

Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 2:

Δεσμευμένη πιθανότητα και στοχαστική ανεξαρτησία

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικών και Καποδιστριακών
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου ζαριού.

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου ζαριού.
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}) =$

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου ζαριού.
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}) = 3/6=1/2$

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου ζαριού.
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}) = 3/6=1/2$
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα} | \text{αποτέλεσμα} \leq 3) =$

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου ζαριού.
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}) = 3/6=1/2$
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα} | \text{αποτέλεσμα} \leq 3) = 1/3$.

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου ζαριού.
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}) = 3/6=1/2$
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα} | \text{αποτέλεσμα} \leq 3) = 1/3.$
- Πληροφορία \Rightarrow Περιορισμός του δ.χ.

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου ζαριού.
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}) = 3/6=1/2$
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα} | \text{αποτέλεσμα} \leq 3) = 1/3$.
- Πληροφορία \Rightarrow Περιορισμός του δ.χ.
- $$P(A|B) = \frac{\text{πλήθος δειγματικών σημείων στο } AB}{\text{πλήθος δειγματικών σημείων στο } B}$$
$$= \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Ορισμός

- (Ω, \mathcal{A}, P) χώρος πιθανότητας.

- (Ω, \mathcal{A}, P) χώρος πιθανότητας.
- Ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$ με $P(B) > 0$.

- (Ω, \mathcal{A}, P) χώρος πιθανότητας.
- Ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$ με $P(B) > 0$.
- Για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ ορίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα του A δεδομένου του B :

- (Ω, \mathcal{A}, P) χώρος πιθανότητας.
- Ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$ με $P(B) > 0$.
- Για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ ορίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα του A δεδομένου του B :

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

- (Ω, \mathcal{A}, P) χώρος πιθανότητας.
- Ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$ με $P(B) > 0$.
- Για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ ορίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα του A δεδομένου του B :

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

- Προσοχή! $P(A|B) \neq P(B|A)$.

Νέο μέτρο πιθανότητας

Νέο μέτρο πιθανότητας

- Για κάθε B , η $P_B(A) = P(A|B)$ ορίζει ένα νέο μέτρο πιθανότητας:

Νέο μέτρο πιθανότητας

- Για κάθε B , η $P_B(A) = P(A|B)$ ορίζει ένα νέο μέτρο πιθανότητας:
- $P(A|B) \geq 0$. (μη-αρνητικότητα)

Νέο μέτρο πιθανότητας

- Για κάθε B , η $P_B(A) = P(A|B)$ ορίζει ένα νέο μέτρο πιθανότητας:
- $P(A|B) \geq 0$. (μη-αρνητικότητα)
- $P(\Omega|B) = 1$. (κανονικοποίηση)

Νέο μέτρο πιθανότητας

- Για κάθε B , η $P_B(A) = P(A|B)$ ορίζει ένα νέο μέτρο πιθανότητας:
- $P(A|B) \geq 0$. (μη-αρνητικότητα)
- $P(\Omega|B) = 1$. (κανονικοποίηση)
- A_1, A_2, \dots ξένα ανά δύο
 $\Rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$. (σ-προσθετικότητα)

Νέο μέτρο πιθανότητας

- Για κάθε B , η $P_B(A) = P(A|B)$ ορίζει ένα νέο μέτρο πιθανότητας:
- $P(A|B) \geq 0$. (μη-αρνητικότητα)
- $P(\Omega|B) = 1$. (κανονικοποίηση)
- A_1, A_2, \dots ξένα ανά δύο
 $\Rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$. (σ-προσθετικότητα)
- Όλες οι ιδιότητες της πιθανότητας ισχύουν και για τη δεσμευμένη πιθανότητα.

Παράδειγμα 1

Παράδειγμα 1

- Πείραμα τύχης: Επιλογή ατόμου από πεπερασμένο πληθυσμό. Καταγραφή ύψους - νούμερου παπουτσιού.

Παράδειγμα 1

- Πείραμα τύχης: Επιλογή ατόμου από πεπερασμένο πληθυσμό. Καταγραφή ύψους - νούμερου παπουτσιού.
- $P(\text{νούμερο παπουτσιού} = 45 | \text{ύψος} = 1.80)$

Παράδειγμα 1

- Πείραμα τύχης: Επιλογή ατόμου από πεπερασμένο πληθυσμό. Καταγραφή ύψους - νούμερου παπουτσιού.
- $P(\text{νούμερο παπουτσιού} = 45 | \text{ύψος} = 1.80) \dots$

Παράδειγμα 1

- Πείραμα τύχης: Επιλογή ατόμου από πεπερασμένο πληθυσμό. Καταγραφή ύψους - νούμερου παπουτσιού.
- $P(\text{νούμερο παπουτσιού} = 45 | \text{ύψος} = 1.80) \dots$

$$= \frac{\text{πλήθος ατόμων με νούμερο 45, ύψος 1.80}}{\text{πλήθος ατόμων με ύψος 1.80}}.$$

Παράδειγμα 2

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες”}) = 50\%$.
 $P(\text{να δώσει “Πληροφορική”}) = 50\%$.

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες”}) = 50\%$.
 $P(\text{να δώσει “Πληροφορική”}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πιθανότητες”}) = 60\%$.
 $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πληροφορική”}) = 80\%$.

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες”}) = 50\%$.
 $P(\text{να δώσει “Πληροφορική”}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πιθανότητες”}) = 60\%$.
 $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πληροφορική”}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες”}) = 50\%$.
 $P(\text{να δώσει “Πληροφορική”}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πιθανότητες”}) = 60\%$.
 $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πληροφορική”}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες” και να περάσει}) =$;

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες”}) = 50\%$.
 $P(\text{να δώσει “Πληροφορική”}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πιθανότητες”}) = 60\%$.
 $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πληροφορική”}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες” και να περάσει}) = ; ;$

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες”}) = 50\%$.
 $P(\text{να δώσει “Πληροφορική”}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πιθανότητες”}) = 60\%$.
 $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πληροφορική”}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες” και να περάσει}) = ; ; ;$

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες”}) = 50\%$.
 $P(\text{να δώσει “Πληροφορική”}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πιθανότητες”}) = 60\%$.
 $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πληροφορική”}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες” και να περάσει}) = ; ; ;$
 $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες”}) = 50\%$.
 $P(\text{να δώσει “Πληροφορική”}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πιθανότητες”}) = 60\%$.
 $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πληροφορική”}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες” και να περάσει}) = ; ; ;$
 $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.
- $P(\text{να περάσει}) = ;$

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες”}) = 50\%$.
 $P(\text{να δώσει “Πληροφορική”}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πιθανότητες”}) = 60\%$.
 $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πληροφορική”}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες” και να περάσει}) = ; ; ;$
 $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.
- $P(\text{να περάσει}) = ; ;$

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες”}) = 50\%$.
 $P(\text{να δώσει “Πληροφορική”}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πιθανότητες”}) = 60\%$.
 $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πληροφορική”}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες” και να περάσει}) = ; ; ;$
 $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.
- $P(\text{να περάσει}) = ; ; ;$

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες”}) = 50\%$.
 $P(\text{να δώσει “Πληροφορική”}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πιθανότητες”}) = 60\%$.
 $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πληροφορική”}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες” και να περάσει}) = ; ; ;$
 $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.
- $P(\text{να περάσει}) = ; ; ; = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.8 = 0.7$.

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες”}) = 50\%$.
 $P(\text{να δώσει “Πληροφορική”}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πιθανότητες”}) = 60\%$.
 $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πληροφορική”}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες” και να περάσει}) = ; ; ;$
 $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.
- $P(\text{να περάσει}) = ; ; ; = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.8 = 0.7$.
- $P(\text{έδωσε “Πιθανότητες”}|\text{πέρασε}) = ;$

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες”}) = 50\%$.
 $P(\text{να δώσει “Πληροφορική”}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πιθανότητες”}) = 60\%$.
 $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πληροφορική”}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες” και να περάσει}) = ; ; ;$
 $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.
- $P(\text{να περάσει}) = ; ; ; = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.8 = 0.7$.
- $P(\text{έδωσε “Πιθανότητες”}|\text{πέρασε}) = ; ;$

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες”}) = 50\%$.
 $P(\text{να δώσει “Πληροφορική”}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πιθανότητες”}) = 60\%$.
 $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πληροφορική”}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες” και να περάσει}) = ; ; ;$
 $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.
- $P(\text{να περάσει}) = ; ; ; = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.8 = 0.7$.
- $P(\text{έδωσε “Πιθανότητες”}|\text{πέρασε}) = ; ; ;$

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα “Πιθανότητες” ή “Πληροφορική”.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες”}) = 50\%$.
 $P(\text{να δώσει “Πληροφορική”}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πιθανότητες”}) = 60\%$.
 $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει “Πληροφορική”}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει “Πιθανότητες” και να περάσει}) = ; ; ;$
 $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.
- $P(\text{να περάσει}) = ; ; ; = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.8 = 0.7$.
- $P(\text{έδωσε “Πιθανότητες”}|\text{πέρασε}) = ; ; ; = \frac{0.3}{0.7} \simeq 0.429$.

Βασικά υπολογιστικά θεωρήματα

Βασικά υπολογιστικά θεωρήματα

- Πολλαπλασιαστικός Νόμος:

Βασικά υπολογιστικά θεωρήματα

- Πολλαπλασιαστικός Νόμος:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

Βασικά υπολογιστικά θεωρήματα

- Πολλαπλασιαστικός Νόμος:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

- Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

Βασικά υπολογιστικά θεωρήματα

- Πολλαπλασιαστικός Νόμος:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

- Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

A_1, A_2, \dots ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i).$$

Βασικά υπολογιστικά θεωρήματα

- Πολλαπλασιαστικός Νόμος:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

- Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

A_1, A_2, \dots ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i).$$

- Κανόνας του Bayes:

Βασικά υπολογιστικά θεωρήματα

- Πολλαπλασιαστικός Νόμος:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

- Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

A_1, A_2, \dots ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i).$$

- Κανόνας του Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

Άσκηση 1: Αιματολογικό τεστ

Άσκηση 1: Αιματολογικό τεστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.

Άσκηση 1: Αιματολογικό τεστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.

Άσκηση 1: Αιματολογικό τεστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τεστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.

Άσκηση 1: Αιματολογικό τεστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τεστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.
- $P(\text{αληθές αρνητ.}) = P(\text{αρνητ. τεστ}|\text{υγιής}) = 0.95$.

Άσκηση 1: Αιματολογικό τεστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τεστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.
- $P(\text{αληθές αρνητ.}) = P(\text{αρνητ. τεστ}|\text{υγιής}) = 0.95$.
- Είναι διαγνωστικά αξιόπιστο το τεστ;

Άσκηση 1: Αιματολογικό τεστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τεστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.
- $P(\text{αληθές αρνητ.}) = P(\text{αρνητ. τεστ}|\text{υγιής}) = 0.95$.
- Είναι διαγνωστικά αξιόπιστο το τεστ;
- Πρέπει να υπολογίσω την

Άσκηση 1: Αιματολογικό τεστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τεστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.
- $P(\text{αληθές αρνητ.}) = P(\text{αρνητ. τεστ}|\text{υγιής}) = 0.95$.
- Είναι διαγνωστικά αξιόπιστο το τεστ;
- Πρέπει να υπολογίσω την $P(\text{ασθενής}|\text{θετικό τεστ})$.

Άσκηση 1: Αιματολογικό τεστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τεστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.
- $P(\text{αληθές αρνητ.}) = P(\text{αρνητ. τεστ}|\text{υγιής}) = 0.95$.
- Είναι διαγνωστικά αξιόπιστο το τεστ;
- Πρέπει να υπολογίσω την $P(\text{ασθενής}|\text{θετικό τεστ})$.
- ...

Άσκηση 1: Αιματολογικό τεστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τεστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.
- $P(\text{αληθές αρνητ.}) = P(\text{αρνητ. τεστ}|\text{υγιής}) = 0.95$.
- Είναι διαγνωστικά αξιόπιστο το τεστ;
- Πρέπει να υπολογίσω την $P(\text{ασθενής}|\text{θετικό τεστ})$.
- ...
- $P(\text{ασθενής}|\text{θετικό τεστ}) = 0.0187 \simeq 2\%$!

Άσκηση 1: Αιματολογικό τεστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τεστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.
- $P(\text{αληθές αρνητ.}) = P(\text{αρνητ. τεστ}|\text{υγιής}) = 0.95$.
- Είναι διαγνωστικά αξιόπιστο το τεστ;
- Πρέπει να υπολογίσω την $P(\text{ασθενής}|\text{θετικό τεστ})$.
- ...
- $P(\text{ασθενής}|\text{θετικό τεστ}) = 0.0187 \simeq 2\%$!
- Είναι σημαντικό σε σπάνιες ασθένειες η $P(\text{αληθές αρνητ.})$ να είναι πολύ μεγάλη.

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- $P(\text{έχει 2 κορίτσια} | \text{έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι}) = ?$

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- $P(\text{έχει 2 κορίτσια} | \text{έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι}) = ; ;$

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- $P(\text{έχει 2 κορίτσια} | \text{έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι}) = ; ; ;$

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- $P(\text{έχει 2 κορίτσια} | \text{έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι}) = ; ; ;$
 $= \frac{1}{3}.$

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- $P(\text{έχει 2 κορίτσια} | \text{έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι}) = ; ; ;$
 $= \frac{1}{3}.$
- $P(\text{έχει 2 κορίτσια} | \text{το πρωτότοκο είναι κορίτσι}) = ;$

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- $P(\text{έχει 2 κορίτσια} | \text{έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι}) = ; ; ;$
 $= \frac{1}{3}.$
- $P(\text{έχει 2 κορίτσια} | \text{το πρωτότοκο είναι κορίτσι}) = ; ;$

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- $P(\text{έχει 2 κορίτσια} | \text{έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι}) = ; ; ;$
 $= \frac{1}{3}.$
- $P(\text{έχει 2 κορίτσια} | \text{το πρωτότοκο είναι κορίτσι}) = ; ; ;$

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- $P(\text{έχει 2 κορίτσια} | \text{έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι}) = ; ; ;$
 $= \frac{1}{3}$.
- $P(\text{έχει 2 κορίτσια} | \text{το πρωτότοκο είναι κορίτσι}) = ; ; ;$
 $= \frac{1}{2}$.

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
1 σωστή (Σ) και $m - 1$ λάθος (Λ).

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
1 σωστή (Σ) και $m - 1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
1 σωστή (Σ) και $m - 1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1 - p$.

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
1 σωστή (Σ) και $m - 1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1 - p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
1 σωστή (Σ) και $m - 1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1 - p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) =;$

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
1 σωστή (Σ) και $m - 1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1 - p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) = ; ;$

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
1 σωστή (Σ) και $m - 1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1 - p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) = ; ; ;$

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
1 σωστή (Σ) και $m - 1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1 - p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) = ; ; ;$
 $= p \times 1 + (1 - p) \times \frac{1}{m}$

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
1 σωστή (Σ) και $m - 1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1 - p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) = ; ; ;$
 $= p \times 1 + (1 - p) \times \frac{1}{m}$
- $p_2 = P(\text{γνώριζε την } \Sigma | \text{απάντησε την } \Sigma) = ;$

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
1 σωστή (Σ) και $m - 1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1 - p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) = ; ; ;$
 $= p \times 1 + (1 - p) \times \frac{1}{m}$
- $p_2 = P(\text{γνώριζε την } \Sigma | \text{απάντησε την } \Sigma) = ; ;$

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
1 σωστή (Σ) και $m - 1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1 - p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) = ; ; ;$
 $= p \times 1 + (1 - p) \times \frac{1}{m}$
- $p_2 = P(\text{γνώριζε την } \Sigma | \text{απάντησε την } \Sigma) = ; ; ;$

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
1 σωστή (Σ) και $m - 1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1 - p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) = ; ; ;$
 $= p \times 1 + (1 - p) \times \frac{1}{m}$
- $p_2 = P(\text{γνώριζε την } \Sigma | \text{απάντησε την } \Sigma) = ; ; ;$
 $= \frac{p \times 1}{p \times 1 + (1 - p) \times \frac{1}{m}} = \frac{mp}{(m-1)p+1}$.

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους:

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους:
Κόκκινη-Κόκκινη, Κόκκινη-Μαύρη, Μαύρη-Μαύρη.

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους:
Κόκκινη-Κόκκινη, Κόκκινη-Μαύρη, Μαύρη-Μαύρη.
- Επιλέγεται μία στην τύχη.

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους: Κόκκινη-Κόκκινη, Κόκκινη-Μαύρη, Μαύρη-Μαύρη.
- Επιλέγεται μία στην τύχη.
- Εμφανίζεται η μια πλευρά της στην τύχη.

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους: Κόκκινη-Κόκκινη, Κόκκινη-Μαύρη, Μαύρη-Μαύρη.
- Επιλέγεται μία στην τύχη.
- Εμφανίζεται η μια πλευρά της στην τύχη.
- $P(\text{άλλη πλευρά μπλέ} | \text{εμφανίστηκε πλευρά μπλε}) = ;$

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους: Κόκκινη-Κόκκινη, Κόκκινη-Μαύρη, Μαύρη-Μαύρη.
- Επιλέγεται μία στην τύχη.
- Εμφανίζεται η μια πλευρά της στην τύχη.
- $P(\text{άλλη πλευρά μπλέ} | \text{εμφανίστηκε πλευρά μπλε}) = ; ;$

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους: Κόκκινη-Κόκκινη, Κόκκινη-Μαύρη, Μαύρη-Μαύρη.
- Επιλέγεται μία στην τύχη.
- Εμφανίζεται η μια πλευρά της στην τύχη.
- $P(\text{άλλη πλευρά μπλέ} | \text{εμφανίστηκε πλευρά μπλε}) = ; ; ;$

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους: Κόκκινη-Κόκκινη, Κόκκινη-Μαύρη, Μαύρη-Μαύρη.
- Επιλέγεται μία στην τύχη.
- Εμφανίζεται η μια πλευρά της στην τύχη.
- $P(\text{άλλη πλευρά μπλέ} | \text{εμφανίστηκε πλευρά μπλε}) = ; ; ;$
 $= \frac{2}{3}$.

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

- 1.3 Δεσμευμένη Πιθανότητα

- 1.4 Θεώρημα Συνολικής Πιθανότητας και ο Κανόνας του Bayes

- Ασκήσεις:

- 1.3 Προβλήματα 14, 17

- 1.4 Προβλήματα 19, 21, 22

Τέλος Διαλέξεως

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών 2015. Αντώνιος Οικονόμου. «Πιθανότητες και Στατιστική. Δεσμευμένη πιθανότητα και στοχαστική ανεξαρτησία». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<http://opencourses.uoa.gr/courses/DI46/>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
 - το Σημείωμα Αδειοδότησης
 - τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
 - το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)
- μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.