Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 7:
Εισαγωγή στη Στατιστική Συμπερασματολογία

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Κλασική στατιστική συμπερασματολογία

Κλασική στατιστική συμπερασματολογία

- Μελετάμε κάποιο μέγεθος X (τ.μ.).

Κλασική στατιστική συμπερασματολογία

- Μελετάμε κάποιο μέγεθος X (τ.μ.).
- Η σμπ $p_X(x)$ (ή η σππ $f_X(x)$) εξαρτάται από κάποια σταθερή αλλά άγνωστη παράμετρο θ:

Κλασική στατιστική συμπερασματολογία

- Μελετάμε κάποιο μέγεθος X (τ.μ.).
- Η σμπ $p_X(x)$ (ή η σππ $f_X(x)$) εξαρτάται από κάποια σταθερή αλλά άγνωστη παράμετρο θ:
  $p_X(x) = p_X(x;\theta)$ (ή $f_X(x) = f_X(x;\theta)$).

Κλασική στατιστική συμπερασματολογία

- Μελετάμε κάποιο μέγεθος X (τ.μ.).
- Η σμπ $p_X(x)$ (ή η σππ $f_X(x)$) εξαρτάται από κάποια σταθερή αλλά άγνωστη παράμετρο θ:
  $p_X(x) = p_X(x;\theta)$ (ή $f_X(x) = f_X(x;\theta)$).
- Παρατηρούμε το μέγεθος X (τ.μ.) πραγματοποιώντας ένα πείραμα τύχης (συλλογή δεδομένου (-ων)):

Κλασική στατιστική συμπερασματολογία

- Μελετάμε κάποιο μέγεθος X (τ.μ.).
- Η σμπ $p_X(x)$ (ή η σππ $f_X(x)$) εξαρτάται από κάποια σταθερή αλλά άγνωστη παράμετρο θ:
  $p_X(x) = p_X(x;\theta)$ (ή $f_X(x) = f_X(x;\theta)$).
- Παρατηρούμε το μέγεθος X (τ.μ.) πραγματοποιώντας ένα πείραμα τύχης (συλλογή δεδομένου (-ων)):
  x: Η τιμή της τ.μ. X που προέκυψε.

Κλασική στατιστική συμπερασματολογία

- Μελετάμε κάποιο μέγεθος X (τ.μ.).
- Η σμπ $p_X(x)$ (ή η σππ $f_X(x)$) εξαρτάται από κάποια σταθερή αλλά άγνωστη παράμετρο θ:
  $p_X(x) = p_X(x;\theta)$ (ή $f_X(x) = f_X(x;\theta)$).
- Παρατηρούμε το μέγεθος X (τ.μ.) πραγματοποιώντας ένα πείραμα τύχης (συλλογή δεδομένου (-ων)):
  x: Η τιμή της τ.μ. X που προέκυψε.
- Συνάγουμε την πιθανή τιμή της παραμέτρου θ (σημειακή εκτίμηση, διάστημα εμπιστοσύνης) ή κάποια πληροφορία γι αυτή (έλεγχος υποθέσεων).

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή:

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή:
  $f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x},\ x \geq 0.$

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή: $f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \; x \geq 0$. Η θ είναι άγνωστη.

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή: $f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x},\ x \geq 0$. Η θ είναι άγνωστη.
- Δείγμα από n εξαρτήματα - Παρατήρηση χρόνου ζωής.

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή: $f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \; x \geq 0$. Η θ είναι άγνωστη.
- Δείγμα από n εξαρτήματα - Παρατήρηση χρόνου ζωής.
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ οι παρατηρηθείσες τιμές (δεδομένα).

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή: $f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \; x \geq 0$. Η θ είναι άγνωστη.
- Δείγμα από n εξαρτήματα - Παρατήρηση χρόνου ζωής.
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ οι παρατηρηθείσες τιμές (δεδομένα).
- Ποιά είναι η πιθανή τιμή της θ (εκτίμηση).

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή: $f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x},\ x \geq 0$. Η θ είναι άγνωστη.
- Δείγμα από n εξαρτήματα - Παρατήρηση χρόνου ζωής.
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ οι παρατηρηθείσες τιμές (δεδομένα).
- Ποιά είναι η πιθανή τιμή της θ (εκτίμηση).
- Η μέχρι σήμερα πεποίθηση ήταν ότι $\theta = \theta_0$, αλλά μια νέα μελέτη υποστηρίζει ότι $\theta = \theta_1$.

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή:
  $f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \; x \geq 0$. Η θ είναι άγνωστη.
- Δείγμα από n εξαρτήματα - Παρατήρηση χρόνου ζωής.
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ οι παρατηρηθείσες τιμές (δεδομένα).
- Ποιά είναι η πιθανή τιμή της θ (εκτίμηση).
- Η μέχρι σήμερα πεποίθηση ήταν ότι $\theta = \theta_0$, αλλά μια νέα μελέτη υποστηρίζει ότι $\theta = \theta_1$.
  Ποιά υπόθεση να αποδεχθεί η βιομηχανία (έλεγχος υποθέσεων);

Βασικά προβλήματα

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:
  Να βρεθεί η «πιό πιθανή» τιμή της θ.

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:
  Να βρεθεί η «πιό πιθανή» τιμή της θ.
- Διάστημα εμπιστοσύνης:

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:
  Να βρεθεί η «πιό πιθανή» τιμή της θ.
- Διάστημα εμπιστοσύνης:
  Να βρεθεί διάστημα τιμών που να περιέχει τη θ με δεδομένη πιθανότητα (επίπεδο εμπιστοσύνης).

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:
  Να βρεθεί η «πιό πιθανή» τιμή της θ.
- Διάστημα εμπιστοσύνης:
  Να βρεθεί διάστημα τιμών που να περιέχει τη θ με δεδομένη πιθανότητα (επίπεδο εμπιστοσύνης).
- Έλεγχος υποθέσεων:

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:
  Να βρεθεί η «πιό πιθανή» τιμή της θ.
- Διάστημα εμπιστοσύνης:
  Να βρεθεί διάστημα τιμών που να περιέχει τη θ με δεδομένη πιθανότητα (επίπεδο εμπιστοσύνης).
- Έλεγχος υποθέσεων:
  Αν υπάρχουν $m \geq 2$ εναλλακτικές υποθέσεις για τη θ, ποιά να αποδεχτώ;

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:
  Να βρεθεί η «πιό πιθανή» τιμή της θ.
- Διάστημα εμπιστοσύνης:
  Να βρεθεί διάστημα τιμών που να περιέχει τη θ με δεδομένη πιθανότητα (επίπεδο εμπιστοσύνης).
- Έλεγχος υποθέσεων:
  Αν υπάρχουν $m \geq 2$ εναλλακτικές υποθέσεις για τη θ, ποιά να αποδεχτώ;
- Έλεγχος σημαντικότητας:

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:
  Να βρεθεί η «πιό πιθανή» τιμή της θ.
- Διάστημα εμπιστοσύνης:
  Να βρεθεί διάστημα τιμών που να περιέχει τη θ με δεδομένη πιθανότητα (επίπεδο εμπιστοσύνης).
- Έλεγχος υποθέσεων:
  Αν υπάρχουν $m \geq 2$ εναλλακτικές υποθέσεις για τη θ, ποιά να αποδεχτώ;
- Έλεγχος σημαντικότητας:
  Αν υπάρχει μια υπόθεση για τη θ, να τη δεχτώ ή να την απορρίψω;

Βασικές έννοιες

Βασικές έννοιες

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ. .

Βασικές έννοιες

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ. .
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.

Βασικές έννοιες

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ. .
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ $(f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta))$: Μοντέλο.

Βασικές έννοιες

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ. .
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ $(f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta))$: Μοντέλο.
- $\hat{\Theta} = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.

Βασικές έννοιες

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ. .
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ $(f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta))$: Μοντέλο.
- $\hat{\Theta} = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: Παρατηρήσεις - αριθμοί.

Βασικές έννοιες

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ. .
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ $(f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta))$: Μοντέλο.
- $\hat{\Theta} = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: Παρατηρήσεις - αριθμοί.
- $\hat{\theta} = g(x)$: Εκτίμηση της θ με βάση τις συγκεκριμένες παρατηρήσεις - αριθμός.

Συμβολισμοί

Συμβολισμοί

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.

Συμβολισμοί

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.

Συμβολισμοί

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $\hat{\Theta} = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.

Συμβολισμοί

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $\hat{\Theta} = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- Όταν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στον αριθμό n των παρατηρήσεων γράφουμε:
  $\hat{\Theta}_n$ για μια εκτιμήτρια της θ

Συμβολισμοί

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $\hat{\Theta} = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- Όταν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στον αριθμό n των παρατηρήσεων γράφουμε:
  $\hat{\Theta}_n$ για μια εκτιμήτρια της θ
  ($\hat{\Theta}_n, \ n \geq 1$ ακολουθία εκτιμητριών)

Συμβολισμοί

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $\hat{\Theta} = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- Όταν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στον αριθμό n των παρατηρήσεων γράφουμε:
  $\hat{\Theta}_n$ για μια εκτιμήτρια της θ
  ($\hat{\Theta}_n$, $n \geq 1$ ακολουθία εκτιμητριών)
- Η μέση τιμή και η διασπορά μιας εκτιμήτριας $\hat{\Theta}_n$ εξαρτώνται από την αληθινή τιμή της παραμέτρου θ και γι αυτό γράφουμε
  $E_\theta[\hat{\Theta}_n]$ και $Var_\theta[\hat{\Theta}_n]$.

Σφάλματα, μεροληψία

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
  Η g ΔΕΝ εξαρτάται από τη θ.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
  Η g ΔΕΝ εξαρτάται από τη θ.
  Η κατανομή της $\hat{\Theta}_n = g(X)$ εξαρτάται από τη θ.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
  Η g ΔΕΝ εξαρτάται από τη θ.
  Η κατανομή της $\hat{\Theta}_n = g(X)$ εξαρτάται από τη θ.
- Σφάλμα εκτίμησης: $\tilde{\Theta}_n = \hat{\Theta}_n - \theta$.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
  Η g ΔΕΝ εξαρτάται από τη θ.
  Η κατανομή της $\hat{\Theta}_n = g(X)$ εξαρτάται από τη θ.
- Σφάλμα εκτίμησης: $\tilde{\Theta}_n = \hat{\Theta}_n - \theta$.
- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα:
  $MSE(\hat{\Theta}_n) = E_\theta[\tilde{\Theta}_n^2] = E_\theta[(\hat{\Theta}_n - \theta)^2]$.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
  Η g ΔΕΝ εξαρτάται από τη θ.
  Η κατανομή της $\hat{\Theta}_n = g(X)$ εξαρτάται από τη θ.
- Σφάλμα εκτίμησης: $\tilde{\Theta}_n = \hat{\Theta}_n - \theta$.
- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα:
  $MSE(\hat{\Theta}_n) = E_\theta[\tilde{\Theta}_n^2] = E_\theta[(\hat{\Theta}_n - \theta)^2]$.
- Μεροληψία: $b_\theta(\hat{\Theta}_n) = E_\theta[\tilde{\Theta}_n] = E_\theta[\hat{\Theta}_n - \theta]$.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
  Η g ΔΕΝ εξαρτάται από τη θ.
  Η κατανομή της $\hat{\Theta}_n = g(X)$ εξαρτάται από τη θ.
- Σφάλμα εκτίμησης: $\tilde{\Theta}_n = \hat{\Theta}_n - \theta$.
- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα:
  $MSE(\hat{\Theta}_n) = E_\theta[\tilde{\Theta}_n^2] = E_\theta[(\hat{\Theta}_n - \theta)^2]$.
- Μεροληψία: $b_\theta(\hat{\Theta}_n) = E_\theta[\tilde{\Theta}_n] = E_\theta[\hat{\Theta}_n - \theta]$.
- $MSE(\hat{\Theta}_n) = b_\theta(\hat{\Theta}_n)^2 + Var[\hat{\Theta}_n]$.

Επιθυμητές ιδιότητες

Επιθυμητές ιδιότητες

- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.

Επιθυμητές ιδιότητες

- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n$ αμερόληπτη $\Leftrightarrow b_\theta(\hat{\Theta}_n) = 0 \Leftrightarrow E_\theta[\hat{\Theta}_n] = \theta$.

Επιθυμητές ιδιότητες

- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n$ αμερόληπτη $\Leftrightarrow b_\theta(\hat{\Theta}_n) = 0 \Leftrightarrow E_\theta[\hat{\Theta}_n] = \theta$.
- $\hat{\Theta}_n$ αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς $\Leftrightarrow$ $b_\theta(\hat{\Theta}_n) = 0,\ (E_\theta[\hat{\Theta}_n] = \theta), Var[\hat{\Theta}_n]$ ελάχιστο.

Επιθυμητές ιδιότητες

- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n$ αμερόληπτη $\Leftrightarrow b_\theta(\hat{\Theta}_n) = 0 \Leftrightarrow E_\theta[\hat{\Theta}_n] = \theta$.
- $\hat{\Theta}_n$ αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς $\Leftrightarrow$ $b_\theta(\hat{\Theta}_n) = 0,\ (E_\theta[\hat{\Theta}_n] = \theta), Var[\hat{\Theta}_n]$ ελάχιστο.
- $\hat{\Theta}_n$ ασυμπτωτικά αμερόληπτη $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} b_\theta(\hat{\Theta}_n) = 0$ $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} E_\theta[\hat{\Theta}_n] = \theta$.

Κλασικές εκτιμήτριες μέσου και διασποράς

Κλασικές εκτιμήτριες μέσου και διασποράς

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ.

Κλασικές εκτιμήτριες μέσου και διασποράς

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.

Κλασικές εκτιμήτριες μέσου και διασποράς

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- Κλασική εκτιμήτρια για το μ:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

ο δειγματικός μέσος.

Κλασικές εκτιμήτριες μέσου και διασποράς

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- Κλασική εκτιμήτρια για το μ:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

ο δειγματικός μέσος.

- Κλασική εκτιμήτρια για το σ^2:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2,$$

η αμερόληπτη δειγματική διασπορά.

Κλασικές εκτιμήτριες μέσου και διασποράς

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- Κλασική εκτιμήτρια για το μ:
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$
ο δειγματικός μέσος.
- Κλασική εκτιμήτρια για το σ^2:
$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2,$$
η αμερόληπτη δειγματική διασπορά.
- Οι $\bar{X}$ και S^2 είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες των μ και σ^2.

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: δείγμα.

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: δείγμα.
- $p_X(x;\theta)$: από κοινού σμπ. του X υπό την θ

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: δείγμα.
- $p_X(x; \theta)$: από κοινού σμπ. του X υπό την θ
  ($f_X(x; \theta)$: από κοινού σππ. του X υπό την θ).

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: δείγμα.
- $p_X(x;\theta)$: από κοινού σμπ. του X υπό την θ ($f_X(x;\theta)$: από κοινού σπп. του X υπό την θ).
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: παρατήρηση (τιμή της X).

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: δείγμα.
- $p_X(x;\theta)$: από κοινού σμπ. του X υπό την θ ($f_X(x;\theta)$: από κοινού σππ. του X υπό την θ).
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: παρατήρηση (τιμή της X).
- Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάν. της θ δεδομέν. της x είναι η τιμή του θ που μεγιστοπ. την $p_X(x;\theta)$ ($f_X(x;\theta)$).

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: δείγμα.
- $p_X(x; \theta)$: από κοινού σμπ. του X υπό την θ ($f_X(x; \theta)$: από κοινού σππ. του X υπό την θ).
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: παρατήρηση (τιμή της X).
- Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάν. της θ δεδομέν. της x είναι η τιμή του θ που μεγιστοπ. την $p_X(x; \theta)$ ($f_X(x; \theta)$).
- $\hat{\theta}_n : p_X(x; \hat{\theta}_n) = \max_\theta p_X(x; \theta)$.

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$: δείγμα.
- $p_X(x;\theta)$: από κοινού σμπ. του X υπό την θ ($f_X(x;\theta)$: από κοινού σππ. του X υπό την θ).
- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$: παρατήρηση (τιμή της X).
- Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάν. της θ δεδομέν. της x είναι η τιμή του θ που μεγιστοπ. την $p_X(x;\theta)$ ($f_X(x;\theta)$).
- $\hat{\theta}_n : p_X(x;\hat{\theta}_n) = \max_\theta p_X(x;\theta)$.
- Στις περισσότερες εφαρμογές $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες, οπότε $p_X(x;\theta) = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i;\theta)$ ($f_X(x;\theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i;\theta)$).

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: δείγμα.
- $p_X(x;\theta)$: από κοινού σμπ. του X υπό την θ ($f_X(x;\theta)$: από κοινού σππ. του X υπό την θ).
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: παρατήρηση (τιμή της X).
- Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάν. της θ δεδομέν. της x είναι η τιμή του θ που μεγιστοπ. την $p_X(x;\theta)$ ($f_X(x;\theta)$).
- $\hat{\theta}_n : p_X(x;\hat{\theta}_n) = \max_\theta p_X(x;\theta)$.
- Στις περισσότερες εφαρμογές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, οπότε $p_X(x;\theta) = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i;\theta)$ ($f_X(x;\theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i;\theta)$).
- Αντί για το $\max_\theta p_X(x;\theta)$ συχνά θεωρούμε το $\max_\theta \log p_X(x;\theta)$ (λογαριθμική πιθανοφάνεια).

Διαισθητική ερμηνεία των εμπ

Διαισθητική ερμηνεία των εμπ

- Μεγιστοποίηση της πιθανοφάνειας $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.

Διαισθητική ερμηνεία των εμπ

- Μεγιστοποίηση της πιθανοφάνειας $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.
$\downarrow$
- Ποιά είναι η τιμή της παραμέτρου θ υπό την οποία οι παρατηρήσεις έχουν τη μεγαλύτερη πιθανότητα να προκύψουν ;

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: $X =$ αριθμός λευκών σφαιριδίων.

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: $X =$ αριθμός λευκών σφαιριδίων.
- Άγνωστη παράμετρος: $\theta =$ ποσοστό λευκών σφαιριδίων.

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: $X =$ αριθμός λευκών σφαιριδίων.
- Άγνωστη παράμετρος: $\theta =$ ποσοστό λευκών σφαιριδίων. $\theta = 1/4$ ή $\theta = 3/4$.

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: $X =$ αριθμός λευκών σφαιριδίων.
- Άγνωστη παράμετρος: $\theta =$ ποσοστό λευκών σφαιριδίων. $\theta = 1/4$ ή $\theta = 3/4$.
- ΕΜΠ ;

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: X = αριθμός λευκών σφαιριδίων.
- Άγνωστη παράμετρος: θ = ποσοστό λευκών σφαιριδίων. $\theta = 1/4$ ή $\theta = 3/4$.
- ΕΜΠ ; ;

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: X = αριθμός λευκών σφαιριδίων.
- Άγνωστη παράμετρος: θ = ποσοστό λευκών σφαιριδίων. $\theta = 1/4$ ή $\theta = 3/4$.
- ΕΜΠ ; ; ;

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: X = αριθμός λευκών σφαιριδίων.
- Άγνωστη παράμετρος: θ = ποσοστό λευκών σφαιριδίων. $\theta = 1/4$ ή $\theta = 3/4$.
- ΕΜΠ ; ; ;
-

x	0	1	2	3
$p_X(x;1/4)$	$27/64$	$27/64$	$9/64$	$1/64$
$p_X(x;3/4)$	$1/64$	$9/64$	$27/64$	$27/64$

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: X = αριθμός λευκών σφαιριδίων.
- Άγνωστη παράμετρος: θ = ποσοστό λευκών σφαιριδίων. $\theta = 1/4$ ή $\theta = 3/4$.
- ΕΜΠ ; ; ;
-

x	0	1	2	3
$p_X(x;1/4)$	$27/64$	$27/64$	$9/64$	$1/64$
$p_X(x;3/4)$	$1/64$	$9/64$	$27/64$	$27/64$
$\hat{\theta}(x)$	$1/4$	$1/4$	$3/4$	$3/4$

Άσκηση 1: ΕΜΠ από τ.δ. Διωνυμικής

Άσκηση 1: ΕΜΠ από τ.δ. Διωνυμικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Διωνυμική(N, p).

Άσκηση 1: ΕΜΠ από τ.δ. Διωνυμικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Διωνυμική(N, p).
- N: γνωστό, p: άγνωστη παράμετρος.

Άσκηση 1: ΕΜΠ από τ.δ. Διωνυμικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Διωνυμική(N, p).
- N: γνωστό, p: άγνωστη παράμετρος.
- $p_{X_i}(x; p) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}, x = 0, 1, \ldots, N.$

Άσκηση 1: ΕΜΠ από τ.δ. Διωνυμικής

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Διωνυμική(N, p).
- N: γνωστό, p: άγνωστη παράμετρος.
- $p_{X_i}(x; p) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}, x = 0, 1, \dots, N$.
- ΕΜΠ $\hat{p}_n = \hat{p}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$=;

Άσκηση 1: ΕΜΠ από τ.δ. Διωνυμικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Διωνυμική(N, p).
- N: γνωστό, p: άγνωστη παράμετρος.
- $p_{X_i}(x; p) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}, x = 0, 1, \ldots, N.$
- ΕΜΠ $\hat{p}_n = \hat{p}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$=;
- Είναι η ΕΜΠ αμερόληπτη ;

Άσκηση 2: ΕΜΠ από τ.δ. Poisson

Άσκηση 2: ΕΜΠ από τ.δ. Poisson

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Poisson(λ).

Άσκηση 2: ΕΜΠ από τ.δ. Poisson

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Poisson(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.

Άσκηση 2: ΕΜΠ από τ.δ. Poisson

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Poisson(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.
- $p_{X_i}(x;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots.$

Άσκηση 2: ΕΜΠ από τ.δ. Poisson

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Poisson(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.
- $p_{X_i}(x;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots$.
- ΕΜΠ $\hat{\lambda}_n = \hat{\lambda}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$=;

Άσκηση 2: ΕΜΠ από τ.δ. Poisson

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Poisson(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.
- $p_{X_i}(x; \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots$.
- ΕΜΠ $\hat{\lambda}_n = \hat{\lambda}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$=;
- Είναι η ΕΜΠ αμερόληπτη ;

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από $\mathcal{N}(\mu, v)$.

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- $\mu, v = \sigma^2$: παράμετροι.

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- $\mu, v = \sigma^2$: παράμετροι.
- $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}, \; x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- $\mu, v = \sigma^2$: παράμετροι.
- $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}, \ x \in \mathbb{R}$.
- ΕΜΠ $\hat{\mu} =$; όταν v γνωστό.

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- $\mu, v = \sigma^2$: παράμετροι.
- $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}, \; x \in \mathbb{R}$.
- ΕΜΠ $\hat{\mu} =$; όταν v γνωστό.
- ΕΜΠ $\hat{v} =$; όταν μ γνωστό.

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- $\mu, v = \sigma^2$: παράμετροι.
- $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}, \ x \in \mathbb{R}$.
- ΕΜΠ $\hat{\mu} =$; όταν v γνωστό.
- ΕΜΠ $\hat{v} =$; όταν μ γνωστό.
- ΕΜΠ $(\hat{\mu}, \hat{v}) =$;

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- $\mu, v = \sigma^2$: παράμετροι.
- $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}, \ x \in \mathbb{R}$.
- ΕΜΠ $\hat{\mu} =$; όταν v γνωστό.
- ΕΜΠ $\hat{v} =$; όταν μ γνωστό.
- ΕΜΠ $(\hat{\mu}, \hat{v}) =$;
- Είναι οι ΕΜΠ αμερόληπτες ;

Άσκηση 4: ΕΜΠ από τ.δ. Εκθετικής

Άσκηση 4: ΕΜΠ από τ.δ. Εκθετικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Εκθετική(λ).

Άσκηση 4: ΕΜΠ από τ.δ. Εκθετικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Εκθετική(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.

Άσκηση 4: ΕΜΠ από τ.δ. Εκθετικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Εκθετική(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.
- $f_{X_i}(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$.

Άσκηση 4: ΕΜΠ από τ.δ. Εκθετικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Εκθετική(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.
- $f_{X_i}(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$.
- ΕΜΠ $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$=;

Άσκηση 4: ΕΜΠ από τ.δ. Εκθετικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Εκθετική(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.
- $f_{X_i}(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$.
- ΕΜΠ $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$=;
- Είναι η ΕΜΠ αμερόληπτη ;

Άσκηση 5: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη Ι

Άσκηση 5: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη Ι

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη$([a, b])$.

Άσκηση 5: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη I

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη$([a, b])$.
- a, b: άγνωστες παράμετροι.

Άσκηση 5: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη I

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη($[a, b]$).
- a, b: άγνωστες παράμετροι.
- $f_{X_i}(x; a, b) = \frac{1}{b-a}, x \in [a, b]$.

Άσκηση 5: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη I

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη($[a, b]$).
- a, b: άγνωστες παράμετροι.
- $f_{X_i}(x; a, b) = \frac{1}{b-a}, x \in [a, b]$.
- ΕΜΠ $(\hat{a}, \hat{b})$=;

Άσκηση 5: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη I

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη($[a, b]$).
- a, b: άγνωστες παράμετροι.
- $f_{X_i}(x; a, b) = \frac{1}{b-a}, x \in [a, b]$.
- ΕΜΠ $(\hat{a}, \hat{b})$=;
- Είναι η ΕΜΠ αμερόληπτη ;

Άσκηση 6: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη ΙΙ

Άσκηση 6: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη ΙΙ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη($[\theta - 1/2, \theta + 1/2]$).

Άσκηση 6: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη II

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη$([\theta - 1/2, \theta + 1/2])$.
- θ: άγνωστη παράμετρος.

Άσκηση 6: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη ΙΙ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη$([\theta - 1/2, \theta + 1/2])$.
- θ: άγνωστη παράμετρος.
- $f_{X_i}(x;\theta) = 1, x \in [\theta - 1/2, \theta + 1/2]$.

Άσκηση 6: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη ΙΙ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη$([\theta - 1/2, \theta + 1/2])$.
- θ: άγνωστη παράμετρος.
- $f_{X_i}(x;\theta) = 1, x \in [\theta - 1/2, \theta + 1/2]$.
- ΕΜΠ $\hat{\theta}$=;

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  9.1 Κλασσική Στατιστική Συμπερασματολογία

- Ασκήσεις:

  Οι ασκήσεις που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν έγιναν στην τάξη.

Τέλος Διαλέξεως

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών 2015. Αντώνιος Οικονόμου. «Πιθανότητες και Στατιστική. Εισαγωγή στη Στατιστική Συμπερασματολογία». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI46/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.