοχή.
- Καταγράφει σήμα $X = 1 + W$ ή $X = 0 + W$, ανάλογα με το αν η περιοχή έχει παραβιαστεί ή όχι.
- $W \sim \mathcal{N}(0, v)$ ο "θόρυβος" του σήματος, v γνωστό.
- Στόχος: Έλεγχος παραβίασης (συναγερμός).
- H_0 (όχι παραβ.): $f_X(x; H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\{-\frac{x^2}{2v}\}$, $x \in \mathbb{R}$.
- H_1 (παραβ.): $f_X(x; H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\{-\frac{(x-1)^2}{2v}\}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να υπολογιστεί το πηλίκο πιθανοφάνειας για κάθε x.
- Να διατυπωθεί ο ΕΠΠ και να βρεθούν οι περιοχές απόρριψης και οι πιθανότητες των σφαλμάτων Ι και ΙΙ για κάθε κρίσιμη τιμή ξ του ΕΠΠ.

Παράδειγμα 2: Σήμα συστήματος ασφαλείας

- Κάμερα ασφαλείας ανιχνεύει περιοδικά περιοχή.
- Καταγράφει σήμα $X = 1 + W$ ή $X = 0 + W$, ανάλογα με το αν η περιοχή έχει παραβιαστεί ή όχι.
- $W \sim \mathcal{N}(0, v)$ ο "θόρυβος " του σήματος, v γνωστό.
- Στόχος: Έλεγχος παραβίασης (συναγερμός).
- H_0 (όχι παραβ.): $f_X(x; H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\{-\frac{x^2}{2v}\}$, $x \in \mathbb{R}$.
- H_1 (παραβ.): $f_X(x; H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\{-\frac{(x-1)^2}{2v}\}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να υπολογιστεί το πηλίκο πιθανοφάνειας για κάθε x.
- Να διατυπωθεί ο ΕΠΠ και να βρεθούν οι περιοχές απόρριψης και οι πιθανότητες των σφαλμάτων I και II για κάθε κρίσιμη τιμή ξ του ΕΠΠ.
- Ποιός είναι ο ΕΠΠ σε επίπεδο σημαντικότητας 0.025 ;

Παράδειγμα 3: Έλεγχος νομίσματος

Παράδειγμα 3: Έλεγχος νομίσματος

- Στατιστική παρατήρηση: X - Πλήθος κορώνων σε 25 ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.

Παράδειγμα 3: Έλεγχος νομίσματος

- Στατιστική παρατήρηση: X - Πλήθος κορώνων σε 25 ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.
- Στόχος: Έλεγχος νομίσματος - Πιθανότητα κορώνας θ.

Παράδειγμα 3: Έλεγχος νομίσματος

- Στατιστική παρατήρηση: X - Πλήθος κορώνων σε 25 ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.
- Στόχος: Έλεγχος νομίσματος - Πιθανότητα κορώνας θ.
- H_0: $\theta = \theta_0 = 1/2$.

Παράδειγμα 3: Έλεγχος νομίσματος

- Στατιστική παρατήρηση: X - Πλήθος κορώνων σε 25 ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.
- Στόχος: Έλεγχος νομίσματος - Πιθανότητα κορώνας θ.
- H_0: $\theta = \theta_0 = 1/2$.
- H_1: $\theta = \theta_1 = 2/3$.

Παράδειγμα 3: Έλεγχος νομίσματος

- Στατιστική παρατήρηση: X - Πλήθος κορώνων σε 25 ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.
- Στόχος: Έλεγχος νομίσματος - Πιθανότητα κορώνας θ.
- H_0: $\theta = \theta_0 = 1/2$.
- H_1: $\theta = \theta_1 = 2/3$.
- Να υπολογιστεί το πηλίκο πιθανοφάνειας για κάθε x.

Παράδειγμα 3: Έλεγχος νομίσματος

- Στατιστική παρατήρηση: X - Πλήθος κορώνων σε 25 ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.
- Στόχος: Έλεγχος νομίσματος - Πιθανότητα κορώνας θ.
- H_0: $\theta = \theta_0 = 1/2$.
- H_1: $\theta = \theta_1 = 2/3$.
- Να υπολογιστεί το πηλίκο πιθανοφάνειας για κάθε x.
- Να διατυπωθεί ο ΕΠΠ και να βρεθούν οι περιοχές απόρριψης και οι πιθανότητες των σφαλμάτων I και II για κάθε κρίσιμη τιμή ξ του ΕΠΠ.

Παράδειγμα 3: Έλεγχος νομίσματος

- Στατιστική παρατήρηση: X - Πλήθος κορώνων σε 25 ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.
- Στόχος: Έλεγχος νομίσματος - Πιθανότητα κορώνας θ.
- H_0: $\theta = \theta_0 = 1/2$.
- H_1: $\theta = \theta_1 = 2/3$.
- Να υπολογιστεί το πηλίκο πιθανοφάνειας για κάθε x.
- Να διατυπωθεί ο ΕΠΠ και να βρεθούν οι περιοχές απόρριψης και οι πιθανότητες των σφαλμάτων I και II για κάθε κρίσιμη τιμή ξ του ΕΠΠ.
- Ποιός είναι ο ΕΠΠ σε επίπεδο σημαντικότητας 10% ;

Παράδειγμα 4: Σύγκριση ελέγχων

Παράδειγμα 4: Σύγκριση ελέγχων

- Στατιστική παρατήρηση: $X = (X_1, X_2)$.

Παράδειγμα 4: Σύγκριση ελέγχων

- Στατιστική παρατήρηση: $X = (X_1, X_2)$.
- X_1, X_2 ανεξάρτητες $\mathcal{N}(\mu, 1)$.

Παράδειγμα 4: Σύγκριση ελέγχων

- Στατιστική παρατήρηση: $X = (X_1, X_2)$.
- X_1, X_2 ανεξάρτητες $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Στόχος: Έλεγχος μ.

Παράδειγμα 4: Σύγκριση ελέγχων

- Στατιστική παρατήρηση: $X = (X_1, X_2)$.
- X_1, X_2 ανεξάρτητες $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Στόχος: Έλεγχος μ.
- H_0: $\mu = \mu_0 = 0$.

Παράδειγμα 4: Σύγκριση ελέγχων

- Στατιστική παρατήρηση: $X = (X_1, X_2)$.
- X_1, X_2 ανεξάρτητες $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Στόχος: Έλεγχος μ.
- H_0: $\mu = \mu_0 = 0$.
- H_1: $\mu = \mu_1 = 2$.

Παράδειγμα 4: Σύγκριση ελέγχων

- Στατιστική παρατήρηση: $X = (X_1, X_2)$.
- X_1, X_2 ανεξάρτητες $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Στόχος: Έλεγχος μ.
- H_0: $\mu = \mu_0 = 0$.
- H_1: $\mu = \mu_1 = 2$.
- Επίπεδο σημαντικότητας (πιθανότητα λανθασμένης απορ.) $\alpha = 0.05$.

Παράδειγμα 4: Σύγκριση ελέγχων

- Στατιστική παρατήρηση: $X = (X_1, X_2)$.
- X_1, X_2 ανεξάρτητες $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Στόχος: Έλεγχος μ.
- H_0: $\mu = \mu_0 = 0$.
- H_1: $\mu = \mu_1 = 2$.
- Επίπεδο σημαντικότητας (πιθανότητα λανθασμένης απορ.) $\alpha = 0.05$.
- Να βρεθεί ο ΕΠΠ γι αυτό το επίπεδο σημαντικότητας.

Παράδειγμα 4: Σύγκριση ελέγχων

- Στατιστική παρατήρηση: $X = (X_1, X_2)$.
- X_1, X_2 ανεξάρτητες $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Στόχος: Έλεγχος μ.
- H_0: $\mu = \mu_0 = 0$.
- H_1: $\mu = \mu_1 = 2$.
- Επίπεδο σημαντικότητας (πιθανότητα λανθασμένης απορ.) $\alpha = 0.05$.
- Να βρεθεί ο ΕΠΠ γι αυτό το επίπεδο σημαντικότητας.
- Να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ, β.

Παράδειγμα 4: Σύγκριση ελέγχων

- Στατιστική παρατήρηση: $X = (X_1, X_2)$.
- X_1, X_2 ανεξάρτητες $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Στόχος: Έλεγχος μ.
- H_0: $\mu = \mu_0 = 0$.
- H_1: $\mu = \mu_1 = 2$.
- Επίπεδο σημαντικότητας (πιθανότητα λανθασμένης απορ.) $\alpha = 0.05$.
- Να βρεθεί ο ΕΠΠ γι αυτό το επίπεδο σημαντικότητας.
- Να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος τύπου II, β.
- Έστω ο έλεγχος "Απόρριψε την H_0 αν $\max(X_1, X_2) > \zeta$".

Παράδειγμα 4: Σύγκριση ελέγχων

- Στατιστική παρατήρηση: $X = (X_1, X_2)$.
- X_1, X_2 ανεξάρτητες $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Στόχος: Έλεγχος μ.
- H_0: $\mu = \mu_0 = 0$.
- H_1: $\mu = \mu_1 = 2$.
- Επίπεδο σημαντικότητας (πιθανότητα λανθασμένης απορ.) $\alpha = 0.05$.
- Να βρεθεί ο ΕΠΠ γι αυτό το επίπεδο σημαντικότητας.
- Να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος τύπου II, β.
- Έστω ο έλεγχος "Απόρριψε την H_0 αν $\max(X_1, X_2) > \zeta$". Να βρεθεί το ζ για το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας.

Παράδειγμα 4: Σύγκριση ελέγχων

- Στατιστική παρατήρηση: $X = (X_1, X_2)$.
- X_1, X_2 ανεξάρτητες $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Στόχος: Έλεγχος μ.
- H_0: $\mu = \mu_0 = 0$.
- H_1: $\mu = \mu_1 = 2$.
- Επίπεδο σημαντικότητας (πιθανότητα λανθασμένης απορ.) $\alpha = 0.05$.
- Να βρεθεί ο ΕΠΠ γι αυτό το επίπεδο σημαντικότητας.
- Να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ, β.
- Έστω ο έλεγχος "Απόρριψε την H_0 αν $\max(X_1, X_2) > \zeta$". Να βρεθεί το ζ για το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας.
- Να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ, β'.

Παράδειγμα 4: Σύγκριση ελέγχων

- Στατιστική παρατήρηση: $X = (X_1, X_2)$.
- X_1, X_2 ανεξάρτητες $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Στόχος: Έλεγχος μ.
- H_0: $\mu = \mu_0 = 0$.
- H_1: $\mu = \mu_1 = 2$.
- Επίπεδο σημαντικότητας (πιθανότητα λανθασμένης απορ.) $\alpha = 0.05$.
- Να βρεθεί ο ΕΠΠ γι αυτό το επίπεδο σημαντικότητας.
- Να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ, β.
- Έστω ο έλεγχος "Απόρριψε την H_0 αν $\max(X_1, X_2) > \zeta$". Να βρεθεί το ζ για το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας.
- Να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ, β'.
- Τί παρατηρείτε ;

Γραμμική παλινδρόμηση

Γραμμική παλινδρόμηση

- Γεωμετρικό πρόβλημα:

Γραμμική παλινδρόμηση

- Γεωμετρικό πρόβλημα:
Δοθέντων n σημείων στο επίπεδο (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ ποιά είναι η ευθεία $y = \theta_0 + \theta_1 x$ που τα προσεγγίζει καλύτερα ;

Γραμμική παλινδρόμηση

- Γεωμετρικό πρόβλημα:
  Δοθέντων n σημείων στο επίπεδο (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ ποιά είναι η ευθεία $y = \theta_0 + \theta_1 x$ που τα προσεγγίζει καλύτερα ; δηλ. ελαχιστοποιεί το $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2$;

Γραμμική παλινδρόμηση

- Γεωμετρικό πρόβλημα:
  Δοθέντων n σημείων στο επίπεδο (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ ποιά είναι η ευθεία $y = \theta_0 + \theta_1 x$ που τα προσεγγίζει καλύτερα ; δηλ. ελαχιστοποιεί το $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2$;
- Στατιστικό πρόβλημα:

Γραμμική παλινδρόμηση

- Γεωμετρικό πρόβλημα:
  Δοθέντων n σημείων στο επίπεδο (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ ποιά είναι η ευθεία $y = \theta_0 + \theta_1 x$ που τα προσεγγίζει καλύτερα ; δηλ. ελαχιστοποιεί το $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2$;
- Στατιστικό πρόβλημα:
  Δυο μεγέθη x και y έχουν γραμμική συσχέτιση, δηλαδή $y = \theta_0 + \theta_1 x$, αλλά υπεισέρχονται κανονικά σφάλματα και οι συντελεστές θ_0, θ_1 είναι άγνωστοι.

Γραμμική παλινδρόμηση

- Γεωμετρικό πρόβλημα:
  Δοθέντων n σημείων στο επίπεδο (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ ποιά είναι η ευθεία $y = \theta_0 + \theta_1 x$ που τα προσεγγίζει καλύτερα ; δηλ. ελαχιστοποιεί το $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2$;
- Στατιστικό πρόβλημα:
  Δυο μεγέθη x και y έχουν γραμμική συσχέτιση, δηλαδή $y = \theta_0 + \theta_1 x$, αλλά υπεισέρχονται κανονικά σφάλματα και οι συντελεστές θ_0, θ_1 είναι άγνωστοι. Ποιες είναι οι ΕΜΠ των παραμέτρων θ_0, θ_1;

Το γραμμικό μοντέλο

Το γραμμικό μοντέλο

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ αριθμοί - ελεγχόμενες μεταβλητές πειράματος.

Το γραμμικό μοντέλο

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ αριθμοί - ελεγχόμενες μεταβλητές πειράματος.
- $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ τ.μ. - εξαρτημένες μεταβλητές πειράματος.

Το γραμμικό μοντέλο

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ αριθμοί - ελεγχόμενες μεταβλητές πειράματος.
- $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ τ.μ. - εξαρτημένες μεταβλητές πειράματος.
- Το γραμμικό μοντέλο:

Το γραμμικό μοντέλο

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ αριθμοί - ελεγχόμενες μεταβλητές πειράματος.
- $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ τ.μ. - εξαρτημένες μεταβλητές πειράματος.
- Το γραμμικό μοντέλο:
  $Y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + W_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

Το γραμμικό μοντέλο

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ αριθμοί - ελεγχόμενες μεταβλητές πειράματος.
- $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ τ.μ. - εξαρτημένες μεταβλητές πειράματος.
- Το γραμμικό μοντέλο:
  $Y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + W_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
  W_i ανεξάρτητες και ισόνομες $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, σ^2 γνωστό.

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ αριθμοί - ελεγχόμενες μεταβλητές πειράματος.
- $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ τ.μ. - εξαρτημένες μεταβλητές πειράματος.
- Το γραμμικό μοντέλο:
  $Y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + W_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
  W_i ανεξάρτητες και ισόνομες $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, σ^2 γνωστό.
- ΕΜΠ των θ_0 και θ_1 ;

Επίλυση γραμμικού μοντέλου

- Το γραμμικό μοντέλο:

Επίλυση γραμμικού μοντέλου

- Το γραμμικό μοντέλο:
  $Y_i \sim \mathcal{N}(\theta_0 + \theta_1 x_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ανεξάρτητες.

Επίλυση γραμμικού μοντέλου

- Το γραμμικό μοντέλο:
  $Y_i \sim \mathcal{N}(\theta_0 + \theta_1 x_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ανεξάρτητες.
- Συνάρτηση πιθανοφάνειας:

Επίλυση γραμμικού μοντέλου

- Το γραμμικό μοντέλο:
  $Y_i \sim \mathcal{N}(\theta_0 + \theta_1 x_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ανεξάρτητες.
- Συνάρτηση πιθανοφάνειας:
  $f_Y(y; \theta_0, \theta_1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2}{2\sigma^2}\}$.

Επίλυση γραμμικού μοντέλου

- Το γραμμικό μοντέλο:
  $Y_i \sim \mathcal{N}(\theta_0 + \theta_1 x_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ανεξάρτητες.
- Συνάρτηση πιθανοφάνειας:
  $f_Y(y; \theta_0, \theta_1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2}{2\sigma^2}\}$.
- Ισοδυναμία στατιστικού - γεωμετρικού προβλήματος:

Επίλυση γραμμικού μοντέλου

- Το γραμμικό μοντέλο:
  $Y_i \sim \mathcal{N}(\theta_0 + \theta_1 x_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ανεξάρτητες.
- Συνάρτηση πιθανοφάνειας:
  $f_Y(y; \theta_0, \theta_1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2}{2\sigma^2}\}$.
- Ισοδυναμία στατιστικού - γεωμετρικού προβλήματος:
  $\max_{\theta_0,\theta_1} f_Y(y; \theta_0, \theta_1) \Leftrightarrow \min_{\theta_0,\theta_1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2$.

Επίλυση γραμμικού μοντέλου

- Το γραμμικό μοντέλο:
  $Y_i \sim \mathcal{N}(\theta_0 + \theta_1 x_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ανεξάρτητες.
- Συνάρτηση πιθανοφάνειας:
  $f_Y(y; \theta_0, \theta_1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(y_i-\theta_0-\theta_1 x_i)^2}{2\sigma^2}\}$.
- Ισοδυναμία στατιστικού - γεωμετρικού προβλήματος:
  $\max_{\theta_0,\theta_1} f_Y(y; \theta_0, \theta_1) \Leftrightarrow \min_{\theta_0,\theta_1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2$.
- Βελτιστοποίηση:
  $\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (y_i-\theta_0-\theta_1 x_i)^2}{\partial \theta_0} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (y_i-\theta_0-\theta_1 x_i)^2}{\partial \theta_1} = 0.$

Λύση γραμμικού μοντέλου

- Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας:

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \\
\hat{\theta}_0 &= \bar{y} - \hat{\theta}_1 \bar{x},
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \ \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}.
$$

Παράδειγμα: Χρόνος - Κλίση

Παράδειγμα: Χρόνος - Κλίση

- Ο πύργος της Πίζας κλίνει όλο και περισσότερο.

Παράδειγμα: Χρόνος - Κλίση

- Ο πύργος της Πίζας κλίνει όλο και περισσότερο.
- Μετρήσεις κλίσης 1975-1987 (κλίση=απόσταση σε μέτρα της πραγματικής θέσης ενός σημείου και της θέσης που θα είχε αν ο Πύργος ήταν κατακόρυφος):

Παράδειγμα: Χρόνος - Κλίση

- Ο πύργος της Πίζας κλίνει όλο και περισσότερο.
- Μετρήσεις κλίσης 1975-1987 (κλίση=απόσταση σε μέτρα της πραγματικής θέσης ενός σημείου και της θέσης που θα είχε αν ο Πύργος ήταν κατακόρυφος):
-

Χρόνος	1975	1976	1977	1978	1979
Κλίση	2.9642	2.9644	2.9656	2.9667	2.9673
Χρόνος	1980	1981	1982	1983	1984
Κλίση	2.9688	2.9696	2.9698	2.9713	2.9717
Χρόνος	1985	1986	1987		
Κλίση	2.9725	2.9742	2.9757		

Παράδειγμα: Χρόνος - Κλίση

- Ο πύργος της Πίζας κλίνει όλο και περισσότερο.
- Μετρήσεις κλίσης 1975-1987 (κλίση=απόσταση σε μέτρα της πραγματικής θέσης ενός σημείου και της θέσης που θα είχε αν ο Πύργος ήταν κατακόρυφος):
-

Χρόνος	1975	1976	1977	1978	1979
Κλίση	2.9642	2.9644	2.9656	2.9667	2.9673
Χρόνος	1980	1981	1982	1983	1984
Κλίση	2.9688	2.9696	2.9698	2.9713	2.9717
Χρόνος	1985	1986	1987		
Κλίση	2.9725	2.9742	2.9757		

- Μοντέλο: Κλίση$=\theta_0+\theta_1\times$ Χρόνος $+$ Σφάλμα.

Παράδειγμα: Χρόνος - Κλίση

- Ο πύργος της Πίζας κλίνει όλο και περισσότερο.
- Μετρήσεις κλίσης 1975-1987 (κλίση=απόσταση σε μέτρα της πραγματικής θέσης ενός σημείου και της θέσης που θα είχε αν ο Πύργος ήταν κατακόρυφος):
-

Χρόνος	1975	1976	1977	1978	1979
Κλίση	2.9642	2.9644	2.9656	2.9667	2.9673
Χρόνος	1980	1981	1982	1983	1984
Κλίση	2.9688	2.9696	2.9698	2.9713	2.9717
Χρόνος	1985	1986	1987		
Κλίση	2.9725	2.9742	2.9757		

- Μοντέλο: Κλίση=$\theta_0+\theta_1\times$ Χρόνος + Σφάλμα.
  $Y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + W_i$, $W_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Παράδειγμα: Χρόνος - Κλίση (συνέχεια)

Παράδειγμα: Χρόνος - Κλίση (συνέχεια)

- ΕΜΠ:

Παράδειγμα: Χρόνος - Κλίση (συνέχεια)

- ΕΜΠ:

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0.0009, \\
\hat{\theta}_0 &= \bar{y} - \hat{\theta}_1 \bar{x} = 1.1233.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα: Χρόνος - Κλίση (συνέχεια)

- ΕΜΠ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0.0009,$$
$$\hat{\theta}_0 = \bar{y} - \hat{\theta}_1 \bar{x} = 1.1233.$$

- Καλύτερη ευθεία που προσαρμόζεται στα δεδομένα:

Παράδειγμα: Χρόνος - Κλίση (συνέχεια)

- ΕΜΠ:

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0.0009, \\
\hat{\theta}_0 &= \bar{y} - \hat{\theta}_1 \bar{x} = 1.1233.
\end{aligned}
$$

- Καλύτερη ευθεία που προσαρμόζεται στα δεδομένα: Κλίση=1.1233+0.0009× Χρόνος.

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  9.2 Γραμμική παλινδρόμηση
  9.3 Έλεγχος δυαδικών υποθέσεων

- Ασκήσεις:

  Οι ασκήσεις που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν έγιναν στην τάξη.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών 2015. Αντώνιος Οικονόμου. «Πιθανότητες και Στατιστική. Εισαγωγή στη Στατιστική Συμπερασματολογία». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI46/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.