Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 1:
Βασικές έννοιες και αξιωματική θεμελίωση των πιθανοτήτων

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο $A \to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο $A \to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο A $\to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:
  1. $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο A. (μη-αρνητικότητα)

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο $A \to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:
  1. $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο A. (μη-αρνητικότητα)
  2. $P(\Omega) = 1$. (κανονικοποίηση)

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο A $\to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:
  1. $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο A. (μη-αρνητικότητα)
  2. $P(\Omega) = 1$. (κανονικοποίηση)
  3. $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο $\Rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. (σ-προσθετικότητα)

Βασικές ιδιότητες

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0.$

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n)$
   $= \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots$
   $+(-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$.

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n)$
$= \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots$
$+(-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$.
5. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n)$
   $= \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots$
   $+ (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$.
5. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
6. $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n)$
   $= \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots$
   $+(-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$.
5. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
6. $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.
7. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \ldots \Rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n)$
$= \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots$
$+(-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$.
5. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
6. $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.
7. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \ldots \Rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.
8. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots \Rightarrow P(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.

Διακριτός χώρος πιθανοτήτων

Διακριτός χώρος πιθανοτήτων

- Αν ο δ.χ. Ω είναι αριθμήσιμος τότε παίρνουμε $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Διακριτός χώρος πιθανοτήτων

- Αν ο δ.χ. Ω είναι αριθμήσιμος τότε παίρνουμε $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Τότε, αρκεί να καθορίσουμε τα $P(\{s_i\}) = P(s_i)$ για κάθε μονοσύνολο $\{s_i\}$.

Διακριτός χώρος πιθανοτήτων

- Αν ο δ.χ. Ω είναι αριθμήσιμος τότε παίρνουμε $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Τότε, αρκεί να καθορίσουμε τα $P(\{s_i\}) = P(s_i)$ για κάθε μονοσύνολο $\{s_i\}$.
- Κατόπιν για οποιοδήποτε ενδεχόμενο $\{s_1, s_2, \ldots\}$ θέτουμε $P(\{s_1, s_2, \ldots\}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(s_i)$.

Ομοιόμορφος διακριτός χώρος πιθανοτήτων

Ομοιόμορφος διακριτός χώρος πιθανοτήτων

- Αν ο δ.χ. Ω είναι πεπερασμένος, $|\Omega| = n$, και τα δειγματικά σημεία είναι ισοπίθανα τότε αναγκαστικά

$$P(\{s_i\}) = P(s_i) = 1/n$$

για κάθε μονοσύνολο $\{s_i\}$.

Ομοιόμορφος διακριτός χώρος πιθανοτήτων

- Αν ο δ.χ. Ω είναι πεπερασμένος, $|\Omega| = n$, και τα δειγματικά σημεία είναι ισοπίθανα τότε αναγκαστικά

$$P(\{s_i\}) = P(s_i) = 1/n$$

  για κάθε μονοσύνολο $\{s_i\}$.

- Τότε για κάθε ενδεχόμενο A,

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος στοιχείων του } A}{n}.$$

Ομοιόμορφος διακριτός χώρος πιθανοτήτων

- Αν ο δ.χ. Ω είναι πεπερασμένος, $|\Omega| = n$, και τα δειγματικά σημεία είναι ισοπίθανα τότε αναγκαστικά

$$P(\{s_i\}) = P(s_i) = 1/n$$

για κάθε μονοσύνολο $\{s_i\}$.

- Τότε για κάθε ενδεχόμενο A,

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος στοιχείων του } A}{n}.$$

- Πιθανότητα = Ποσοστό = Ευνοϊκές / Δυνατές.

Ομοιόμορφος διακριτός χώρος πιθανοτήτων

- Αν ο δ.χ. Ω είναι πεπερασμένος, $|\Omega| = n$, και τα δειγματικά σημεία είναι ισοπίθανα τότε αναγκαστικά

$$P(\{s_i\}) = P(s_i) = 1/n$$

  για κάθε μονοσύνολο $\{s_i\}$.
- Τότε για κάθε ενδεχόμενο A,

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος στοιχείων του } A}{n}.$$

- Πιθανότητα = Ποσοστό = Ευνοϊκές / Δυνατές.
- Ομοιόμορφος διακριτός χώρος πιθανοτήτων $\leftrightarrow$ Κλασική πιθανότητα.

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),
  $\Omega_3 = \{AAAA, AAAK, AAKA, AAKK, \ldots, KKKK\}$ (σειρά γέννησης).

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),
  $\Omega_3 = \{AAAA, AAAK, AAKA, AAKK, \ldots, KKKK\}$ (σειρά γέννησης).
- Καταλληλότερος δ.χ.;

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),
  $\Omega_3 = \{AAAA, AAAK, AAKA, AAKK, \ldots, KKKK\}$
  (σειρά γέννησης).
- Καταλληλότερος δ.χ.;
- Καταλληλότερος δ.χ. είναι αυτός που έχει ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Καταλληλότερος δ.χ. : ;

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),
  $\Omega_3 = \{AAAA, AAAK, AAKA, AAKK, \ldots, KKKK\}$ (σειρά γέννησης).
- Καταλληλότερος δ.χ.;
- Καταλληλότερος δ.χ. είναι αυτός που έχει ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Καταλληλότερος δ.χ. : ; ;

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),
  $\Omega_3 = \{AAAA, AAAK, AAKA, AAKK, \ldots, KKKK\}$ (σειρά γέννησης).
- Καταλληλότερος δ.χ.;
- Καταλληλότερος δ.χ. είναι αυτός που έχει ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Καταλληλότερος δ.χ. : ; ; ;

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),
  $\Omega_3 = \{AAAA, AAAK, AAKA, AAKK, \ldots, KKKK\}$ (σειρά γέννησης).
- Καταλληλότερος δ.χ.;
- Καταλληλότερος δ.χ. είναι αυτός που έχει ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Καταλληλότερος δ.χ. : ; ; ; Ω_3

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),
  $\Omega_3 = \{AAAA, AAAK, AAKA, AAKK, \ldots, KKKK\}$
  (σειρά γέννησης).
- Καταλληλότερος δ.χ.;
- Καταλληλότερος δ.χ. είναι αυτός που έχει ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Καταλληλότερος δ.χ. : ; ; ; Ω_3
- $P(4-0) = \frac{1}{8}$, $P(3-1) = \frac{1}{2}$, $P(2-2) = \frac{3}{8}$.

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

- Τρεις φίλοι πάνε για μπύρες.

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

- Τρεις φίλοι πάνε για μπύρες.
- Ρίχνουν δίκαιο νόμισμα.

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

- Τρεις φίλοι πάνε για μπύρες.
- Ρίχνουν δίκαιο νόμισμα.
- Όποιος φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα από τους άλλους κερνάει, αλλιώς ο καθένας πληρώνει τη μπύρα του.

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

- Τρεις φίλοι πάνε για μπύρες.
- Ρίχνουν δίκαιο νόμισμα.
- Όποιος φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα από τους άλλους κερνάει, αλλιώς ο καθένας πληρώνει τη μπύρα του.
- $P(\text{Κάποιος κερνάει}) =;$

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

- Τρεις φίλοι πάνε για μπύρες.
- Ρίχνουν δίκαιο νόμισμα.
- Όποιος φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα από τους άλλους κερνάει, αλλιώς ο καθένας πληρώνει τη μπύρα του.
- $P(\text{Κάποιος κερνάει}) =;\ ;$

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

- Τρεις φίλοι πάνε για μπύρες.
- Ρίχνουν δίκαιο νόμισμα.
- Όποιος φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα από τους άλλους κερνάει, αλλιώς ο καθένας πληρώνει τη μπύρα του.
- $P(\text{Κάποιος κερνάει}) =; \; ; \; ;$

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

- Τρεις φίλοι πάνε για μπύρες.
- Ρίχνουν δίκαιο νόμισμα.
- Όποιος φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα από τους άλλους κερνάει, αλλιώς ο καθένας πληρώνει τη μπύρα του.
- $P(\text{Κάποιος κερνάει}) =; \; ; \; ; = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Άσκηση 2: Παιχνίδι Chuck-a-luck

Άσκηση 2: Παιχνίδι Chuck-a-luck

- Ένας παίκτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.

Άσκηση 2: Παιχνίδι Chuck-a-luck

- Ένας παίκτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.
- Ρίχνονται 3 ζάρια.

Άσκηση 2: Παιχνίδι Chuck-a-luck

- Ένας παίκτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.
- Ρίχνονται 3 ζάρια.
- Ο παίκτης κερδίζει αν εμφανιστεί η ζαριά που στοιχημάτισε τουλάχιστον μια φορά.

Άσκηση 2: Παιχνίδι Chuck-a-luck

- Ένας παίχτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.
- Ρίχνονται 3 ζάρια.
- Ο παίκτης κερδίζει αν εμφανιστεί η ζαριά που στοιχημάτισε τουλάχιστον μια φορά.
- $P(\text{Κερδίζει ο παίκτης})=;$

Άσκηση 2: Παιχνίδι Chuck-a-luck

- Ένας παίκτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.
- Ρίχνονται 3 ζάρια.
- Ο παίκτης κερδίζει αν εμφανιστεί η ζαριά που στοιχημάτισε τουλάχιστον μια φορά.
- P(Κερδίζει ο παίκτης)=; ;

Άσκηση 2: Παιχνίδι Chuck-a-luck

- Ένας παίκτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.
- Ρίχνονται 3 ζάρια.
- Ο παίκτης κερδίζει αν εμφανιστεί η ζαριά που στοιχημάτισε τουλάχιστον μια φορά.
- P(Κερδίζει ο παίκτης)=; ; ;

Άσκηση 2: Παιχνίδι Chuck-a-luck

- Ένας παίκτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.
- Ρίχνονται 3 ζάρια.
- Ο παίκτης κερδίζει αν εμφανιστεί η ζαριά που στοιχημάτισε τουλάχιστον μια φορά.
- $P(\text{Κερδίζει ο παίκτης})=;\ ;\ ;$
  $= 3\frac{1}{6} - 3\frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} = \frac{91}{216} \simeq 42\%.$

Άσκηση 3: Επιλογή αριθμού από 1 ως n - Διαιρ;

Άσκηση 3: Επιλογή αριθμού από 1 ως n - Διαιρ;

- Επιλογή αριθμού από το 1 ως το n.

Άσκηση 3: Επιλογή αριθμού από 1 ως n - Διαιρ;

- Επιλογή αριθμού από το 1 ως το n.
- $P($διαιρείται με το 6, το 10 ή το 15$) =$;

Άσκηση 3: Επιλογή αριθμού από 1 ως n - Διαιρ;

- Επιλογή αριθμού από το 1 ως το n.
- P(διαιρείται με το 6, το 10 ή το 15) $=$; ;

Άσκηση 3: Επιλογή αριθμού από 1 ως n - Διαιρ;

- Επιλογή αριθμού από το 1 ως το n.
- P(διαιρείται με το 6, το 10 ή το 15) = ; ; ;

Άσκηση 3: Επιλογή αριθμού από 1 ως n - Διαιρ;

- Επιλογή αριθμού από το 1 ως το n.
- P(διαιρείται με το 6, το 10 ή το 15) $=$; ; ;
  $= \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + \lfloor \frac{n}{10} \rfloor + \lfloor \frac{n}{15} \rfloor - \lfloor \frac{n}{30} \rfloor - \lfloor \frac{n}{30} \rfloor - \lfloor \frac{n}{30} \rfloor + \lfloor \frac{n}{30} \rfloor$.

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- $P(\text{Μήκος χορδής } \geq \text{Πλευρά τριγώνου}) =;$

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- $P(\text{Μήκος χορδής} \geq \text{Πλευρά τριγώνου}) =;\ ;$

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- $P(\text{Μήκος χορδής } \geq \text{Πλευρά τριγώνου}) =; \; ; \; ;$

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- P(Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου) $=$; ; ;
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- P(Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου) $=;\ ;\ ;$
- Πρέπει να αποσαφηνιστεί η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- P(Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου) $=$; ; ;
- Πρέπει να αποσαφηνιστεί η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- $P(\text{Μήκος χορδής } \geq \text{Πλευρά τριγώνου}) =;\ ;\ ;$
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα $=$;

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- $P(\text{Μήκος χορδής } \geq \text{Πλευρά τριγώνου}) =; \; ; \; ;$
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα $= \; ; \; ;$

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- $P($Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου$) =;\ ;\ ;$
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα $=\ ;\ ;\ ;$

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- $P(\text{Μήκος χορδής} \geq \text{Πλευρά τριγώνου}) =; ; ;$
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα $= ; ; ; = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- P(Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου) $=$; ; ;
- Πρέπει να αποσαφηνιστεί η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα $=$; ; ; $= \frac{1}{2}$.
- Περ. 2: Πιθανότητα $=$;

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- P(Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου) =; ; ;
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα = ; ; ; $= \frac{1}{2}$.
- Περ. 2: Πιθανότητα =; ;

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- $P($Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου$) =$; ; ;
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα $=$; ; ; $= \frac{1}{2}$.
- Περ. 2: Πιθανότητα $=$; ; ;

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- P(Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου) $=;\ ;\ ;$
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα $= ;\ ;\ ; = \frac{1}{2}$.
- Περ. 2: Πιθανότητα $=;\ ;\ ; = \frac{1}{3}$.

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,n),(2,1),(2,2),\ldots,(n,n)\}$.

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;
  $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;
  $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,n),(2,1),(2,2),\ldots,(n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος $=$; ; ; $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος $=$; ; ; $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \dots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος $=$; ; ;
  $= \{(1,1), (1,2), \dots, (1,n), (2,1), (2,2), \dots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος $=$; ; ; $= \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,n),(2,1),(2,2),\ldots,(n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;
$= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \dots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος $=$; ; ; $= \{(1,1), (1,2), \dots, (1,n), (2,1), (2,2), \dots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X + Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \dots, 2n$

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος $=$; ; ; $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X + Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \ldots, 2n$;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος $=$; ; ; $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X + Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \ldots, 2n$; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;
  $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X + Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \ldots, 2n$; ;
  $= \frac{1+2+\cdots+m-1}{n^2}$, $m = 2, 3, \ldots, n+1$

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ; $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X + Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \ldots, 2n$; ; $= \frac{1+2+\cdots+m-1}{n^2}$, $m = 2, 3, \ldots, n+1$ $= \frac{1+2+\cdots+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(2n-m+1)}{n^2}$, $m = n+2, \ldots, 2n$

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ; $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X+Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \ldots, 2n$; ; $= \frac{1+2+\cdots+m-1}{n^2},\ m = 2, 3, \ldots, n+1$ $= \frac{1+2+\cdots+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(2n-m+1)}{n^2},\ m = n+2, \ldots, 2n$
- $P(|X-Y| \leq m)=$;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;
  $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X + Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \ldots, 2n$; ;
  $= \frac{1+2+\cdots+m-1}{n^2}$, $m = 2, 3, \ldots, n+1$
  $= \frac{1+2+\cdots+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(2n-m+1)}{n^2}$, $m = n+2, \ldots, 2n$
- $P(|X - Y| \leq m)=$; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος $=$; ; ;
$= \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,n),(2,1),(2,2),\ldots,(n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X+Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \ldots, 2n$; ;
$= \frac{1+2+\cdots+m-1}{n^2}$, $m = 2, 3, \ldots, n+1$
$= \frac{1+2+\cdots+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(2n-m+1)}{n^2}$, $m = n+2, \ldots, 2n$
- $P(|X-Y| \leq m)=$; ; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;
  $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X + Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \ldots, 2n$; ;
  $= \frac{1+2+\cdots+m-1}{n^2}$, $m = 2, 3, \ldots, n+1$
  $= \frac{1+2+\cdots+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(2n-m+1)}{n^2}$, $m = n+2, \ldots, 2n$
- $P(|X - Y| \leq m)=$; ; ;
  $= \frac{n+2(n-1)+2(n-2)+2(n-3)+\cdots+2(n-m)}{n^2}$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  1.1 Σύνολα
  1.2 Μοντέλα Πιθανοτήτων

- Ασκήσεις:

  1.1 Πρόβλημα 2
  1.2 Προβλήματα 8, 9, 10, 11

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών 2015. Αντώνιος Οικονόμου. «Πιθανότητες και Στατιστική. Βασικές έννοιες και αξιωματική θεμελίωση των πιθανοτήτων». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
http://opencourses.uoa.gr/courses/DI46/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.