Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 5:
Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σπп μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A}(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A}(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Ειδική περίπτωση:

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A}(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Ειδική περίπτωση:
$$f_{X|X\in A}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P(X\in A)}, & \text{αν } x \in A, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Θεώρημα ολικής πιθανότητας

Θεώρημα ολικής πιθανότητας

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας**
  X συνεχής τ.μ. και
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας**
  X συνεχής τ.μ. και
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$f_X(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) f_{X|A_i}(x).$$

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t},\ t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t},\ t > 0$.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}, \; t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}, \; t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}, \ t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}, \ t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) =$;

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$
  (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) =$; ;

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) = ;\ ;\ ; = e^{-\lambda x} = P(T > x)$.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t},\ t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t},\ t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$
  (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) = ;\ ;\ ; = e^{-\lambda x} = P(T > x)$.
- $f_{X|A}(x) = f_T(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) = ;\ ;\ ; = e^{-\lambda x} = P(T > x)$.
- $f_{X|A}(x) = f_T(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$.
- Αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής: Ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι ανεξάρτητος από την ηλικία.

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τέταρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τέταρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)=$;

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σπτ. $f_Y(y)=$; ;

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)=$; ; ;

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)$= ; ; ;
- $P(Y \leq 10) =$;

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)$= ; ; ;
- $P(Y \leq 10) =$; ;

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)$= ; ; ;
- $P(Y \leq 10) =$; ; ;

Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.

Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- Για κάθε προκαθορισμένο y με $f_Y(y) > 0$ η δεσμευμένη σππ. της X δοθέντος ότι $Y = y$ ορίζεται ως

Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- Για κάθε προκαθορισμένο y με $f_Y(y) > 0$ η δεσμευμένη σππ. της X δοθέντος ότι $Y = y$ ορίζεται ως

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- Για κάθε προκαθορισμένο y με $f_Y(y) > 0$ η δεσμευμένη σππ. της X δοθέντος ότι $Y = y$ ορίζεται ως
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$
- Ιδιότητες της δεσμευμένης σππ:

Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- Για κάθε προκαθορισμένο y με $f_Y(y) > 0$ η δεσμευμένη σππ. της X δοθέντος ότι $Y = y$ ορίζεται ως
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$
- Ιδιότητες της δεσμευμένης σππ:
  1. $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).

Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- Για κάθε προκαθορισμένο y με $f_Y(y) > 0$ η δεσμευμένη σππ. της X δοθέντος ότι $Y = y$ ορίζεται ως

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

- Ιδιότητες της δεσμευμένης σππ:
  1. $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx = 1$ (κανονικοποίηση).

Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- Για κάθε προκαθορισμένο y με $f_Y(y) > 0$ η δεσμευμένη σππ. της X δοθέντος ότι $Y = y$ ορίζεται ως
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$
- Ιδιότητες της δεσμευμένης σππ:
  1. $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Διαισθητικά:
$P(x \leq X \leq x + \delta x | y \leq Y \leq y + \delta y) \simeq f_{X|Y}(x|y)\delta x$.

Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- Για κάθε προκαθορισμένο y με $f_Y(y) > 0$ η δεσμευμένη σππ. της X δοθέντος ότι $Y = y$ ορίζεται ως
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$
- Ιδιότητες της δεσμευμένης σππ:
  1. $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Διαισθητικά:
$P(x \leq X \leq x + \delta x | y \leq Y \leq y + \delta y) \simeq f_{X|Y}(x|y)\delta x$.
για μικρά δx, δy.

Παράδειγμα

Παράδειγμα

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.

Παράδειγμα

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.

Παράδειγμα

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- Y: Μέτρηση της ταχύτητας.

Παράδειγμα

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- Y: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.

Παράδειγμα

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- Y: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- Σππ. $f_{X,Y}(x, y)=$;

Παράδειγμα

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- Y: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- Σππ. $f_{X,Y}(x, y)=$; ;

Παράδειγμα

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- Y: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- Σππ. $f_{X,Y}(x,y)=$; ; ;

Παράδειγμα

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- Y: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- Σππ. $f_{X,Y}(x,y)=$; ; ;
- $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x)$.

Παράδειγμα

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- Y: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- Σπτ. $f_{X,Y}(x,y)=$; ; ;
- $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x)$.
- Άρα
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{50} e^{-\frac{x}{50}} \frac{10}{\sqrt{2\pi} x} e^{-\frac{50(y-x)^2}{x^2}}, \ x > 0.$$

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σππ.

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σππ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σππ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)$$

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σππ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σππ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_{Y|X}(y|x) dx.$$

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σππ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_{Y|X}(y|x) dx.$$

- **Κανόνας του Bayes:**

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σππ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_{Y|X}(y|x)dx.$$

- **Κανόνας του Bayes:**

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_X(x)f_{Y|X}(y|x)}{f_Y(y)}.$$

Δεσμευμένη μέση τιμή

Δεσμευμένη μέση τιμή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ., A ενδεχόμενο.

Δεσμευμένη μέση τιμή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ., A ενδεχόμενο.
- Ορισμός δεσμ. μέσης τιμής της X ως προς γεγονός A:

Δεσμευμένη μέση τιμή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ., A ενδεχόμενο.
- Ορισμός δεσμ. μέσης τιμής της X ως προς γεγονός A:
$$E[X|A] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|A}(x) dx.$$

Δεσμευμένη μέση τιμή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ., A ενδεχόμενο.
- Ορισμός δεσμ. μέσης τιμής της X ως προς γεγονός A:
$$E[X|A] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|A}(x) dx.$$
- Ορισμός δεσμ. μέσης τιμής της X ως προς $Y = y$:

Δεσμευμένη μέση τιμή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ., A ενδεχόμενο.
- Ορισμός δεσμ. μέσης τιμής της X ως προς γεγονός A:
$$E[X|A] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|A}(x) dx.$$
- Ορισμός δεσμ. μέσης τιμής της X ως προς $Y = y$:
$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx.$$

Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ., A ενδεχόμενο.

Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ., A ενδεχόμενο.
- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο A με $P(A) > 0$:

Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ., A ενδεχόμενο.
- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο A με $P(A) > 0$:

$$E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx.$$

Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ., A ενδεχόμενο.
- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο A με $P(A) > 0$:

$$E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx.$$

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. δεδομένου ότι $Y = y$ με $p_Y(y) > 0$:

Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ., A ενδεχόμενο.
- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο A με $P(A) > 0$:

$$E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx.$$

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. δεδομένου ότι $Y = y$ με $p_Y(y) > 0$:

$$E[g(X)|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y) dx.$$

Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:

Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα: $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) E[X|A_i].$$

Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

  $$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) E[X|A_i].$$

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με άλλη τ.μ.:

Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) E[X|A_i].$$

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με άλλη τ.μ.:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) E[X|Y = y] dy.$$

Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) $\kappa\alpha\iota$ $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) E[X|A_i].$$

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με άλλη τ.μ.:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) E[X|Y = y] dy.$$

Παράδειγμα

Παράδειγμα

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]$.

Παράδειγμα

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1].$
- $c =$;

Παράδειγμα

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y), \; x \in [0, 1], \; y \in [0, 1]$.
- $c = \; ; \; ;$

Παράδειγμα

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]$.
- $c =$; ; ;

Παράδειγμα

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1].$
- $c =$; ; ;
- $f_Y(y)$;

Παράδειγμα

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]$.
- $c =$; ; ;
- $f_Y(y)$; ;

Παράδειγμα

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y), \; x \in [0, 1], \; y \in [0, 1]$.
- $c =$; ; ;
- $f_Y(y)$; ; ;

Παράδειγμα

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]$.
- $c =$; ; ;
- $f_Y(y)$; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$;

Παράδειγμα

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y), \; x \in [0, 1], \; y \in [0, 1]$.
- $c =$; ; ;
- $f_Y(y)$; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$; ;

Παράδειγμα

- (X,Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x,y) = c(2x+y),\ x \in [0,1],\ y \in [0,1]$.
- $c =$; ; ;
- $f_Y(y)$; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$; ; ;

Παράδειγμα

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y), \; x \in [0, 1], \; y \in [0, 1]$.
- $c =$; ; ;
- $f_Y(y)$; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$; ; ;
- $E[X|Y = y] =$;

Παράδειγμα

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y), \; x \in [0, 1], \; y \in [0, 1]$.
- $c =$; ; ;
- $f_Y(y)$; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$; ; ;
- $E[X|Y = y] =$; ;

Παράδειγμα

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]$.
- $c =$; ; ;
- $f_Y(y)$; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$; ; ;
- $E[X|Y = y] =$; ; ;

Παράδειγμα

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]$.
- $c =$; ; ;
- $f_Y(y)$; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$; ; ;
- $E[X|Y = y] =$; ; ;
- $E[X] =$;

Παράδειγμα

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]$.
- $c =$; ; ;
- $f_Y(y)$; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$; ; ;
- $E[X|Y = y] =$; ; ;
- $E[X] =$; ;

Παράδειγμα

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]$.
- $c =$; ; ;
- $f_Y(y)$; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$; ; ;
- $E[X|Y = y] =$; ; ;
- $E[X] =$; ; ;

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $f_X(x)$, $f_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σππ.

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $f_X(x)$, $f_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σππ.
- $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σππ.

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $f_X(x)$, $f_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σππ.
- $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σππ.
- X, Y ανεξάρτητες όταν

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $f_X(x)$, $f_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σππ.
- $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σππ.
- X, Y ανεξάρτητες όταν

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$

- Ισοδύναμα: X, Y ανεξάρτητες όταν

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } f_Y(y) > 0.$$

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $f_X(x)$, $f_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σππ.
- $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σππ.
- X, Y ανεξάρτητες όταν
$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$
- Ισοδύναμα: X, Y ανεξάρτητες όταν
$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } f_Y(y) > 0.$$

ή

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $f_X(x)$, $f_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σππ.
- $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σππ.
- X, Y ανεξάρτητες όταν

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$

- Ισοδύναμα: X, Y ανεξάρτητες όταν

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } f_Y(y) > 0.$$

ή

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } f_X(x) > 0.$$

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $f_X(x)$, $f_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σππ.
- $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σππ.
- X, Y ανεξάρτητες όταν
$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$
- Ισοδύναμα: X, Y ανεξάρτητες όταν
$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } f_Y(y) > 0.$$
ή
$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } f_X(x) > 0.$$
- Διαισθητικά: X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$ Η γνώση της τιμής της μιας δεν αλλάζει τις πιθανότητες των τιμών της άλλης.

- X και Y τ.μ.

- X και Y τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.

- X και Y τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

Ανεξαρτησία, συναρτ. τ.μ., μέση τιμή, διασπορά

- X και Y τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow f(X), g(Y)$ ανεξάρτητες.

Ανεξαρτησία, συναρτ. τ.μ., μέση τιμή, διασπορά

- X και Y τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow f(X), g(Y)$ ανεξάρτητες.
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$.

Ανεξαρτησία, συναρτ. τ.μ., μέση τιμή, διασπορά

- X και Y τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow f(X), g(Y)$ ανεξάρτητες.
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$.
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$.

Ανεξαρτησία, συναρτ. τ.μ., μέση τιμή, διασπορά

- X και Y τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow f(X), g(Y)$ ανεξάρτητες.
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$.
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
- Καμιά αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει.

- X και Y τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow f(X), g(Y)$ ανεξάρτητες.
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$.
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
- Καμιά αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει.
- Χαρακτηρισμός ανεξαρτησίας:

Ανεξαρτησία, συναρτ. τ.μ., μέση τιμή, διασπορά

- X και Y τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow f(X), g(Y)$ ανεξάρτητες.
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$.
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
- Καμιά αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει.
- Χαρακτηρισμός ανεξαρτησίας:
  X, Y ανεξάρτητες
  $\Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$
  για όλα τα ενδεχόμενα A και B.

Άσκηση 1

Άσκηση 1

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(xy + x + y + 1),\ x \in [0, 1], y \in [0, 1].$

Άσκηση 1

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(xy + x + y + 1), \; x \in [0, 1], y \in [0, 1].$
- X, Y ανεξάρτητες ;

Άσκηση 1

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(xy + x + y + 1),\ x \in [0, 1], y \in [0, 1].$
- X, Y ανεξάρτητες ; ;

Άσκηση 1

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x,y) = c(xy + x + y + 1),\ x \in [0,1], y \in [0,1]$.
- X, Y ανεξάρτητες ; ; ;

Άσκηση 2

Άσκηση 2

- (X,Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x,y) = c(x+y),\ x \in [0,1], y \in [0,1]$.

Άσκηση 2

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y) = c(x + y),\ x \in [0, 1], y \in [0, 1]$.
- X, Y ανεξάρτητες ;

Άσκηση 2

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y) = c(x + y),\ x \in [0, 1], y \in [0, 1]$.
- X, Y ανεξάρτητες ; ;

Άσκηση 2

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y) = c(x + y),\ x \in [0, 1], y \in [0, 1]$.
- X, Y ανεξάρτητες ; ; ;

Άσκηση 3

Άσκηση 3

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y) = c(xy + x + y + 1),\ 0 \leq x \leq y \leq 1.$

Άσκηση 3

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(xy + x + y + 1), \ 0 \leq x \leq y \leq 1.$
- X, Y ανεξάρτητες ;

Άσκηση 3

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(xy + x + y + 1),\ 0 \leq x \leq y \leq 1.$
- X, Y ανεξάρτητες ; ;

Άσκηση 3

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(xy + x + y + 1), \ 0 \leq x \leq y \leq 1.$
- X, Y ανεξάρτητες ; ; ;

Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.

Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.

Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τέταρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.

Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- $E[Y]=$;

Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τέταρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- $E[Y] =$; ;

Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τέταρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- $E[Y]=$; ; ;

Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τέταρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- $E[Y]=$; ; ;

Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.

Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.

Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- Y: Μέτρηση της ταχύτητας.

Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- Y: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.

Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- Y: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- $E[Y]=$;

Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- Y: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- $E[Y]=$; ;

Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- Y: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- $E[Y]=$; ; ;

Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- X: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- Y: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- $E[Y]=$; ; ;

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  3.5 Δέσμευση
  3.6 Ο συνεχής κανόνας του Bayes
  3.7 Σύνοψη και συζήτηση

- Ασκήσεις:

  3.5 Προβλήματα 19, 20, 21, 23, 28
  3.6 -
  3.7 -

Τέλος Διαλέξεως

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.