Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 7: Εισαγωγή στη Στατιστική Συμπερασματολογία

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Διαστήματα εμπιστοσύνης

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ ($f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$): Μοντέλο.

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ ($f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$): Μοντέλο.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ. που δίνει μια αίσθηση για την τιμή της θ.

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ ($f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$): Μοντέλο.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ. που δίνει μια αίσθηση για την τιμή της θ.
- Μειονέκτημα: Δεν δίνεται κάποια πιθανότητα για το πόσο η $\hat{\Theta}_n$ είναι κοντά στην θ.

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ ($f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$): Μοντέλο.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ. που δίνει μια αίσθηση για την τιμή της θ.
- Μειονέκτημα: Δεν δίνεται κάποια πιθανότητα για το πόσο η $\hat{\Theta}_n$ είναι κοντά στην θ.
- $[\hat{\Theta}_n^-, \hat{\Theta}_n^+] = [g_1(X), g_2(X)]$: Διάστημα εμπιστοσύνης για την θ - ζεύγος τ.μ. που δίνουν μια αίσθηση για την τιμή της θ.

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ ($f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$): Μοντέλο.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ. που δίνει μια αίσθηση για την τιμή της θ.
- Μειονέκτημα: Δεν δίνεται κάποια πιθανότητα για το πόσο η $\hat{\Theta}_n$ είναι κοντά στην θ.
- $[\hat{\Theta}_n^-, \hat{\Theta}_n^+] = [g_1(X), g_2(X)]$: Διάστημα εμπιστοσύνης για την θ - ζεύγος τ.μ. που δίνουν μια αίσθηση για την τιμή της θ.
- Πλεονέκτημα: Το διάστημα εμπιστοσύνης επιλέγεται έτσι ώστε να περιέχει την παράμετρο με τουλάχιστον κάποια επιθυμητή πιθανότητα $1 - \alpha$, που αναφέρεται ως **επίπεδο εμπιστοσύνης**:

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ ($f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$): Μοντέλο.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ. που δίνει μια αίσθηση για την τιμή της θ.
- Μειονέκτημα: Δεν δίνεται κάποια πιθανότητα για το πόσο η $\hat{\Theta}_n$ είναι κοντά στην θ.
- $[\hat{\Theta}_n^-, \hat{\Theta}_n^+] = [g_1(X), g_2(X)]$: Διάστημα εμπιστοσύνης για την θ - ζεύγος τ.μ. που δίνουν μια αίσθηση για την τιμή της θ.
- Πλεονέκτημα: Το διάστημα εμπιστοσύνης επιλέγεται έτσι ώστε να περιέχει την παράμετρο με τουλάχιστον κάποια επιθυμητή πιθανότητα $1 - \alpha$, που αναφέρεται ως **επίπεδο εμπιστοσύνης**: $P_\theta(\hat{\Theta}_n^- \leq \theta \leq \hat{\Theta}_n^+) \geq 1 - \alpha$.

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, \upsilon)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. υ γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1-\alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{\upsilon/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, \upsilon)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. υ γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{\upsilon/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - (1 - \Phi(z)) = 0.95$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - (1 - \Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1-\alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \le T \le z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - (1-\Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1-\alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - (1-\Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - (1 - \Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0.975 = \Phi(1.96)$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) - (1 - \Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) = 0.975 = \Phi(1.96) \Leftrightarrow$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) - (1 - \Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) = 0.975 = \Phi(1.96) \Leftrightarrow z = 1.96$.

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) - (1 - \Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) = 0.975 = \Phi(1.96) \Leftrightarrow z = 1.96$.
- $P(-1.96 \leq \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \leq 1.96) = 0.95$ και λύνουμε για το μ.

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) - (1 - \Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) = 0.975 = \Phi(1.96) \Leftrightarrow z = 1.96.$
- $P(-1.96 \leq \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \leq 1.96) = 0.95$ και λύνουμε για το μ.
- $[\hat{\Theta}_n - 1.96\sqrt{v/n}, \hat{\Theta}_n + 1.96\sqrt{v/n}]$:

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1-\alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - (1-\Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0.975 = \Phi(1.96) \Leftrightarrow z = 1.96$.
- $P(-1.96 \leq \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \leq 1.96) = 0.95$ και λύνουμε για το μ.
- $[\hat{\Theta}_n - 1.96\sqrt{v/n}, \hat{\Theta}_n + 1.96\sqrt{v/n}]$:
  Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ επιπέδου 95%.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε.

- B1: Προσδιορισμός εκτιμήτριας $\hat{\Theta}_n$ για το θ.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε.

- Β1: Προσδιορισμός εκτιμήτριας $\hat{\Theta}_n$ για το θ.
- Β2: Προσδιορισμός τ.μ. $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε.

- B1: Προσδιορισμός εκτιμήτριας $\hat{\Theta}_n$ για το θ.
- B2: Προσδιορισμός τ.μ. $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.
- B3: Προσδιορισμός σταθερών $c_1 < c_2$ ώστε

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε.

- Β1: Προσδιορισμός εκτιμήτριας $\hat{\Theta}_n$ για το θ.
- Β2: Προσδιορισμός τ.μ. $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.
- Β3: Προσδιορισμός σταθερών $c_1 < c_2$ ώστε $P(c_1 \leq T \leq c_2) =$ δοσμένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε.

- B1: Προσδιορισμός εκτιμήτριας $\hat{\Theta}_n$ για το θ.
- B2: Προσδιορισμός τ.μ. $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.
- B3: Προσδιορισμός σταθερών $c_1 < c_2$ ώστε $P(c_1 \leq T \leq c_2) =$ δοσμένο επίπεδο εμπιστοσύνης.
- B4: Λύνουμε την $c_1 \leq g(\hat{\Theta}_n, \theta) \leq c_2$ ως προς θ.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε. - δυσκολίες

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε. - δυσκολίες

- Β2: Δεν είναι εύκολο να κατασκευάσουμε $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε. - δυσκολίες

- B2: Δεν είναι εύκολο να κατασκευάσουμε $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.
- B3: Δεν είναι εύκολο να βρούμε τα c_1, c_2 όταν η T έχει μια οποιαδήποτε κατανομή.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε. - δυσκολίες

- B2: Δεν είναι εύκολο να κατασκευάσουμε $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.
- B3: Δεν είναι εύκολο να βρούμε τα c_1, c_2 όταν η T έχει μια οποιαδήποτε κατανομή.
- B4: Δεν είναι εύκολο να λύσουμε την $c_1 \leq g(\hat{\Theta}_n, \theta) \leq c_2$ ως προς θ για οποιαδήποτε συνάρτηση g.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε. - δυσκολίες

- B2: Δεν είναι εύκολο να κατασκευάσουμε $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.
- B3: Δεν είναι εύκολο να βρούμε τα c_1, c_2 όταν η T έχει μια οποιαδήποτε κατανομή.
- B4: Δεν είναι εύκολο να λύσουμε την $c_1 \leq g(\hat{\Theta}_n, \theta) \leq c_2$ ως προς θ για οποιαδήποτε συνάρτηση g.
  $\downarrow$

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε. - δυσκολίες

- B2: Δεν είναι εύκολο να κατασκευάσουμε $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.
- B3: Δεν είναι εύκολο να βρούμε τα c_1, c_2 όταν η T έχει μια οποιαδήποτε κατανομή.
- B4: Δεν είναι εύκολο να λύσουμε την $c_1 \leq g(\hat{\Theta}_n, \theta) \leq c_2$ ως προς θ για οποιαδήποτε συνάρτηση g.

  $\downarrow$

  Η μέθοδος γενικά δύσκολα εφαρμόζεται για κατασκευή ακριβών δ.ε.

Προσεγγιστικά δ.ε.

Προσεγγιστικά δ.ε.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ μεγάλο τ.δ. $(n \geq 30)$.

Προσεγγιστικά δ.ε.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ μεγάλο τ.δ. $(n \geq 30)$.
- $\mu = E[X_i]$ άγνωστη παράμετρος.

Προσεγγιστικά δ.ε.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ μεγάλο τ.δ. $(n \geq 30)$.
- $\mu = E[X_i]$ άγνωστη παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ.

Προσεγγιστικά δ.ε.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ μεγάλο τ.δ. $(n \geq 30)$.
- $\mu = E[X_i]$ άγνωστη παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ.
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ (NMA).

Προσεγγιστικά δ.ε.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ μεγάλο τ.δ. ($n \geq 30$).
- $\mu = E[X_i]$ άγνωστη παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ.
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ (NMA).
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n-\mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, κατά προσέγγιση.

Προσεγγιστικά δ.ε.

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ μεγάλο τ.δ. $(n \geq 30)$.
- $\mu = E[X_i]$ άγνωστη παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ.
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ (NMA).
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, κατά προσέγγιση.
- Δουλεύουμε όπως στο παράδειγμα για το διάστημα εμπιστοσύνης για το μ κανονικής κατανομής.

Προσεγγιστικά δ.ε.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ μεγάλο τ.δ. $(n \geq 30)$.
- $\mu = E[X_i]$ άγνωστη παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ.
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ (NMA).
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, κατά προσέγγιση.
- Δουλεύουμε όπως στο παράδειγμα για το διάστημα εμπιστοσύνης για το μ κανονικής κατανομής.
- Αν η διασπορά είναι άγνωστη, την αντικαθιστούμε με μια εκτίμησή της.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για ποσοστά, διαφορά ποσοστών

Παράδειγμα: Δ.Ε. για ποσοστά, διαφορά ποσοστών

- Έρευνα για συσχέτιση καπνίσματος και άσθματος.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για ποσοστά, διαφορά ποσοστών

- Έρευνα για συσχέτιση καπνίσματος και άσθματος.
- Σε δείγμα 980 καπνιστών βρέθηκαν 34 με άσθμα.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για ποσοστά, διαφορά ποσοστών

- Έρευνα για συσχέτιση καπνίσματος και άσθματος.
- Σε δείγμα 980 καπνιστών βρέθηκαν 34 με άσθμα.
- Σε δείγμα 4350 μη-καπνιστών βρέθηκαν 70 με άσθμα.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για ποσοστά, διαφορά ποσοστών

- Έρευνα για συσχέτιση καπνίσματος και άσθματος.
- Σε δείγμα 980 καπνιστών βρέθηκαν 34 με άσθμα.
- Σε δείγμα 4350 μη-καπνιστών βρέθηκαν 70 με άσθμα.
- p_1: ποσοστό ασθενών με άσθμα στους καπνιστές.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για ποσοστά, διαφορά ποσοστών

- Έρευνα για συσχέτιση καπνίσματος και άσθματος.
- Σε δείγμα 980 καπνιστών βρέθηκαν 34 με άσθμα.
- Σε δείγμα 4350 μη-καπνιστών βρέθηκαν 70 με άσθμα.
- p_1: ποσοστό ασθενών με άσθμα στους καπνιστές.
- p_2: ποσοστό ασθενών με άσθμα στους μη-καπνιστές.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για ποσοστά, διαφορά ποσοστών

- Έρευνα για συσχέτιση καπνίσματος και άσθματος.
- Σε δείγμα 980 καπνιστών βρέθηκαν 34 με άσθμα.
- Σε δείγμα 4350 μη-καπνιστών βρέθηκαν 70 με άσθμα.
- p_1: ποσοστό ασθενών με άσθμα στους καπνιστές.
- p_2: ποσοστό ασθενών με άσθμα στους μη-καπνιστές.
- Δ.Ε. για p_1, p_2 και $p_1 - p_2$ σε επίπεδο 90%, 95%, 99%.

Παράδειγμα: Προσδιορισμός μεγέθους δείγματος

Παράδειγμα: Προσδιορισμός μεγέθους δείγματος

- Ερευνητής ενδιαφέρεται να εκτιμήσει τη μέση τιμή μεγέθους.

Παράδειγμα: Προσδιορισμός μεγέθους δείγματος

- Ερευνητής ενδιαφέρεται να εκτιμήσει τη μέση τιμή μεγέθους.
- Θα χρησιμοποιήσει τη μέση τιμή δείγματος.

Παράδειγμα: Προσδιορισμός μεγέθους δείγματος

- Ερευνητής ενδιαφέρεται να εκτιμήσει τη μέση τιμή μεγέθους.
- Θα χρησιμοποιήσει τη μέση τιμή δείγματος.
- Επιθυμεί να είναι σίγουρος με πιθανότητα 95% ότι το σφάλμα εκτίμησης είναι μικρότερο του 2.5.

Παράδειγμα: Προσδιορισμός μεγέθους δείγματος

- Ερευνητής ενδιαφέρεται να εκτιμήσει τη μέση τιμή μεγέθους.
- Θα χρησιμοποιήσει τη μέση τιμή δείγματος.
- Επιθυμεί να είναι σίγουρος με πιθανότητα 95% ότι το σφάλμα εκτίμησης είναι μικρότερο του 2.5.
- Η διασπορά είναι 18^2.

Παράδειγμα: Προσδιορισμός μεγέθους δείγματος

- Ερευνητής ενδιαφέρεται να εκτιμήσει τη μέση τιμή μεγέθους.
- Θα χρησιμοποιήσει τη μέση τιμή δείγματος.
- Επιθυμεί να είναι σίγουρος με πιθανότητα 95% ότι το σφάλμα εκτίμησης είναι μικρότερο του 2.5.
- Η διασπορά είναι 18^2.
- Να βρεθεί ελάχιστο μέγεθος δείγματος που να εξασφαλίζει τα παραπάνω.

Άσκηση 1: Προσεγγιστικό δ.ε. Ι

Άσκηση 1: Προσεγγιστικό δ.ε. Ι

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από τη συνεχή ομοιόμορφη στο $[0, \theta]$.

Άσκηση 1: Προσεγγιστικό δ.ε. Ι

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από τη συνεχή ομοιόμορφη στο $[0, \theta]$.
- Να κατασκευαστεί προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το θ σε επίπεδο 95%.

Άσκηση 2: Προσεγγιστικό δ.ε. ΙΙ

Άσκηση 2: Προσεγγιστικό δ.ε. II

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από διωνυμική (N, p) με N γνωστό.

Άσκηση 2: Προσεγγιστικό δ.ε. II

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από διωνυμική (N, p) με N γνωστό.
- Να κατασκευαστεί προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το p σε επίπεδο 95%.

Άσκηση 3: Συντελεστής εμπιστοσύνης και μέγεθος δείγματος

Άσκηση 3: Συντελεστής εμπιστοσύνης και μέγεθος δείγματος

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 γνωστή.

Άσκηση 3: Συντελεστής εμπιστοσύνης και μέγεθος δείγματος

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 γνωστή.
- Να βρεθεί πόσο πρέπει να αυξηθεί το μέγεθος του δείγματος ώστε ο συντελεστής εμπιστοσύνης να μεταβληθεί από 90% σε 99.5%, ενώ το μήκος του διαστήματος να παραμείνει σταθερό.

Άσκηση 4: Μέγεθος δείγματος και μήκος διαστήματος

Άσκηση 4: Μέγεθος δείγματος και μήκος διαστήματος

- Σε επιδημία γρίππης, 140 παιδιά από ένα σχολείο 380 παιδιών αρρώστησαν.

Άσκηση 4: Μέγεθος δείγματος και μήκος διαστήματος

- Σε επιδημία γρίππης, 140 παιδιά από ένα σχολείο 380 παιδιών αρρώστησαν.
- Να βρεθεί 95% προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό των παιδιών που προσβάλλει η γρίππη.

Άσκηση 4: Μέγεθος δείγματος και μήκος διαστήματος

- Σε επιδημία γρίππης, 140 παιδιά από ένα σχολείο 380 παιδιών αρρώστησαν.
- Να βρεθεί 95% προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό των παιδιών που προσβάλλει η γρίππη.
- Το ίδιο με 70 άρρωστα παιδιά σε σχολείο 190 παιδιών.

Άσκηση 4: Μέγεθος δείγματος και μήκος διαστήματος

- Σε επιδημία γρίππης, 140 παιδιά από ένα σχολείο 380 παιδιών αρρώστησαν.
- Να βρεθεί 95% προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό των παιδιών που προσβάλλει η γρίππη.
- Το ίδιο με 70 άρρωστα παιδιά σε σχολείο 190 παιδιών.
- Το ίδιο με 35 άρρωστα παιδιά σε σχολείο 95 παιδιών.

Άσκηση 4: Μέγεθος δείγματος και μήκος διαστήματος

- Σε επιδημία γρίππης, 140 παιδιά από ένα σχολείο 380 παιδιών αρρώστησαν.
- Να βρεθεί 95% προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό των παιδιών που προσβάλλει η γρίππη.
- Το ίδιο με 70 άρρωστα παιδιά σε σχολείο 190 παιδιών.
- Το ίδιο με 35 άρρωστα παιδιά σε σχολείο 95 παιδιών.
- Τί παρατηρείτε;

Άσκηση 5: Ποσοστά, Διαφορά ποσοστών

Άσκηση 5: Ποσοστά, Διαφορά ποσοστών

- Τυχαίο δείγμα 80 φοιτητριών και 60 φοιτητών.

Άσκηση 5: Ποσοστά, Διαφορά ποσοστών

- Τυχαίο δείγμα 80 φοιτητριών και 60 φοιτητών.
- Ερώτημα: Προτιμάτε τον Πολιτικό ή τον Θρησκευτικό Γάμο;

Άσκηση 5: Ποσοστά, Διαφορά ποσοστών

- Τυχαίο δείγμα 80 φοιτητριών και 60 φοιτητών.
- Ερώτημα: Προτιμάτε τον Πολιτικό ή τον Θρησκευτικό Γάμο;
-

Προτιμήσεις	Πολιτικός	Θρησκευτικός	ΔΞ/ΔΑ
Φοιτήτριες	25	48	7
Φοιτητές	22	34	4

Άσκηση 5: Ποσοστά, Διαφορά ποσοστών

- Τυχαίο δείγμα 80 φοιτητριών και 60 φοιτητών.
- Ερώτημα: Προτιμάτε τον Πολιτικό ή τον Θρησκευτικό Γάμο;
-

Προτιμήσεις	Πολιτικός	Θρησκευτικός	ΔΞ/ΔΑ
Φοιτήτριες	25	48	7
Φοιτητές	22	34	4

- p_1 : ποσοστό φοιτητριών που προτιμούν τον Πολιτικό γάμο.

Άσκηση 5: Ποσοστά, Διαφορά ποσοστών

- Τυχαίο δείγμα 80 φοιτητριών και 60 φοιτητών.
- Ερώτημα: Προτιμάτε τον Πολιτικό ή τον Θρησκευτικό Γάμο;
-

Προτιμήσεις	Πολιτικός	Θρησκευτικός	ΔΞ/ΔΑ
Φοιτήτριες	25	48	7
Φοιτητές	22	34	4

- p_1 : ποσοστό φοιτητριών που προτιμούν τον Πολιτικό γάμο.
  p_2: ποσοστό φοιτητών που προτιμούν τον Θρησκευτικό γάμο.

Άσκηση 5: Ποσοστά, Διαφορά ποσοστών

- Τυχαίο δείγμα 80 φοιτητριών και 60 φοιτητών.
- Ερώτημα: Προτιμάτε τον Πολιτικό ή τον Θρησκευτικό Γάμο;
-

Προτιμήσεις	Πολιτικός	Θρησκευτικός	ΔΞ/ΔΑ
Φοιτήτριες	25	48	7
Φοιτητές	22	34	4

- p_1 : ποσοστό φοιτητριών που προτιμούν τον Πολιτικό γάμο.
  p_2: ποσοστό φοιτητών που προτιμούν τον Θρησκευτικό γάμο.
- Να βρεθούν διαστήματα εμπιστοσύνης 90% για τα p_1, p_2, $p_1 - p_2$.

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  9.1 Κλασσική Εκτίμηση Παραμέτρων

- Ασκήσεις:

  Οι ασκήσεις που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν έγιναν στην τάξη.

Τέλος Διαλέξεως

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών 2015. Αντώνιος Οικονόμου. «Πιθανότητες και Στατιστική. Εισαγωγή στη Στατιστική Συμπερασματολογία». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI46/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.