

5. ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ – ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

- Περιγράψουμε τον τρόπο *ανάπτυξης σε σειρά Fourier* ενός περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου.
- Ορίσουμε *το μετασχηματισμό Fourier* ενός μη περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου, ο οποίος παρέχει τη δυνατότητα μετάβασης από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας.
- Δώσουμε τη *φυσική σημασία* του αναπτύγματος σε σειρά Fourier και του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.
- Εφαρμόσουμε το παραπάνω ανάπτυγμα/μετασχηματισμό σε περιπτώσεις βασικών σημάτων διακριτού χρόνου.

- Θα αναφέρουμε *τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου*.
- Υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier μερικών βασικών συναρτήσεων.
- Θα περιγράψουμε τη λειτουργία της *δειγματοληψίας*.
- Θα ορίσουμε το *διακριτό μετασχηματισμό Fourier* και θα αναφέρουμε τις ιδιότητές του.
- Θα περιγράψουμε τον *ταχύ μετασχηματισμό Fourier*.
- Θα αναφέρουμε σημαντικές εφαρμογές του μετασχηματισμού Fourier.

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ - ΣΕΙΡΑ FOURIER

Υπάρχουν N το πλήθος διαφορετικά μιγαδικά εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου τα οποία σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύνολο, δηλαδή, είναι ανά δύο ορθογώνια.

$$\langle e^{jk\Omega_0 n}, e^{jm\Omega_0 n} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_0 n} = \begin{cases} N, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} = N \delta(k - m)$$

Τα περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου παριστάνονται με πεπερασμένα αθροίσματα.

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad \text{εξίσωση σύνθεσης}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \quad \text{εξίσωση ανάλυσης}$$

Το ζεύγος των εξισώσεων αυτών ορίζουν **τη σειρά Fourier διακριτού χρόνου** (*discrete time Fourier series* (DTFS)) του περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου $x(n)$. Οι συντελεστές a_k καλούνται συντελεστές Fourier ή όπως θα δούμε **φασματικές γραμμές**.

■ Παράδειγμα

Να βρεθεί η παράσταση σε σειρά Fourier του σήματος διακριτού χρόνου $x(n) = \sin(\Omega_0 n)$

Απάντηση

1) Το σήμα είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο N και $\Omega_0 = 2\pi/N$.

$$a_{kN+1} = \frac{1}{2j} \quad \text{και} \quad a_{kN-1} = -\frac{1}{2j} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2) Αν $2\pi/\Omega_0 = N/m$, δηλαδή, ρητός αριθμός, τότε $\Omega_0 = (2\pi m)/N$. Υποθέτουμε ότι τα m και N δεν έχουν κοινό παράγοντα έτσι το $x(n)$ έχει θεμελιώδη περίοδο ίση με N .

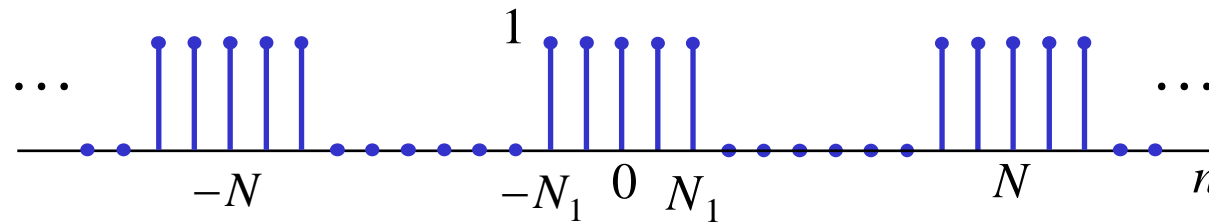
$$a_m = \frac{1}{2j}, \quad a_{-m} = -\frac{1}{2j} \quad \text{και} \quad a_k = 0 \quad \text{για την υπόλοιπη περίοδο}$$

3) Όταν το σήμα είναι μη περιοδικό δεν αναπτύσσεται σε σειρά Fourier διακριτού χρόνου.

■ Παράδειγμα

Να βρεθεί η παράσταση σε σειρά Fourier διακριτού χρόνου του περιοδικού ορθογώνιου κύματος

$$x(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & N_1 < |n| < N/2 \end{cases}$$



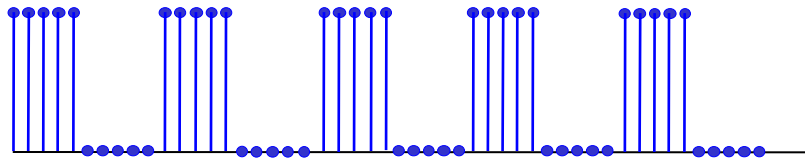
Απάντηση

$$N \cdot a_k = \frac{\sin \left[k \frac{2\pi}{N} \left(N_1 + \frac{1}{2} \right) \right]}{\sin \left(k \frac{2\pi}{2N} \right)}$$

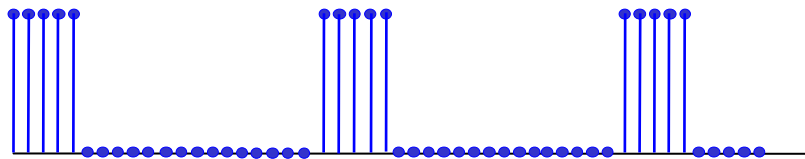
$$k = 1, 2, \dots, N-1 \text{ ή } k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

$$a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}$$

$$k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$



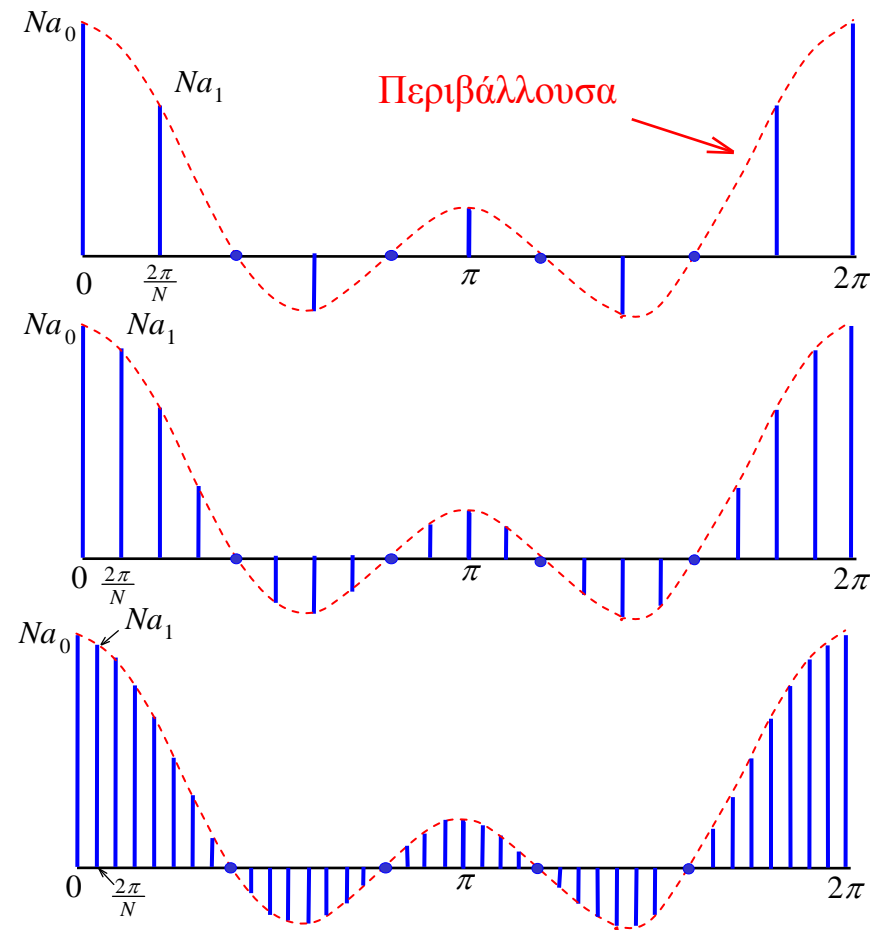
$N = 10$
 $N_1 = 2$



$N = 20$
 $N_1 = 2$



$N = 40$
 $N_1 = 2$



Το περιοδικό ορθογώνιο κύμα και το γινόμενο των συντελεστών της σειράς Fourier διακριτού χρόνου επί το πλήθος των δειγμάτων του περιοδικού ορθογώνιου κύματος για $N_1 = 2$ και $N = 10, 20$ και 40 .

Η συνάρτηση $\frac{\sin[(2N+1)(\Omega/2)]}{\sin(\Omega/2)}$ είναι η περιβάλλουσα των συντελεστών της σειράς

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Οι εξισώσεις σύνθεσης και ανάλυσης για το *μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου* (*discrete time Fourier transform* (DTFT))

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad \text{εξίσωση σύνθεσης}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \quad \text{εξίσωση ανάλυσης}$$

Η εξίσωση εκφράζει την ανάλυση του σήματος διακριτού χρόνου $x(n)$ σε εκθετικά σήματα $e^{j\Omega n}$ τα οποία εκτείνονται σε ένα συνεχές φάσμα κυκλικών συχνοτήτων Ω περιορισμένο στο διάστημα $0 \leq \Omega < 2\pi$.

Η συνάρτηση $X(\Omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου συχνά αναφέρεται και ως *φάσμα* του $x(n)$ γιατί περιέχει την πληροφορία πως το $x(n)$ συντίθεται από εκθετικά σήματα διαφορετικών συχνοτήτων.

Το φασματικό περιεχόμενο στο απειροστό διάστημα συχνοτήτων $[\Omega, \Omega + d\Omega]$ είναι $X(\Omega)$ και η συνεισφορά των συχνοτήτων $[\Omega, \Omega + d\Omega]$ έχει πλάτος $X(\Omega)(d\Omega/2\pi)$.

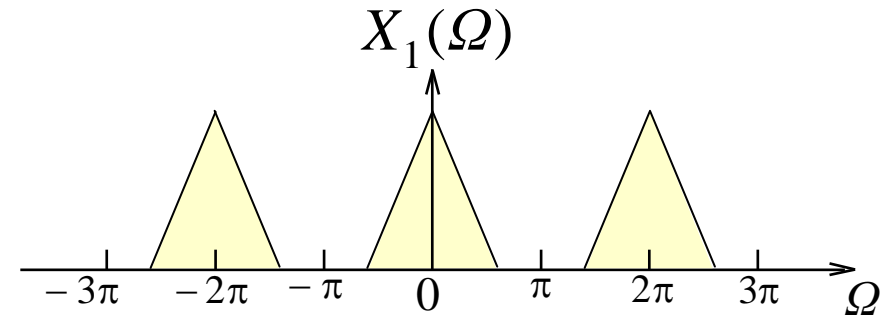
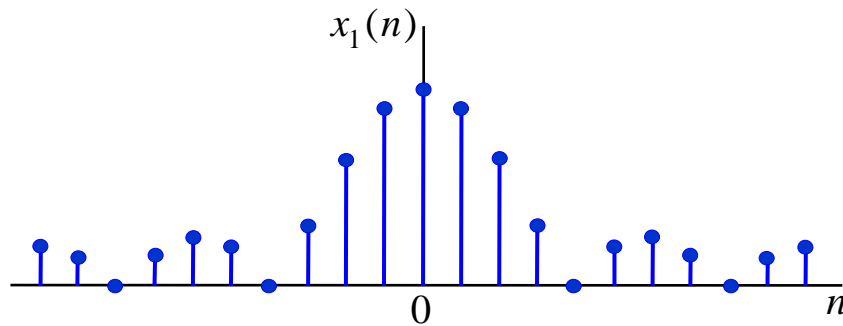
Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου έχει δύο διαφορές από το μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου οι οποίες οφείλονται στο γεγονός ότι τα εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου είναι περιοδικά με περίοδο 2π .

Ο $X(\Omega)$ είναι περιοδικός ενώ ο $X(\omega)$ όχι. Έτσι το ολοκλήρωμα στην εξίσωση σύνθεσης έχει πεπερασμένο διάστημα ολοκλήρωσης.

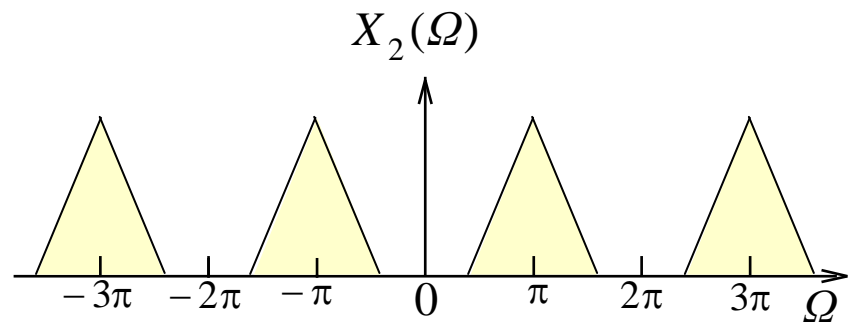
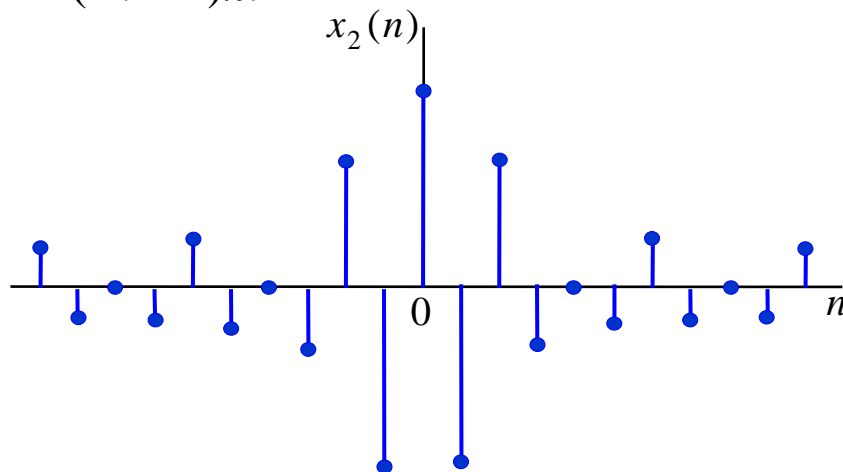
Στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου, οι χαμηλές συχνότητες περιγράφονται από διαστήματα μικρού εύρους κεντραρισμένα στην αρχή των συντεταγμένων, ενώ οι υψηλές συχνότητες είναι τοποθετημένες μακριά από την αρχή των αξόνων προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά του άξονα συχνοτήτων.

Στην περίπτωση του διακριτού χρόνου η περιοδικότητα του μετασχηματισμού Fourier επιβάλλει μία διαφορετική εικόνα. Οι χαμηλές συχνότητες αντιστοιχούν με διαστήματα γύρω από τη θέση $\Omega = 0$, ή λόγω της περιοδικότητας γύρω από τις θέσεις $\Omega = \pm 2k\pi$. Οι υψηλές συχνότητες τοποθετούνται κοντά σε περιοχές όπου $\Omega = \pm \pi$ ή $\Omega = \pm(2k + 1)\pi$.

Στην περίπτωση του διακριτού χρόνου η περιοδικότητα του μετασχηματισμού Fourier επιβάλλει μία διαφορετική εικόνα. Οι χαμηλές συχνότητες αντιστοιχούν με διαστήματα γύρω από τη θέση $\Omega = 0$, ή λόγω της περιοδικότητας γύρω από τις θέσεις $\Omega = \pm 2k\pi$.



Οι υψηλές συχνότητες τοποθετούνται κοντά σε περιοχές όπου $\Omega = \pm \pi$ ή $\Omega = \pm(2k + 1)\pi$.



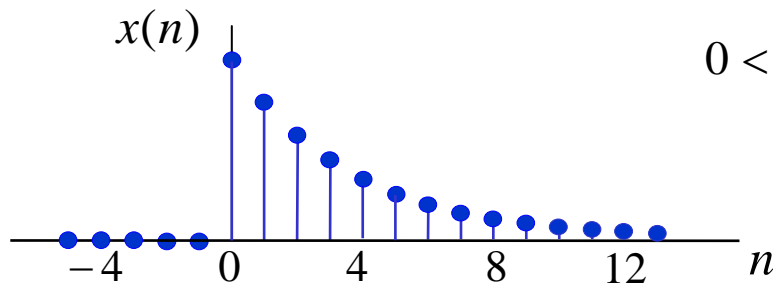
■ **Παράδειγμα**

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του αιτιατού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου

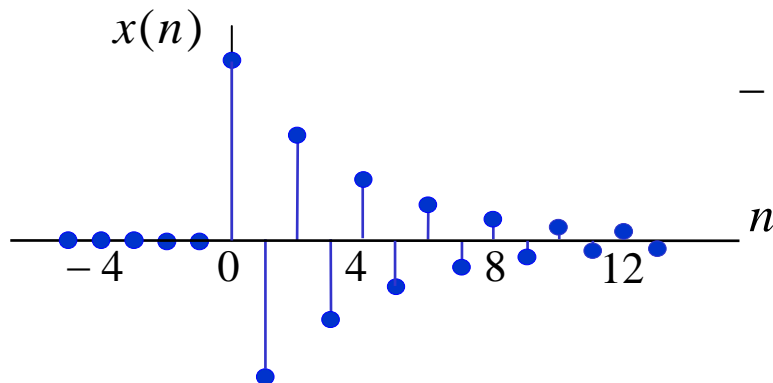
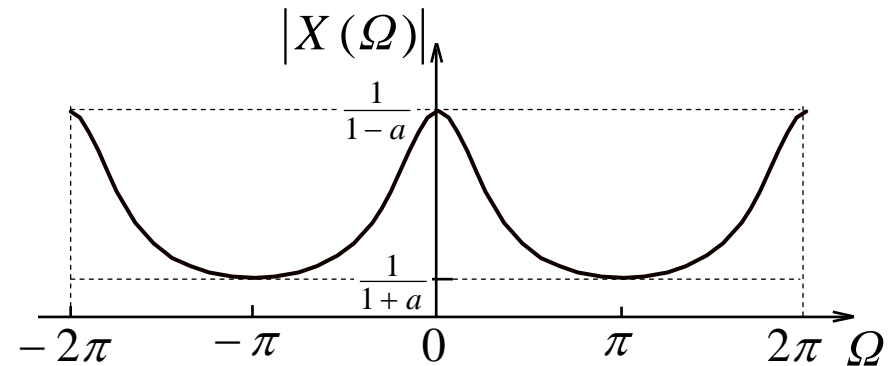
$$x(n) = a^n u(n) \quad |a| < 1 \quad a \in \mathbb{C}$$

Απάντηση

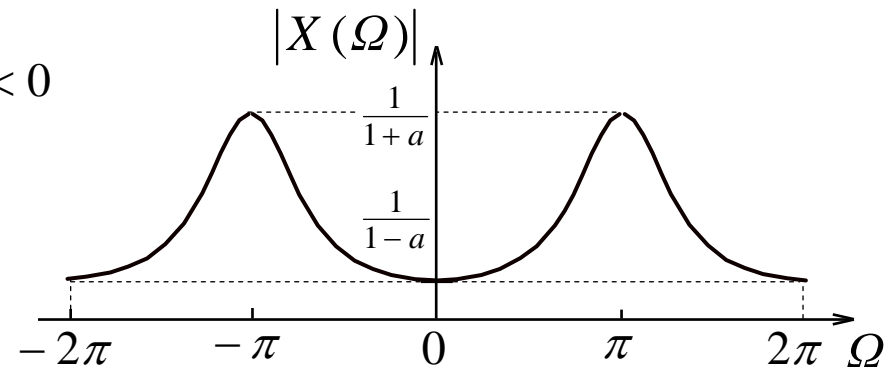
$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}}$$



$0 < a < 1$



$-1 < a < 0$



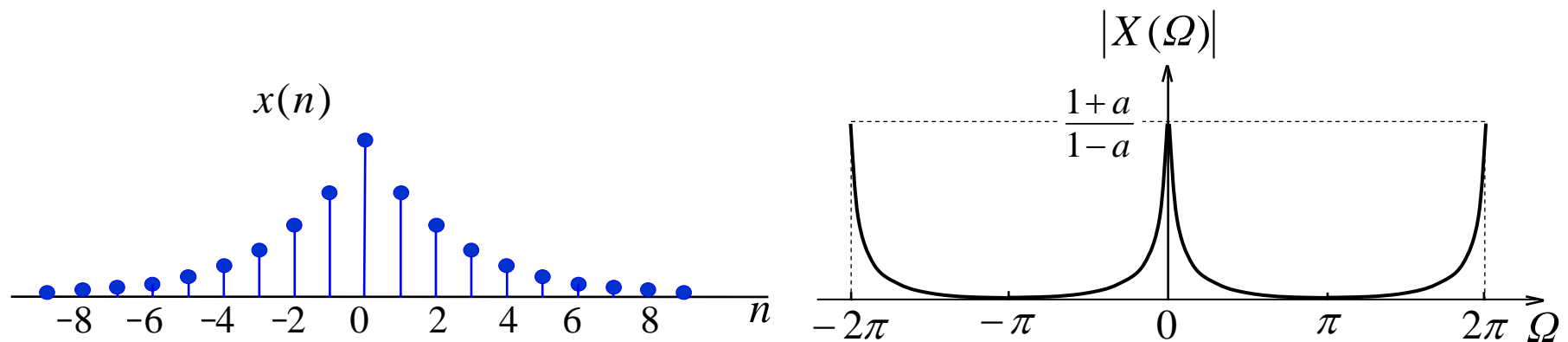
■ Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του αιτιατού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου

$$x(n) = a^{|n|}, \quad |a| < 1 \quad \text{και} \quad a \in \mathbb{R}$$

Απάντηση

$$X(\Omega) = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos(\Omega)}$$

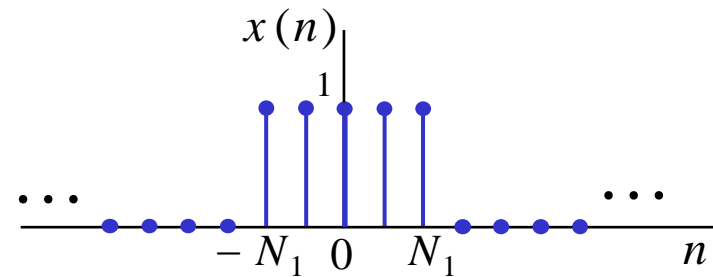


Η ακολουθία $x(n) = a^{|n|}$ όταν a είναι πραγματικός αριθμός < 1 και το φάσμα της.

■ Παράδειγμα

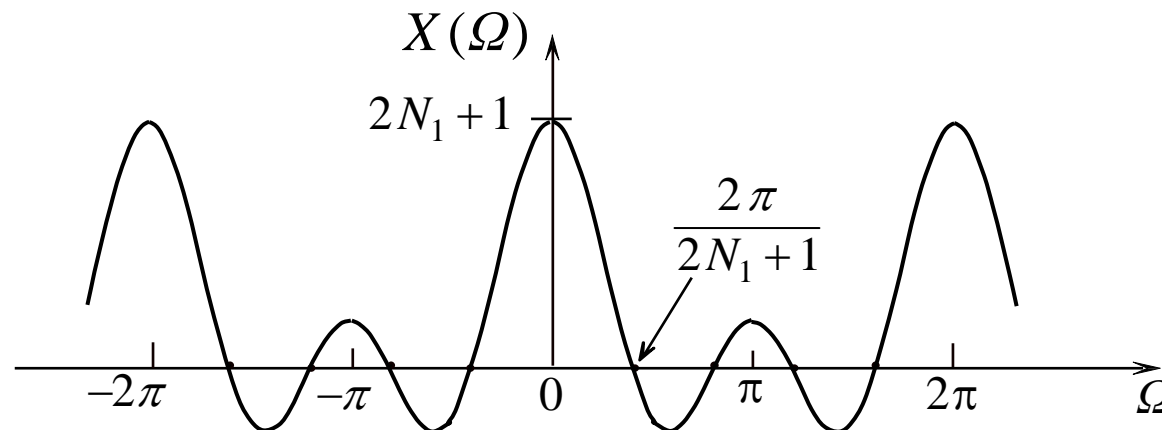
Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του τετραγωνικού παλμού διακριτού χρόνου

$$x(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$



Απάντηση

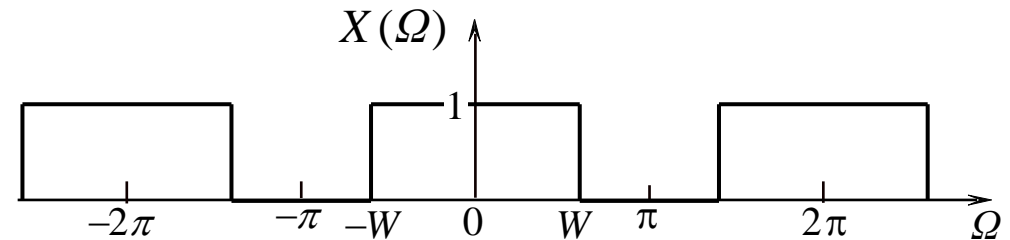
$$X(\Omega) = \frac{\sin[\Omega(N_1 + 1/2)]}{\sin[\Omega(1/2)]}$$



■ Παράδειγμα

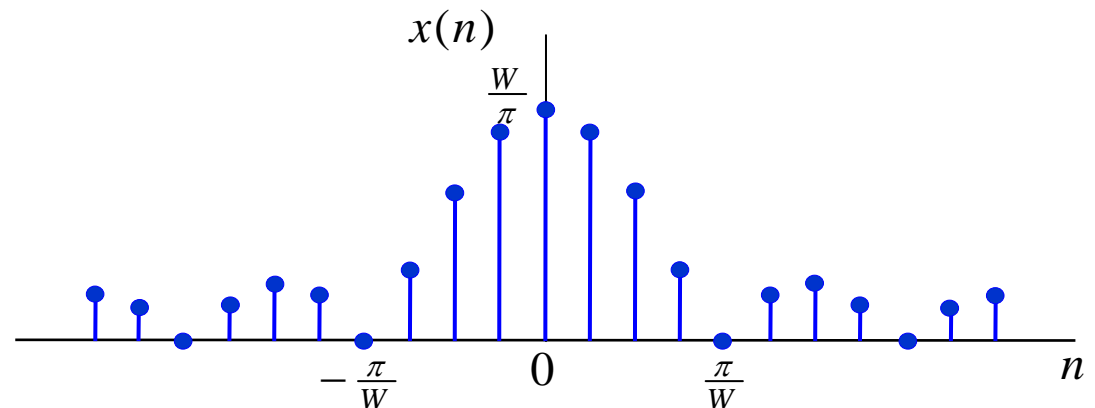
Να υπολογιστεί το σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$, του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι ορθογώνιο περιοδικό κύμα.

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq W \\ 0, & W < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$



Απάντηση

$$x(n) = \frac{\sin(Wn)}{\pi n}$$



Ιδιότητες του MF διακριτού χρόνου

Γραμμικότητα

$$a x_1(n) + b x_2(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} a X_1(\Omega) + b X_2(\Omega)$$

Χρονική μετατόπιση

$$x(n - n_0) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j\Omega n} X(\Omega)$$

Ολίσθηση συχνότητας

$$e^{j\Omega_0 n} x(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\Omega - \Omega_0)$$

Άθροισμα

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$$

Διαμόρφωση

$$x(n) \cdot y(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega - \theta) Y(\theta) d\theta$$

Συνέλιξη

$$x(n) * y(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\Omega) \cdot Y(\Omega)$$

Αποδεκάτιση

$$x_M(n) = x(Mn) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\Omega}{M} - \frac{2k\pi}{M}\right)$$

Διαφόριση στο πεδίο συχνότητας

$$(-j)^k n^k x(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{d^k X(\Omega)}{d\Omega^k}$$

Διαφορά

$$x(n) - x(n-1) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega)$$

Παρεμβολή

$$x_M(n) = x\left(\frac{n}{M}\right) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(M\Omega)$$

Θεώρημα Parseval

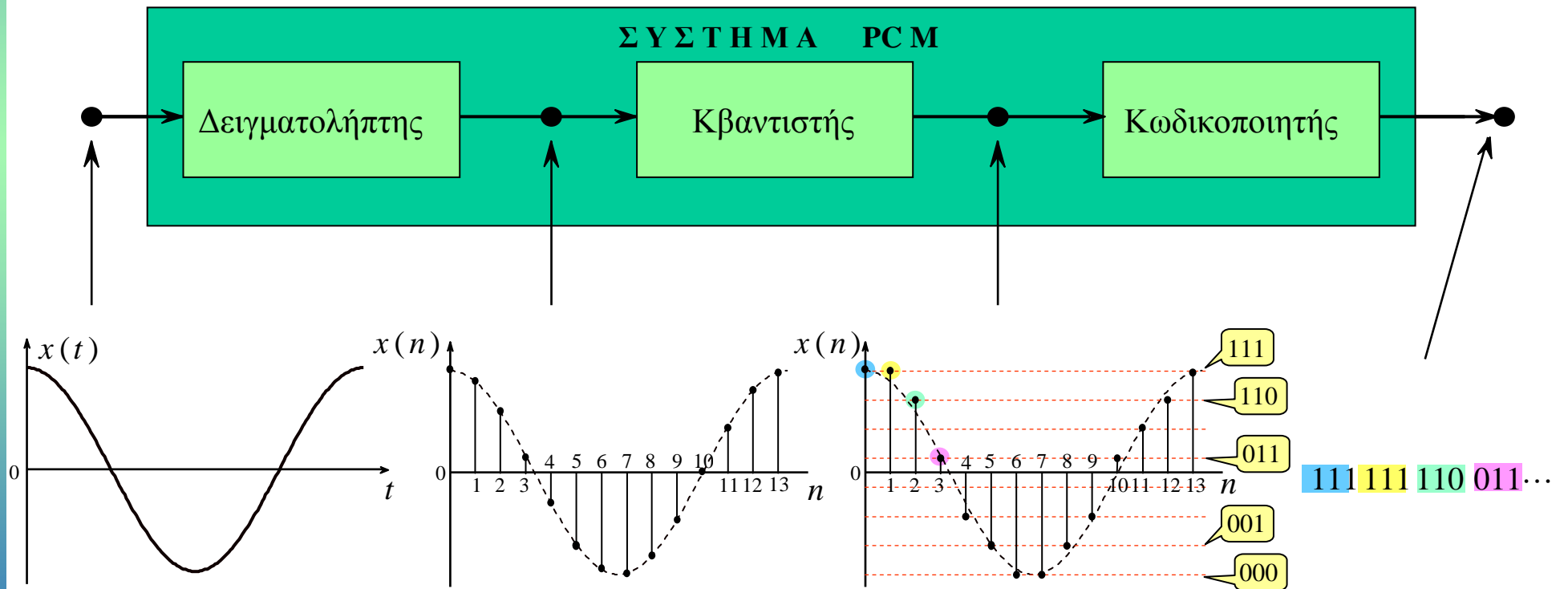
$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \xleftrightarrow{\text{DTFT}} E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Μετατροπή Σήματος από Αναλογικό σε Ψηφιακό

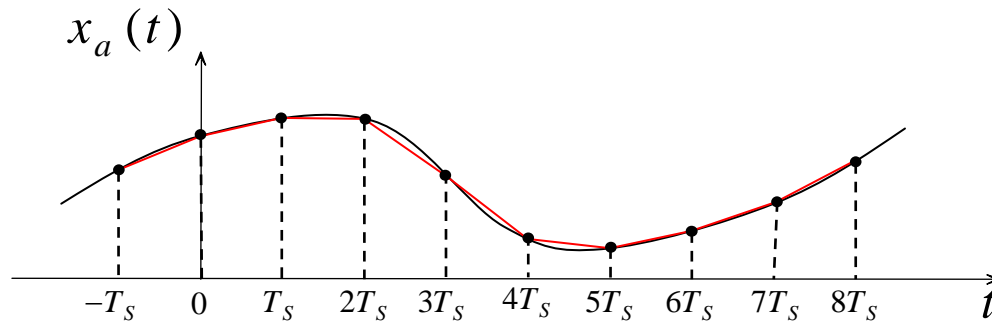
Τα περισσότερα σήματα που παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον είναι αναλογικά. Για να επεξεργαστούμε αναλογικά σήματα με ψηφιακά μέσα απαιτείται η μετατροπή αυτών σε ψηφιακή μορφή, δηλαδή, η μετατροπή τους σε ακολουθία αριθμών πεπερασμένης ακρίβειας.

Παλμοκωδική Διαμόρφωση (PCM)

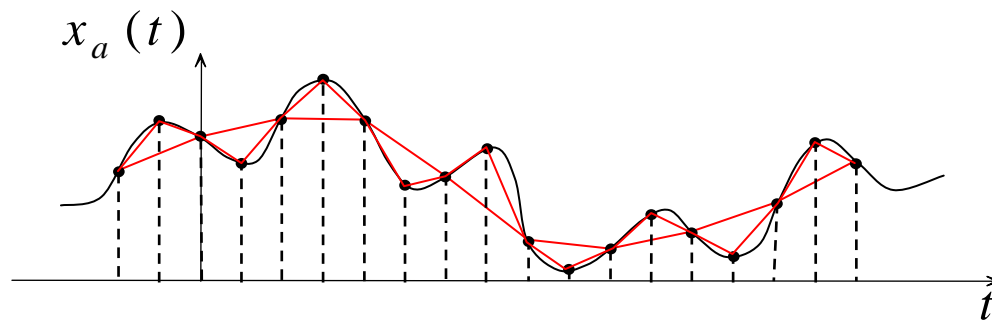
Η Παλμοκωδική διαμόρφωση (*Pulse Code Modulation* (PCM)) είναι το απλούστερο σχήμα κωδικοποίησης κυματομορφής. Ένας παλμοκωδικός διαμορφωτής παλμών αποτελείται από τρία βασικά μέρη: ένα *δειγματολήπτη*, έναν *κβαντιστή* και ένα *κωδικοποιητή*.



Δειγματοληψία αναλογικών σημάτων περιορισμένου εύρους-ζώνης



Το σήμα $x_a(t)$ είναι ένα αργά μεταβαλλόμενο σήμα, και το κύριο φασματικό περιεχόμενό του βρίσκεται στις χαμηλές συχνότητες



Το σήμα $x_a(t)$ είναι ένα σήμα με γρήγορες μεταβολές οι οποίες οφείλονται στην παρουσία συνιστωσών σε υψηλές συχνότητες

Είναι προφανές ότι η περίοδος δειγματοληψίας για το δεύτερο σήμα πρέπει να είναι σημαντικά μικρότερη.

Αναλογική και Ψηφιακή συχνότητα – Συχνότητα Δειγματοληψίας

Έστω $x_s(n)$ είναι η ακολουθία η οποία προέρχεται από τη δειγματοληψία του συνημιτονοειδούς αναλογικού σήματος $x_a(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ με περίοδο δειγματοληψίας T_s .

$$x_s(n) = x_a(nT_s) = A \cos(\omega nT_s + \theta) = A \cos(\omega T_s n + \theta)$$

Αν Ω_0 είναι η ψηφιακή κυκλική συχνότητα τότε $x_s(n) = A \cos(\Omega n + \theta)$. Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις του $x_s(n)$ έχουμε τις σχέσεις μεταξύ αναλογικών και ψηφιακών συχνοτήτων

$$\Omega = \omega \cdot T_s \quad \text{και} \quad F = \frac{f}{f_s}$$

Παρατηρούμε ότι η συχνότητα F είναι μία κανονικοποιημένη ή σχετική συχνότητα.

Η αναλογική συχνότητα f έχει μονάδα μέτρησης Hz ή c/sec ενώ η διακριτή F δεν έχει διαστάσεις. Επίσης η αναλογική κυκλική συχνότητα ω έχει μονάδα μέτρησης rad/sec ενώ η διακριτή Ω έχει μονάδα μέτρησης rad.

Για να προσδιοριστεί η ψηφιακή συχνότητα F όταν δίνεται η αναλογική συχνότητα f πρέπει να είναι γνωστή η συχνότητα δειγματοληψίας f_s .

Η απεικόνιση της απείρου εύρους περιοχής αναλογικών συχνοτήτων στην πεπερασμένου εύρους περιοχή ψηφιακών συχνοτήτων

Για τα συνημιτονοειδή σήματα συνεχούς χρόνου η περιοχή συχνοτήτων είναι

$$0 \leq \omega < \infty \quad \text{και} \quad 0 \leq f < \infty$$

Για τα συνημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου η περιοχή συχνοτήτων είναι

$$-\pi \leq \Omega < \pi \quad \text{και} \quad -\frac{1}{2} \leq F < \frac{1}{2}$$

Παρατηρούμε ότι η συχνότητα του συνημιτονοειδούς σήματος το οποίο δειγματοληπτούμε πρέπει να βρίσκεται στην περιοχή

$$-\frac{\pi}{T_s} = -\pi f_s \leq \omega < \pi f_s = \frac{\pi}{T_s} \quad \text{και} \quad -\frac{1}{2T_s} = -\frac{f_s}{2} \leq f < \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T_s}$$

Η περιοδική δειγματοληψία ενός αναλογικού σήματος συνεχούς χρόνου οδηγεί στην απεικόνιση της απείρου εύρους περιοχής των αναλογικών συχνοτήτων στην πεπερασμένη εύρους περιοχή ψηφιακών συχνοτήτων.

Η μέγιστη αναλογική συχνότητα που μπορεί να δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας f_s είναι

$$\omega_{\max} < \frac{\pi}{T_s} \quad \text{και} \quad f_{\max} < \frac{f_s}{2}$$

Θεώρημα δειγματοληψίας ή Θεώρημα του Shannon

Η συχνότητα f_s με την οποία λαμβάνονται τα δείγματα ενός αναλογικού σήματος, πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια από τη υψηλότερη αναλογική συχνότητα f_{\max} που περιέχεται στο σήμα, δηλαδή,

$$f_s \geq 2 \cdot f_{\max}$$

Για να μη χαθεί πληροφορία θα πρέπει να παίρνουμε τουλάχιστον δύο δείγματα ανά περίοδο της μεγαλύτερης συχνότητας του αναλογικού σήματος.

Ο συνεχούς χρόνου μετασχηματισμός Fourier (CTFT), $X_a(\omega)$, ή το φάσμα ενός αναλογικού σήματος $x_a(t)$ είναι

$$X_a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier είναι

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Αν το αναλογικό σήμα $x_a(t)$ δειγματοληπτηθεί με περίοδο δειγματοληψίας T_s παράγεται το σήμα διακριτού χρόνου.

$$x_s(n) \equiv x_a(n T_s)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT), $X_s(\Omega)$, του σήματος διακριτού χρόνου $x_s(n)$ είναι

$$X_s(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

Ο αντίστροφος διακριτού χρόνου μετασχηματισμός Fourier είναι

$$x_s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_s(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Δειγματοληψία και ανακατασκευή αναλογικών σημάτων στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο συχνοτήτων

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου $X_s(\Omega)$ του δειγματοληπτημένου $x_s(n)$ σήματος διακριτού χρόνου είναι ένα άθροισμα αντιγράφων του μετασχηματισμού Fourier $X_a(\omega)$ του αρχικού αναλογικού σήματος $x_a(t)$ μετατοπισμένων κατά $1/T_s$ και πολλαπλασιασμένων επίσης με $1/T_s$, δηλαδή,

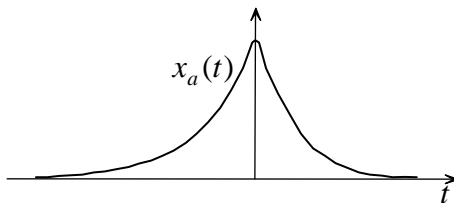
$$X_s(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega}{T_s} + k \frac{2\pi}{T_s}\right)$$

Δειγματοληψία και ανακατασκευή αναλογικών σημάτων στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο συχνοτήτων

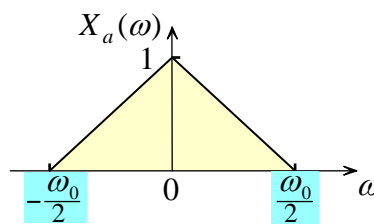
$$X_S(\Omega) = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega}{T_S} + k \frac{2\pi}{T_S}\right)$$

$$X_S(\omega T_S) = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\omega + k \frac{2\pi}{T_S}\right)$$

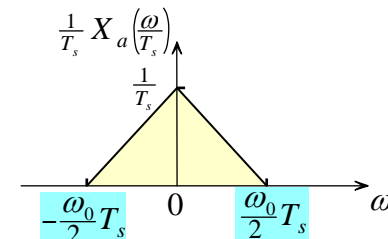
$$X_S(f) = \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a\left(f + \frac{n}{T_S}\right)$$



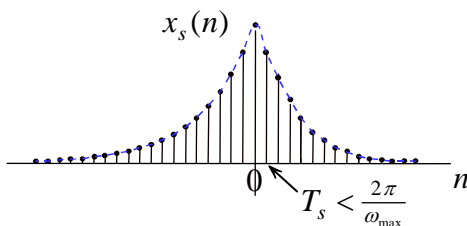
Το αναλογικό σήμα $x_a(t)$.



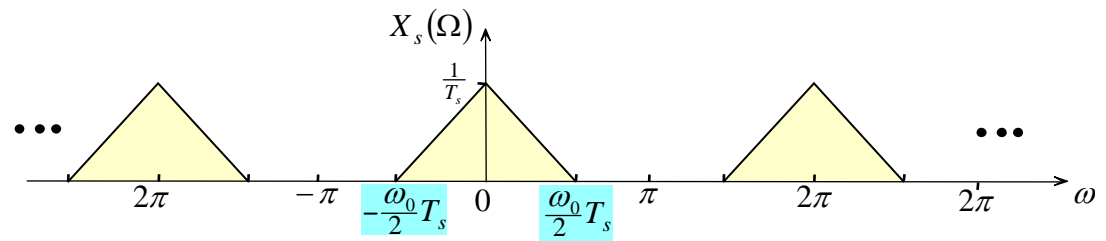
Το περιορισμένου εύρους φάσμα του αναλογικού σήματος



Ο όρος του φάσματος του δειγματοληπτημένου σήματος για $k = 0$



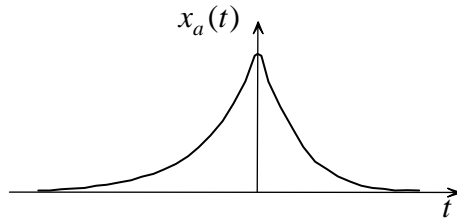
Το διακριτό σήμα $x_s(n)$.



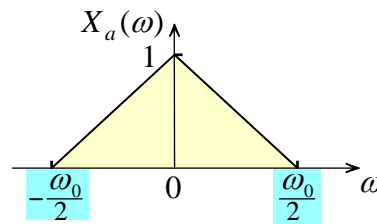
Το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος για $f_s > 2 f_{\max}$

Το φάσμα του αναλογικού σήματος διατηρείται στο φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος επομένως είναι δυνατή η ακριβής ανακατασκευή του αρχικού αναλογικού σήματος από τα δείγματά του.

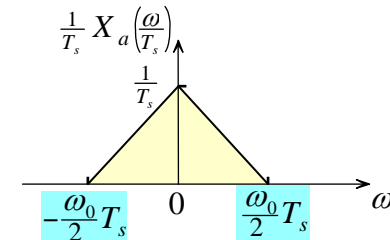
Δειγματοληψία και ανακατασκευή αναλογικών σημάτων στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο συχνοτήτων



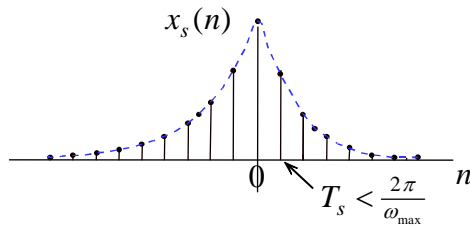
Το αναλογικό σήμα $x_a(t)$.



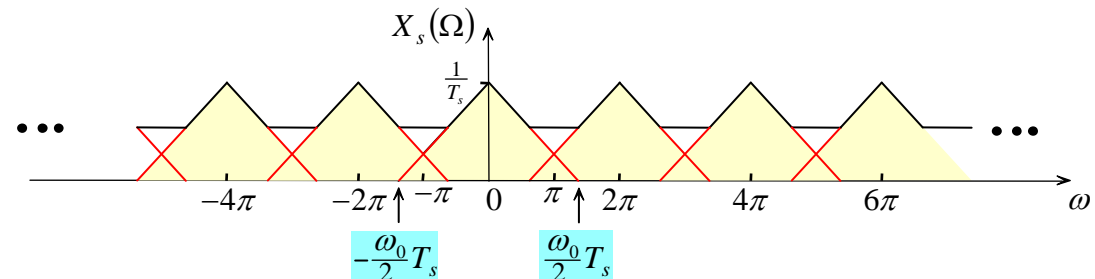
Το περιορισμένου εύρους φάσμα του αναλογικού σήματος



Ο όρος του φάσματος του δειγματοληπτημένου σήματος για $k = 0$



Το διακριτό σήμα $x_s(n)$.



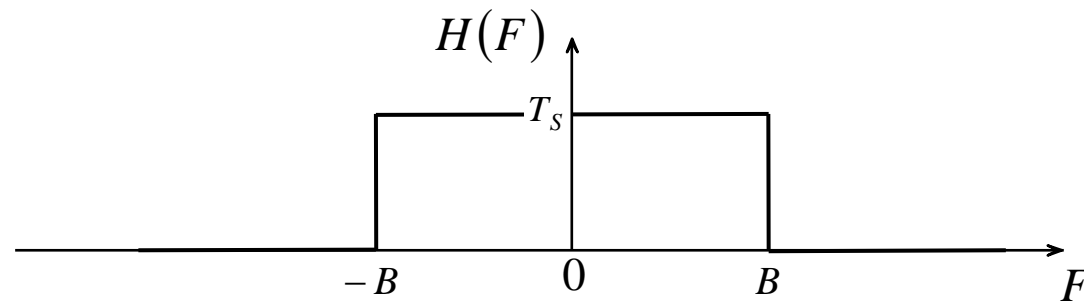
Το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος για $f_s < 2 f_{\max}$

Έχουμε το φαινόμενο της φασματικής επικάλυψης ή του χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας

Το φάσμα του αναλογικού σήματος δε διατηρείται στο φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος επομένως δεν είναι δυνατή η ακριβής ανακατασκευή του αρχικού αναλογικού σήματος από τα δείγματά του.

Με τη βοήθεια ενός ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου με απόκριση συχνότητας

$$H(F) = T_S \cdot \Pi\left(\frac{F}{2B}\right) \quad \text{όπου} \quad -\pi \leq B < \pi$$



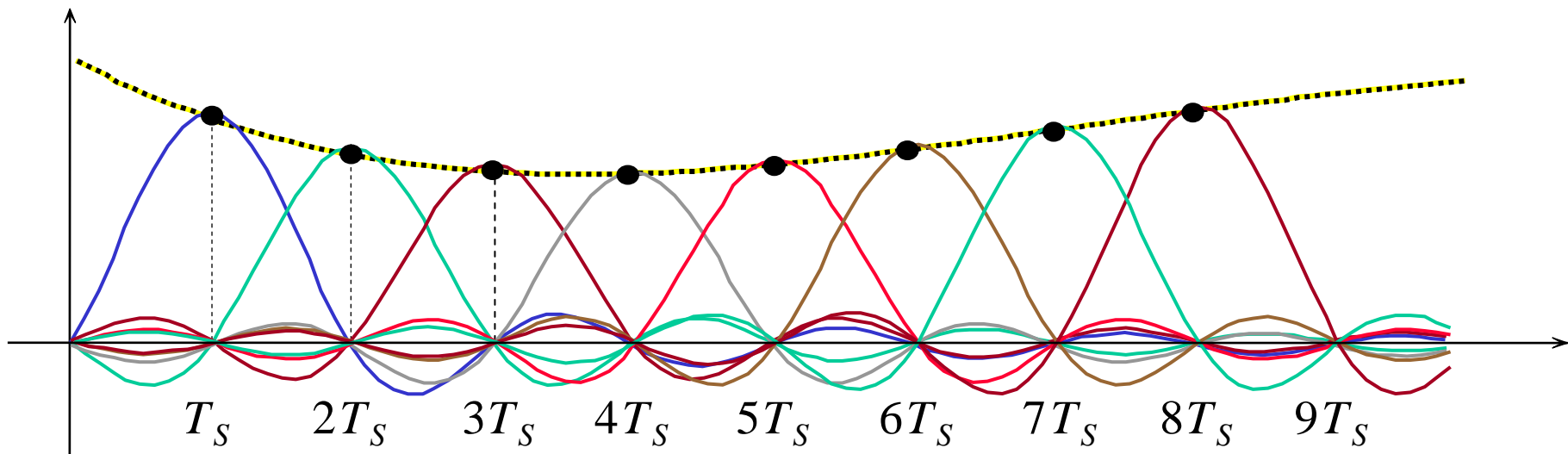
είναι δυνατή η ανάκτηση του αρχικού σήματος με τη βοήθεια της

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_S) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_S}{T_S}\right)$$

Γραφική ερμηνεία της ανακατασκευής του αναλογικού σήματος από τα δείγματά του

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{2W}\right) \operatorname{sinc}\left(2W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right)$$

$$x(t) = x_a(T_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - 1\right) + x_a(2T_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - 2\right) + x_a(3T_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - 3\right) + \dots$$



Παρατηρούμε ότι για t ακέραιο πολλαπλάσιο του nT_s , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ μόνο μία sinc συνεισφέρει με πλάτος $x_a(nT_s)$, ενώ για $t \neq nT_s$ συνεισφέρουν όλες.

Δίνεται το αναλογικό σήμα $x_a(t) = e^{-1000|t|}$ Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος $x(n)$ το οποίο προκύπτει από το αναλογικό σήμα με δειγματοληψία στις συχνότητες $F_s=5000$ δείγματα/sec και $F_s=1000$ δείγματα/sec .

% Αναλογικό σήμα

Dt = 0.00005;

t = -0.005:Dt:0.005;

xa = exp(-1000*abs(t));

% Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου

Wmax = 2*pi*2000;

K = 500; k = 0:1:K;

W = k*Wmax/K;

Xa = xa * exp(-j*t'*W) * Dt;

Xa = real(Xa);

W = [-fliplr(W), W(2:501)]; **% Συχνότητα από -Wmax to Wmax**

Xa = [fliplr(Xa), Xa(2:501)];

subplot(1,1,1)

subplot(2,1,1);plot(t*1000,xa);

xlabel('t σε msec. '); ylabel('xa(t)')

title('Analog Signal')

subplot(2,1,2);plot(W/(2*pi*1000),Xa*1000);

xlabel('Συχνότητα σε KHz'); ylabel('Xa(jW)*1000')

title('Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου')

% Αναλογικό σήμα

Dt = 0.00005;

t = -0.005:Dt:0.005;

xa = exp(-1000*abs(t));

% Διακριτό σήμα

Ts = 0.001; n = -5:1:5;

x = exp(-1000*abs(n*Ts));

% Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

K = 500; k = 0:1:K;

w = pi*k/K;

X = x * exp(-j*n'*w);

X = real(X);

w = [-fliplr(w), w(2:K+1)];

X = [fliplr(X), X(2:K+1)];

subplot(1,1,1)

subplot(2,1,1);plot(t*1000,xa);

xlabel('t σε msec. '); ylabel('xa(t)')

title('Διακριτικό Σήμα'); hold on

stem(n*Ts*1000,x);

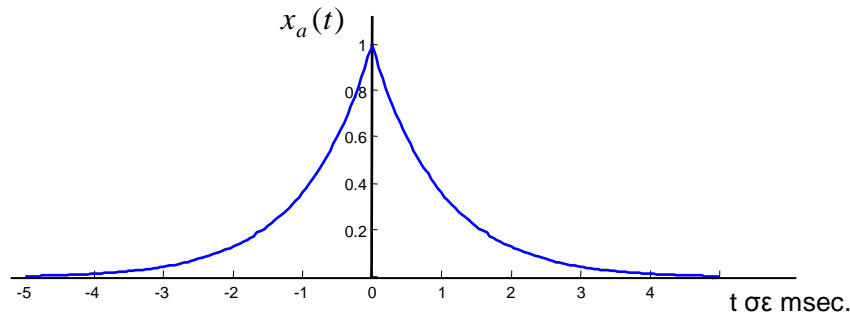
gtext('Ts=1 msec');

hold off

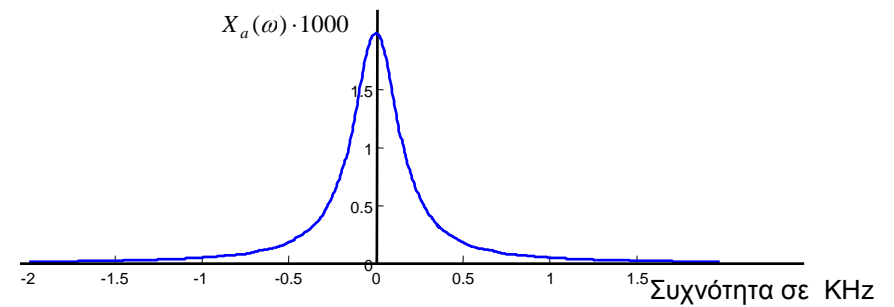
subplot(2,1,2);plot(w/pi,X);

xlabel('Συχνότητα σε KHz'); ylabel('X(w)')

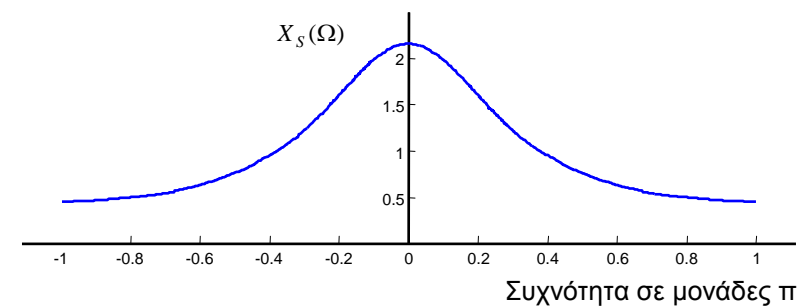
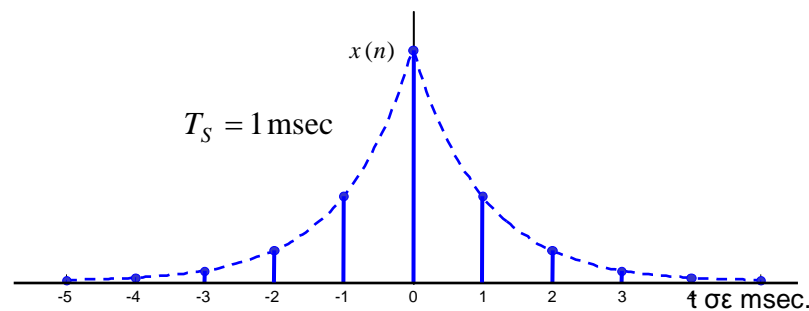
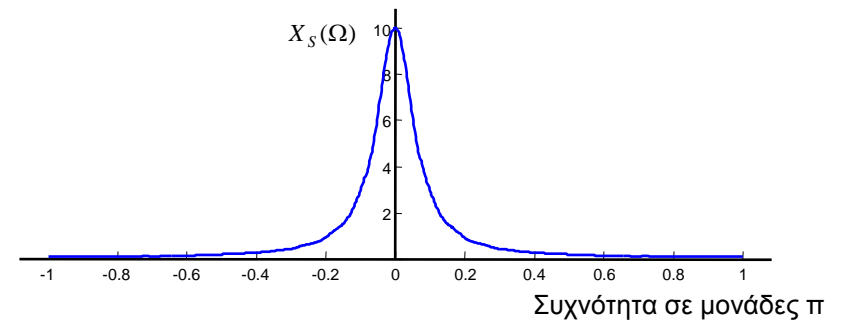
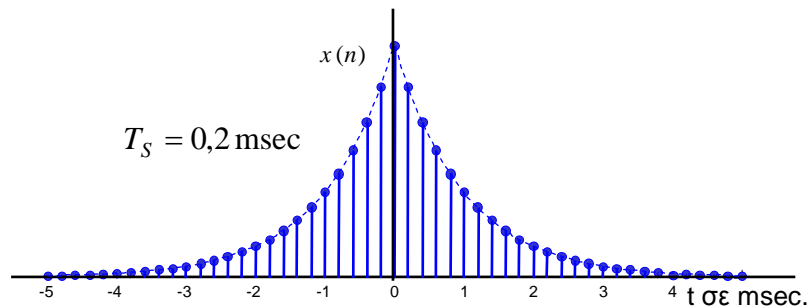
title('Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier')



Αναλογικό σήμα



Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου



Διακριτό σήμα

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

D/A μετατροπείς

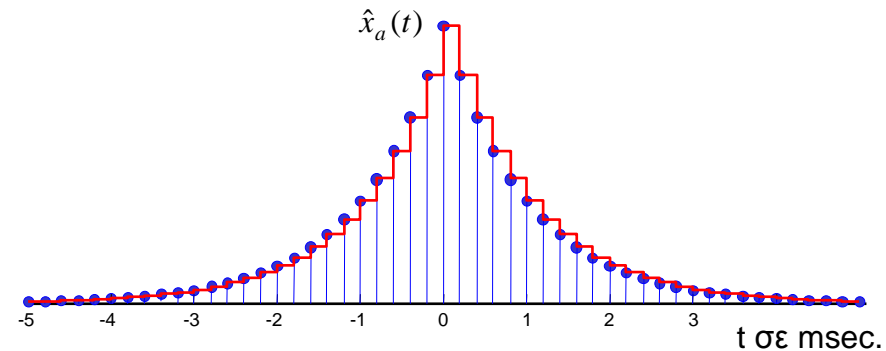
► Zero-order-hold (ZOH) παρεμβολή

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι

$$\hat{x}_a(t) = x(n), \quad nT_s \leq t < (n+1)T_s$$

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_s \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

```
figure(1); clf
% Σήμα διακριτού χρόνου x (n) : Ts = 0.0002
Ts = 0.0002; n = -25:1:25; nTs = n*Ts;
x = exp(-1000*abs(nTs));
% Ανακατασκευή σήματος με ZOH παρεμβολή
subplot(2,1,1); stairs(nTs*1000,x);
xlabel('t σε msec. '); ylabel('xa(t)')
title('Ανακατασκευή σήματος x (n) χρησιμοποιώντας ZOH');
hold on
stem(n*Ts*1000,x);
hold off
```



Ανακατασκευή σήματος $x(n)$ χρησιμοποιώντας ZOH

► First-order-hold (FOH) παρεμβολή

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι

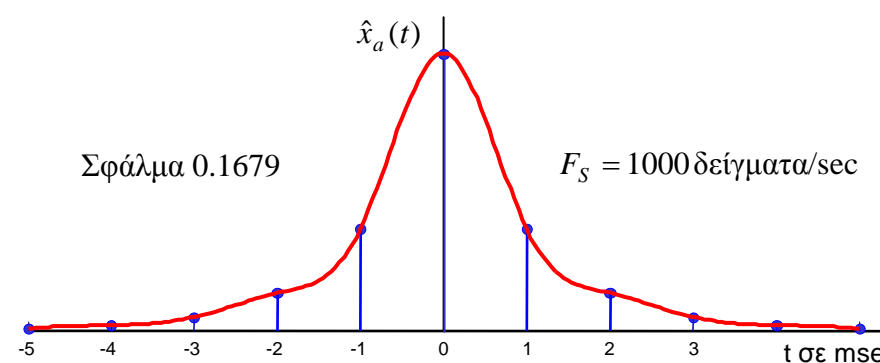
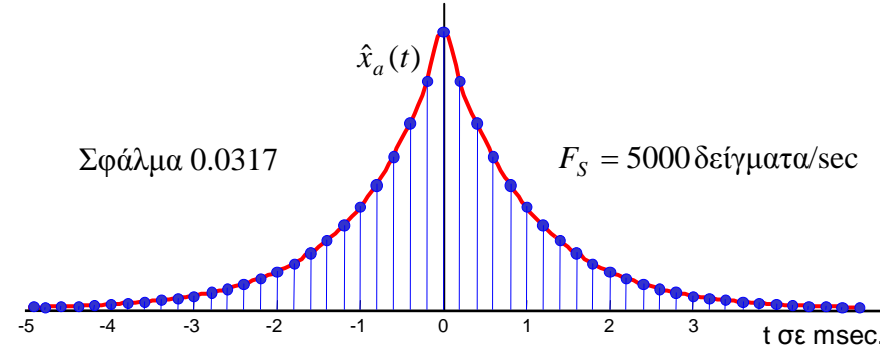
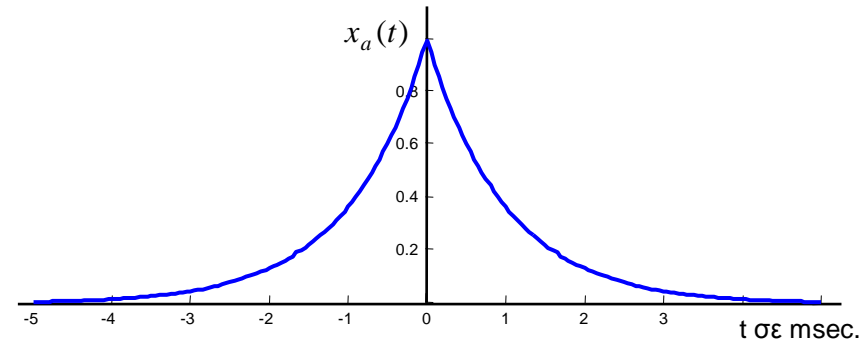
$$h_1(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{T_s}, & 0 \leq t \leq T_s \\ 1 - \frac{t}{T_s}, & T_s \leq t \leq 2T_s \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

► Cubic spline παρεμβολή

$$\hat{x}_a(t) = \alpha_0(n) + \alpha_1(n)(t - nT_S) + \alpha_2(n)(t - nT_S)^2 + \alpha_3(n)(t - nT_S)^3, \quad nT_S \leq t < (n+1)T_S$$

Ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του χρησιμοποιώντας cubic splines παρεμβολή

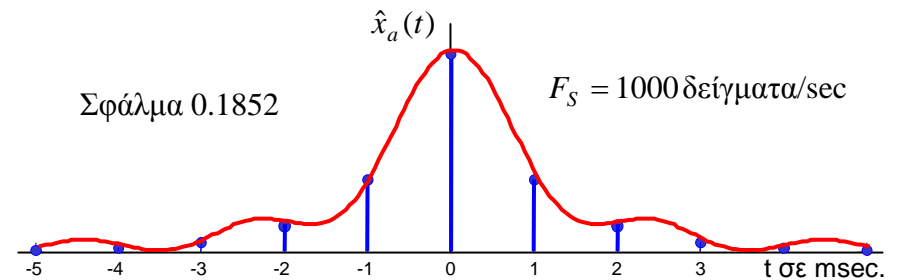
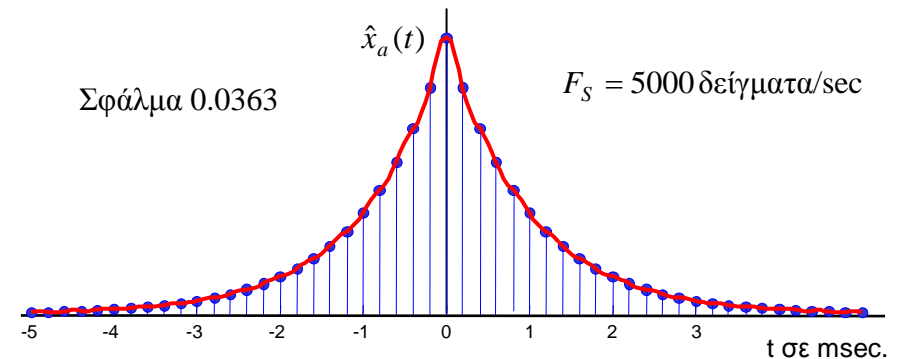
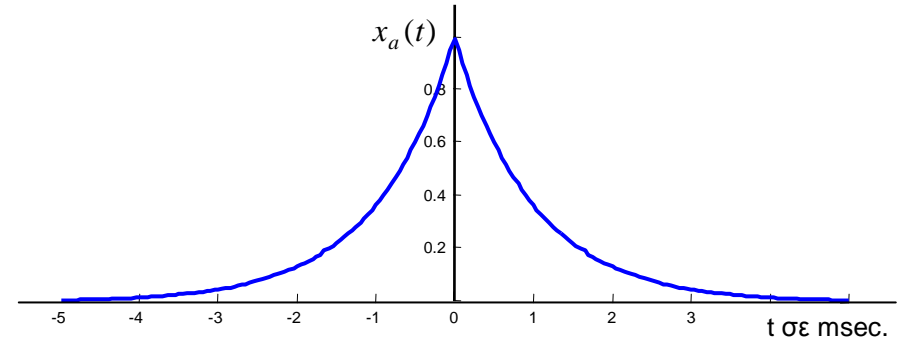
```
figure(1); clf
Ts = 0.0002;
n = -25:1:25;
nTs = n*Ts;
x = exp(-1000*abs(nTs));
% Ανακατασκευή αναλογικού σήματος
Dt = 0.00005;
t = -0.005:Dt:0.005;
xa = spline(nTs,x,t);
% Έλεγχος
error = max(abs(xa - exp(-1000*abs(t))))
subplot(2,1,1); plot(t*1000,xa);
xlabel('t in msec. '); ylabel('xa(t)')
title('Ανακατασκευή του σήματος από τα δείγματά του
x(n) χρησιμοποιώντας cubic splines παρεμβολή');
hold on
stem(n*Ts*1000,x);
hold off
```

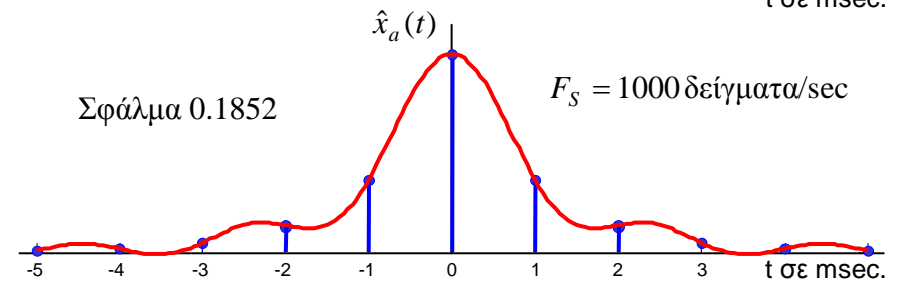
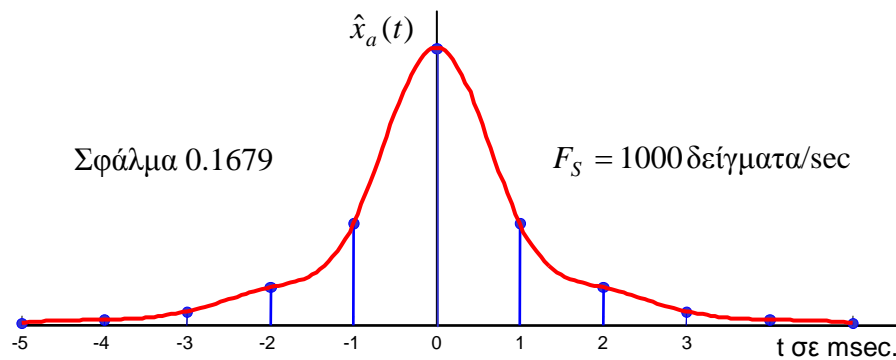
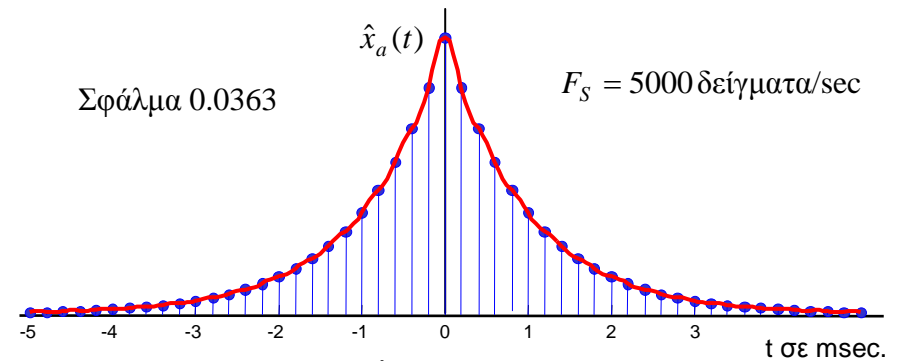
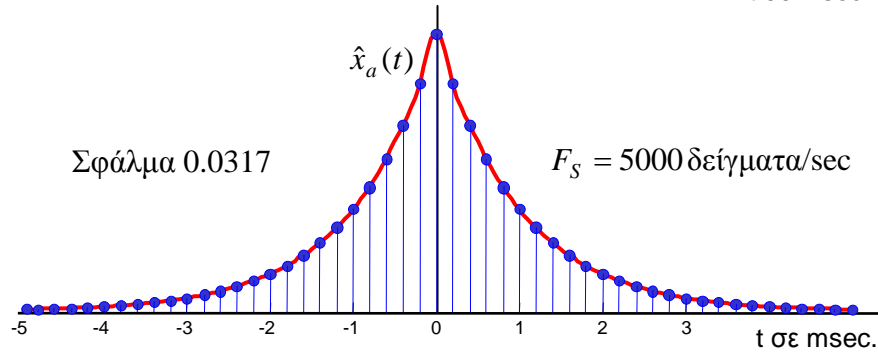
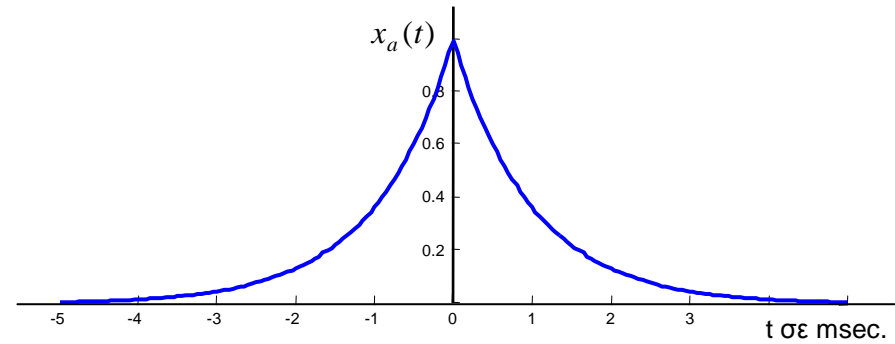
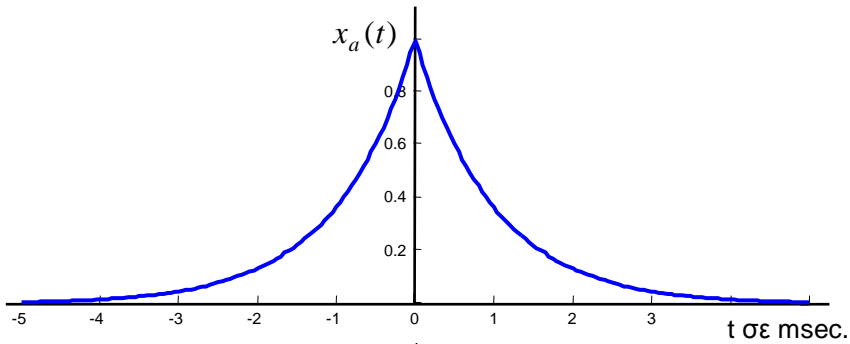


Ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του χρησιμοποιώντας cubic splines παρεμβολή

▶ Ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση δειγματοληψίας

```
% Ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του
% χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση sinc
%
% Σήμα διακριτού χρόνου x(n)
Ts = 0.0002;
Fs = 1/Ts;
n = -25:1:25;
nTs = n*Ts;
x = exp(-1000*abs(nTs));
% Ανακατασκευή αναλογικού σήματος
Dt = 0.00005;
t = -0.005:Dt:0.005;
xa = x * sinc(Fs*(ones(length(nTs),1)*t-
nTs'*ones(1,length(t))));
% Έλεγχος
error = max(abs(xa - exp(-1000*abs(t))))
subplot(1,1,1)
subplot(2,1,2); plot(t*1000,xa);
xlabel('t in msec. '); ylabel('xa(t)')
title('Ανακατασκευή σήματος από τα x(n)
χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση sinc');
hold on
stem(n*Ts*1000,x);
hold off
```



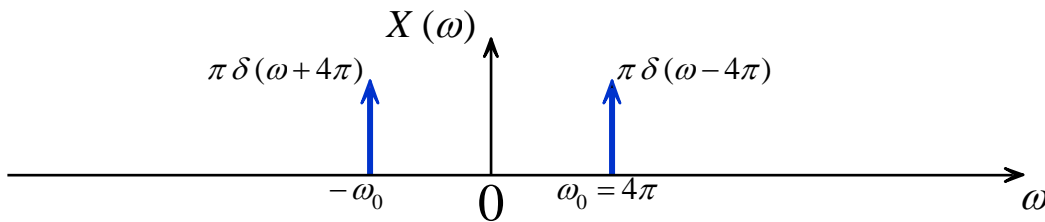


Ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του χρησιμοποιώντας cubic splines παρεμβολή

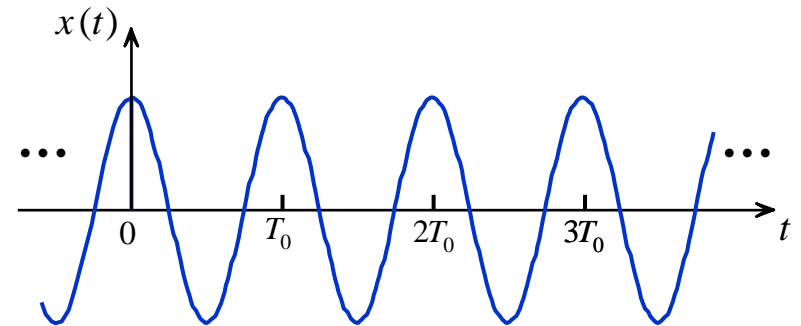
Ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση sinc

■ **Παράδειγμα**

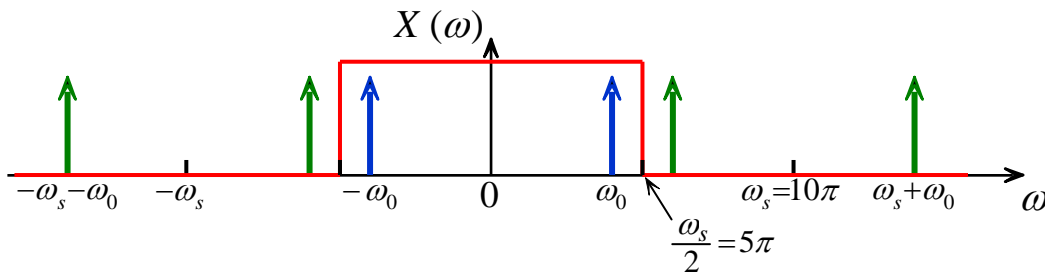
Το αναλογικό σήμα $x(t) = \cos(4\pi t)$ δειγματοληπτείται με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 0,2$ sec.



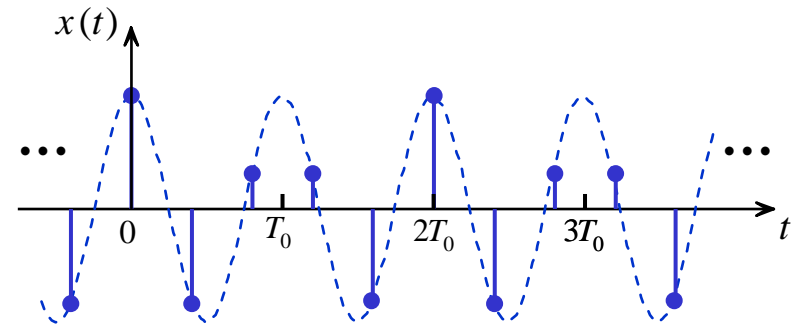
Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.



Το σήμα $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.



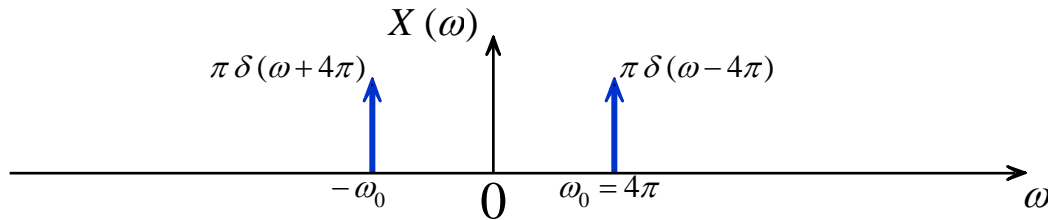
Ο μετασχηματισμός Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος.



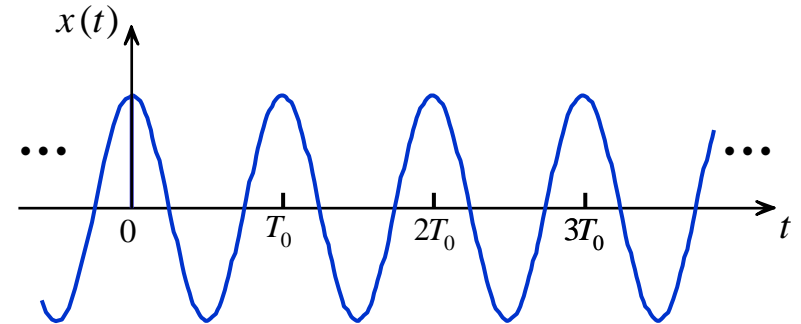
Το δειγματοληπτημένο σήμα.

■ **Παράδειγμα**

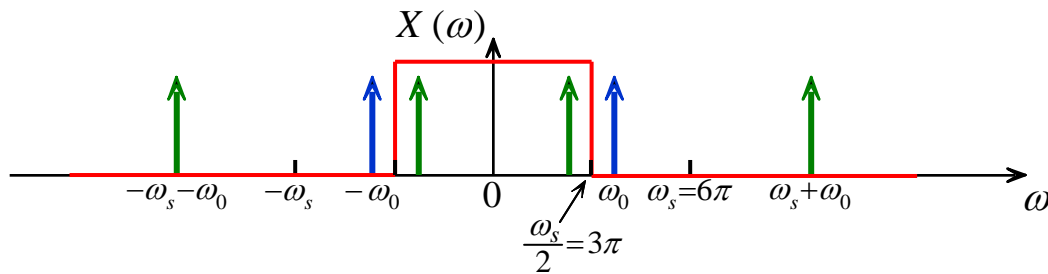
Το αναλογικό σήμα $x(t) = \cos(4\pi t)$ δειγματοληπτείται με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 1/3$ sec.



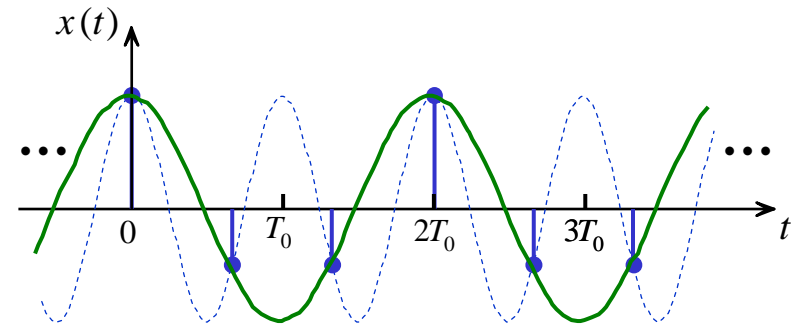
Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.



Το σήμα $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.



Ο μετασχηματισμός Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος.



Το δειγματοληπτημένο σήμα.

Δειγματοληψία στο πεδίο συχνότητας αναλογικού σήματος

$$x_a(t) \xleftrightarrow{F} X_a(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Αν δειγματοληψήσουμε ομοιόμορφα το φάσμα $X_a(f)$ με περίοδο $T_s = \frac{1}{\delta f}$ έχουμε

$$X_a(k\delta f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j2\pi k\delta f t} dt = \int_{-T_s/2}^{+T_s/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(t - nT_s) \right] e^{-j2\pi k\delta f t} dt$$

Το σήμα $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t - nT_s)$ είναι περιοδικό έτσι αναπτύσσεται σε σειρά Fourier

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi\delta f t} \quad c_n = \frac{1}{T_s} \int_{\langle T_s \rangle} x(t) e^{-jk2\pi f_0 t} dt$$

παρατηρούμε ότι $c_k = \frac{1}{T_s} X_a(k\delta f) = \delta f X_a(k\delta f)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ επομένως

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(t - nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(k\delta f) e^{jk2\pi\delta f t}$$

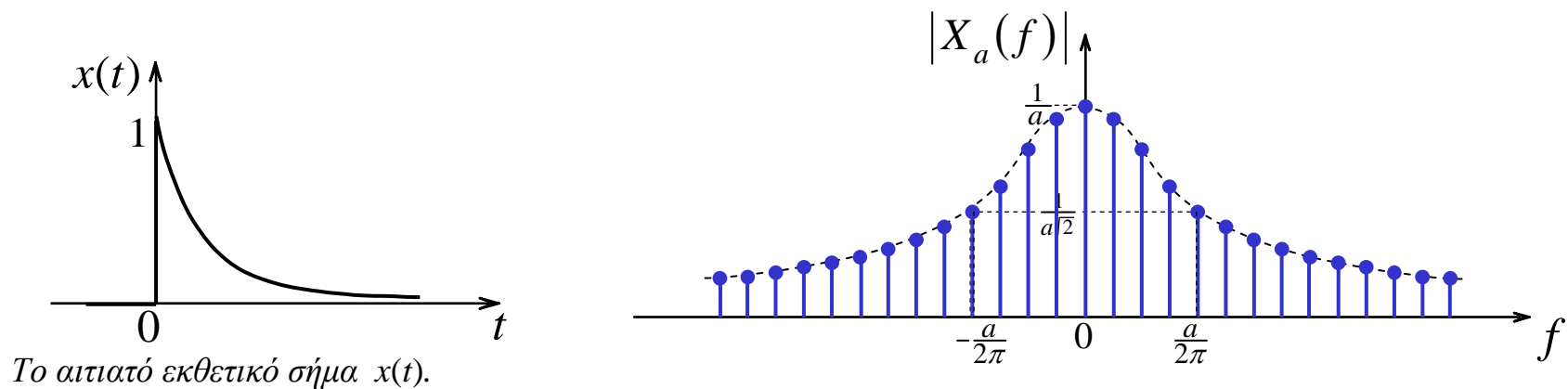
Αν $x_a(t) = 0$ για $|t| > \tau$ και επιλέξουμε $T_s > 2\tau$ τότε δεν έχουμε χρονική αλλοίωση και το φάσμα του σήματος $X_a(f)$ μπορεί επιτυχώς να ανακατασκευαστεί από τα δείγματα του $X_a(k\delta f)$ με τη βοήθεια της σχέσης:

$$X_a(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(k\delta f) \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\delta f} (f - k\delta f) \right]$$

Το αιτιατό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου $x_a(t) = e^{-at}u(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier

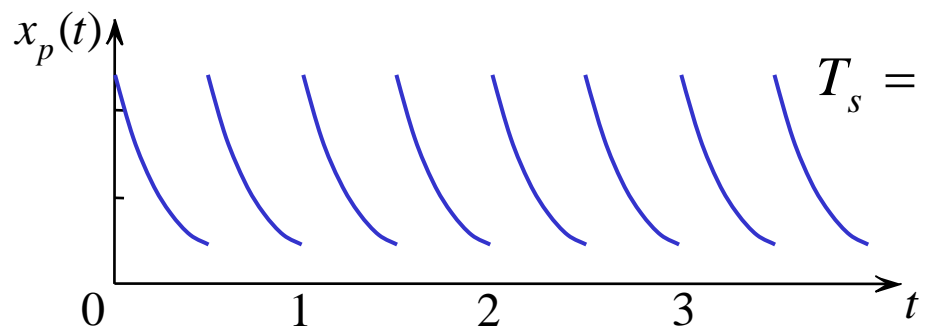
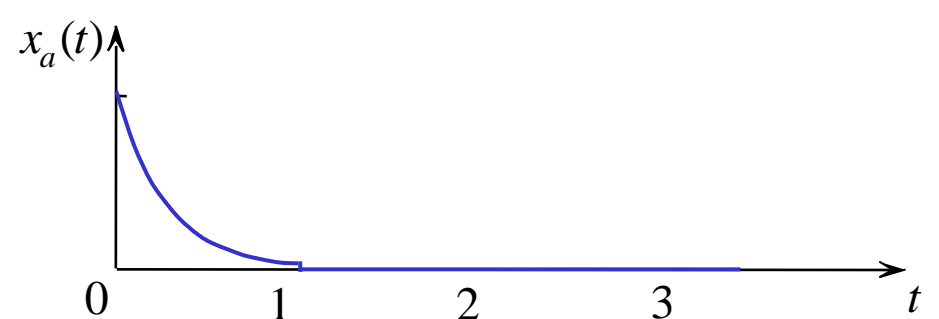
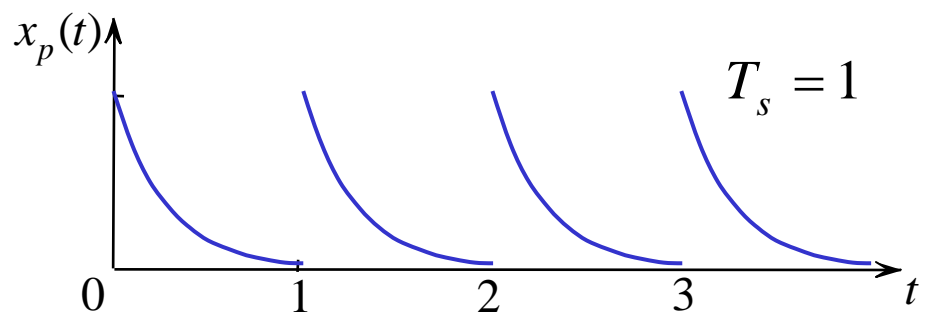
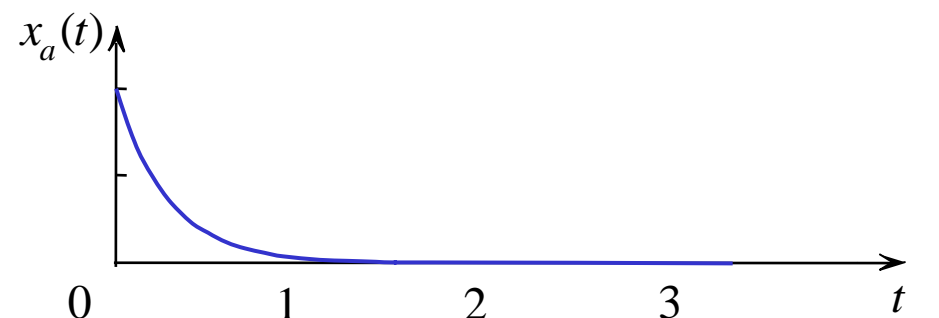
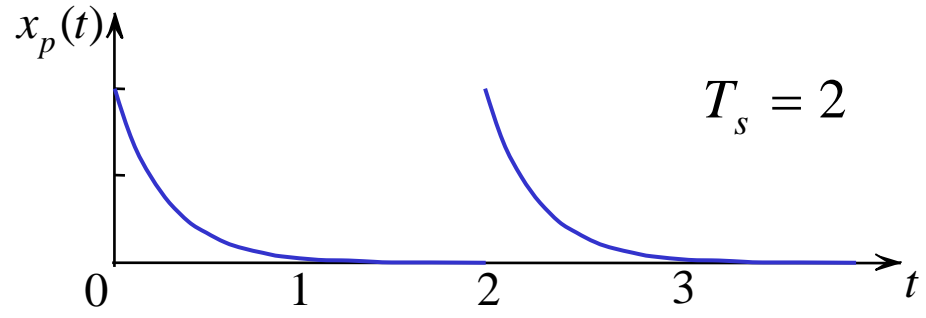
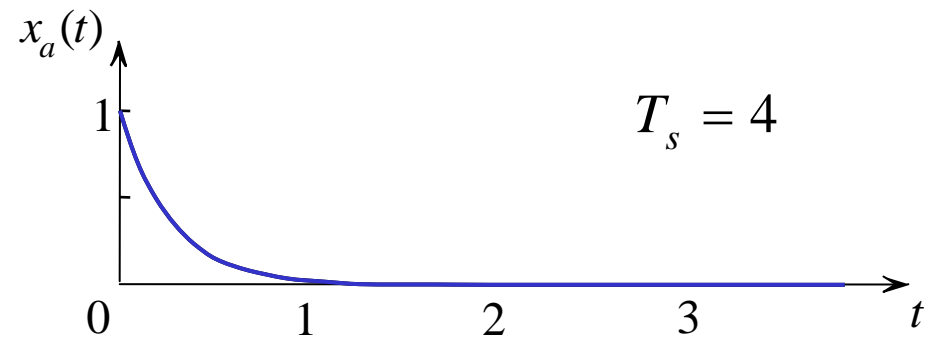
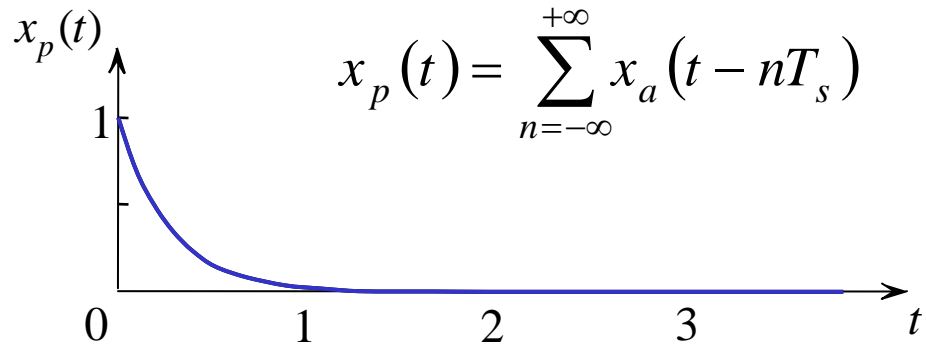
$$X_a(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

Αν δειγματοληπτήσουμε ομοιόμορφα το φάσμα $X_a(f)$ με περίοδο T_s θα έχουμε



Το αιτιατό εκθετικό σήμα $x(t)$.

Το πλάτος του MF του σήματος $x(t)$.



Δειγματοληψία στο πεδίο συχνότητας διακριτού σήματος

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi F n}$$

Αν δειγματοληπτήσουμε ομοιόμορφα το φάσμα $X(\Omega)$ σε N σημεία στο διάστημα $0 \leq \Omega < 2\pi$, δηλαδή, $\delta\Omega = 2\pi/N$ έχουμε για $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(n-lN) \right] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Το σήμα $x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)$ είναι περιοδικό έτσι αναπτύσσεται σε σειρά Fourier

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

παρατηρούμε ότι $c_k = \frac{1}{N} X_a\left(k\frac{2\pi}{N}\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ επομένως

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Μπορούμε λοιπόν να ανακατασκευάσουμε το σήμα $x(n)$ από το σήμα $x_p(n)$ ως

$$x(n) = x_p(n) \quad \text{για } 0 \leq n \leq N-1$$

ή

$$x(n) = x_p(n) \mathcal{R}_N(n) = \begin{cases} x_p(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $\mathcal{R}_N(n)$ είναι ένα τετραγωνικό παράθυρο μήκους N

$$\mathcal{R}_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Εφαρμογή

Έστω $x(n) = 0,7^n u(n)$. Να δειγματοληπτηθεί ο $X(\Omega)$ σε $N = 5, 10$, και 20 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $0 \leq \Omega < 2\pi$. Να ανακατασκευαστεί από τα δείγματα $X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$ το σήμα $x_p(n)$. Να βρεθεί το σήμα $x_p(n) \cdot \mathcal{R}_N(n)$. Ποιες είναι οι παρατηρήσεις σας;

Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος $x(n)$ είναι

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - 0,7 e^{-j\Omega}} = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - 0,7}$$

% Υπολογίζονται τα N ισαπέχοντα δείγματα του $X(\Omega)$ του σήματος $x(n)$.

N = 5;

k = 0:1:N-1;

wk = 2*pi*k/N;

zk = exp(j*wk);

Xk = (zk)/(zk-0.7);

% Προσδιορίζεται το περιοδικό σήμα $x_p(n)$ από τα N δείγματα $X(k)$ με IDFS

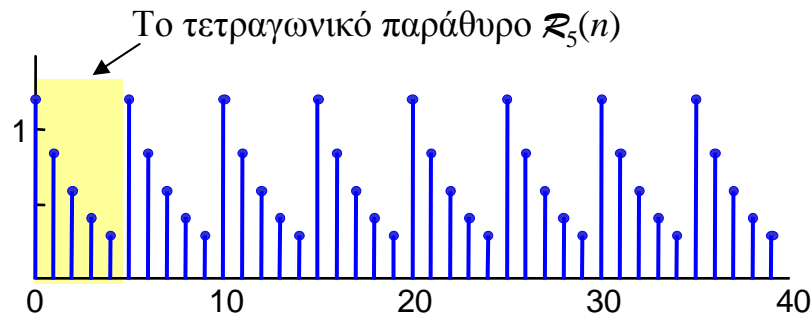
xn = real(idfs(Xk,N));

xtilde = xn* ones(1,8);

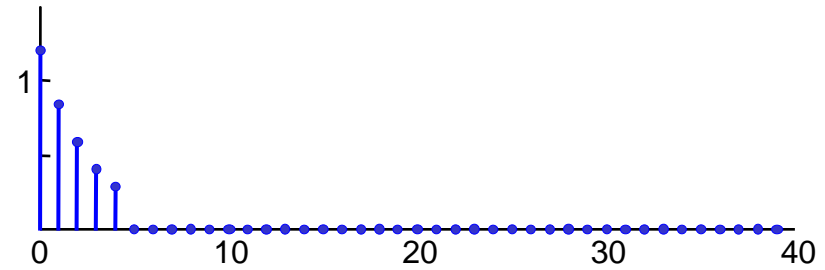
xtilde = (xtilde(:))';

subplot(2,1,1); stem(0:39,xtilde)''

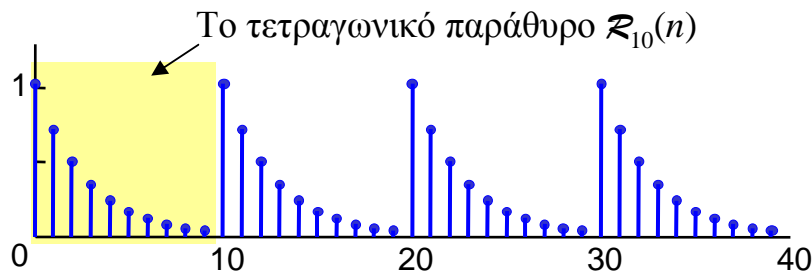
axis([0,40,-0.1,1.5])



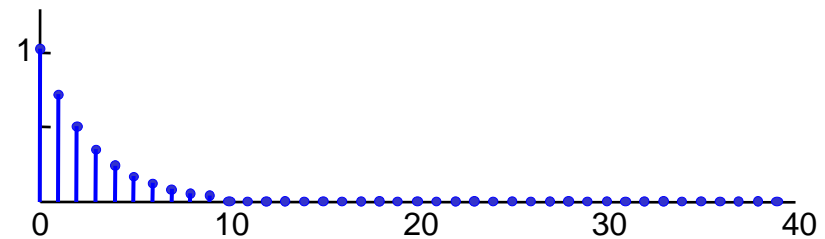
Η περιοδική ακολουθία $\tilde{x}(n)$ η οποία βρίσκεται από $N = 5$ δείγματα του $X(z)$ με IDFS.



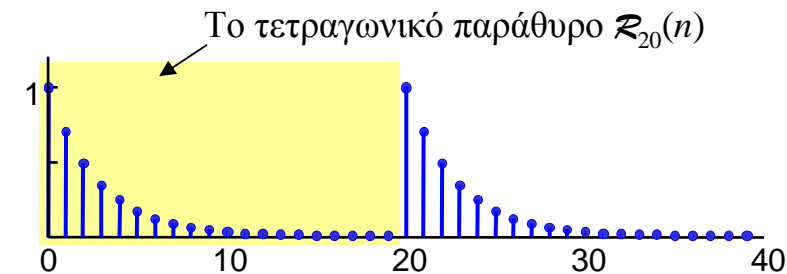
Το σήμα $\tilde{x}(n) \cdot \mathcal{R}_5(n) \approx x(n)$.



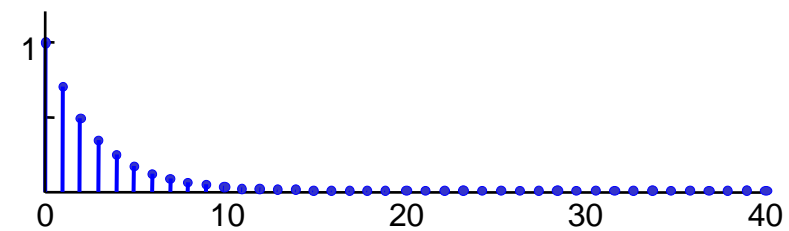
Η περιοδική ακολουθία $\tilde{x}(n)$ η οποία βρίσκεται από $N = 10$ δείγματα του $X(z)$ με IDFS.



Το σήμα $\tilde{x}(n) \cdot \mathcal{R}_{10}(n) \approx x(n)$.



Η περιοδική ακολουθία $\tilde{x}(n)$ η οποία βρίσκεται από $N = 20$ δείγματα του $X(z)$ με IDFS.

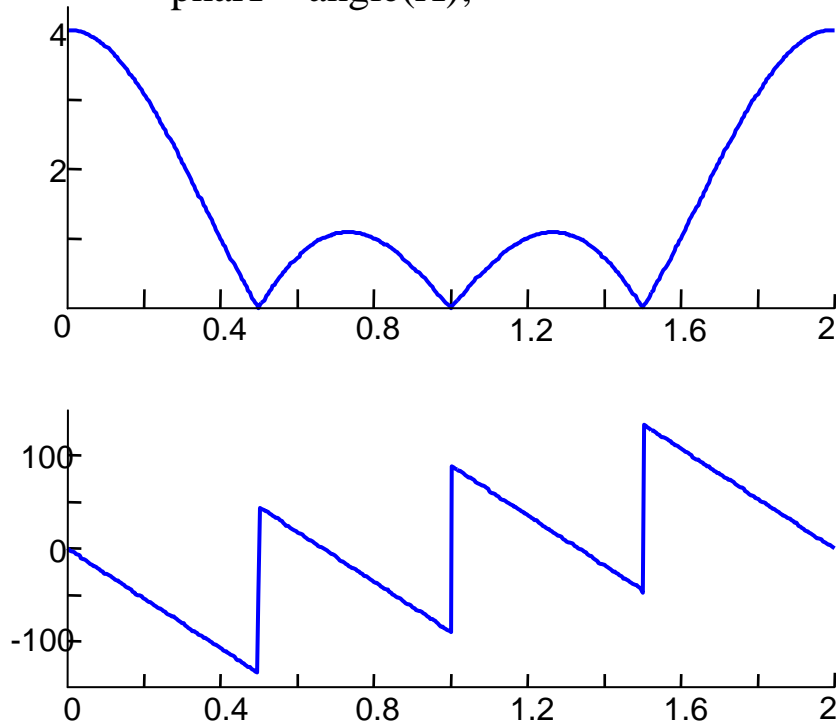


Το σήμα $\tilde{x}(n) \cdot \mathcal{R}_{20}(n) = x(n)$.

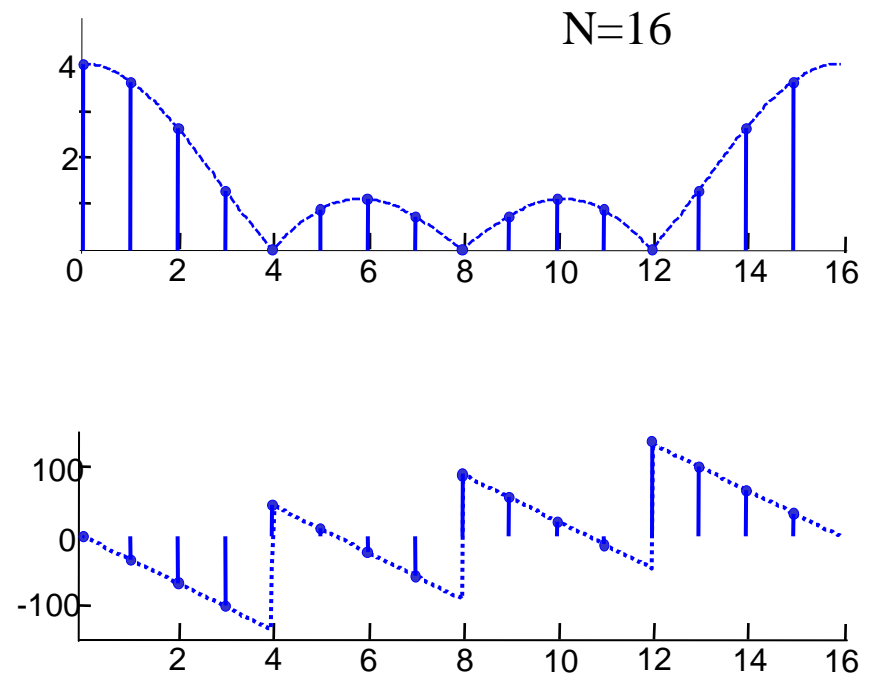
Δίνεται το σήμα $x(n)$ Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου και να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης. Να βρεθεί ο DFT 4-σημείων του $x(n)$.

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

```
x = [1,1,1,1,zeros(1,N-4)];
w = [0:1:500]*2*pi/500;
[X] = freqz(x,1,w);
magX = abs(X);
phaX = angle(X);
```



```
x = [1,1,1,1,zeros(1,N-4)];
X = dft(x,N);
magX = abs(X);
phaX = angle(X)*180/pi
```



Ο ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π .

Για να επεξεργαστούμε το μετασχηματισμό Fourier με ψηφιακά μέσα απαιτείται η μετατροπή του σε ακολουθία αριθμών πεπερασμένης ακρίβειας. Θα πρέπει λοιπόν να δειγματοληπτηθεί κατάλληλα ο μετασχηματισμός Fourier έτσι ώστε να είναι δυνατή η ανακατασκευή του από τα δείγματά του.

Δίνεται η πεπερασμένου μήκους N ακολουθία $x(n)$, δηλαδή, η $x(n) = 0$ για $n \geq N$. Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της ακολουθίας $x(n)$ όπως είναι γνωστό είναι

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\Omega n}, \quad 0 \leq \Omega < 2\pi$$

Εάν δειγματοληπτήσουμε τη συνεχή συνάρτηση $X(\Omega)$ σε M διακριτές κυκλικές συχνότητες που είναι πολλαπλάσιες της Ω_s στο διάστημα $0 \leq \Omega < 2\pi$ παίρνουμε τα δείγματα

$$X_M(k) = X(\Omega)|_{\Omega=k\Omega_s} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\Omega_s n}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

Ο αριθμός των δειγμάτων που θα ληφθούν θα πρέπει να είναι κατάλληλος έτσι ώστε αφενός να είναι δυνατή η ανάκτηση του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου για κάθε τιμή της κυκλικής συχνότητας Ω αφετέρου να μην αυξηθούν η απαιτούμενη μνήμη και η ταχύτητα επεξεργασίας.

Το **θεώρημα δειγματοληψίας στο πεδίο συχνοτήτων** αναφέρει ότι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου μπορεί να ανακτηθεί από τα δείγματά του $X_M(k)$, $k = 0, 1, \dots, M-1$ αρκεί το σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ να είναι πεπερασμένης διάρκειας N και να ισχύει $M \geq N$. στην περίπτωση αυτή ισχύει η **συνθήκη Nyquist**, δηλαδή,

$$\Omega_s \leq \frac{2\pi}{N}$$

Για την οριακή περίπτωση όπου $\Omega_s = \frac{2\pi}{N}$, δηλαδή, όταν ο $X(\Omega)$ δειγματοληπτείται στις συχνότητες $\Omega_k = k \cdot \Omega_s = k \frac{2\pi}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ έχουμε το **διακριτό μετασχηματισμό Fourier** (*Discrete Fourier Transform*, DFT) της ακολουθίας $x(n)$.

$$X(k) = X_N(k) = X(\Omega)|_{\Omega=k\frac{2\pi}{N}} = X\left(k\frac{2\pi}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να ανακατασκευάσουμε την ακολουθία $x(n)$ από τα δείγματα $X_N(k)$ του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου με την

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί τον *αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier* (*inverse DFT*, IDFT).

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις αποτελούν του *ζεύγος διακριτού μετασχηματισμού Fourier N-σημείων*.

Οι ακολουθίες $x(n)$ και $X_N(k)$ έχουν ίδιο μήκος N και είναι περιοδικές με περίοδο N .

■ Παράδειγμα

Δίνεται η 4-σημείων ακολουθία $x(n)$

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου $X(\Omega)$ και να γίνει η γραφική παράσταση του μέτρου του σε συνάρτηση με τη κυκλική συχνότητα Ω .

Να βρεθεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier 4-σημείων της ακολουθίας $x(n)$.

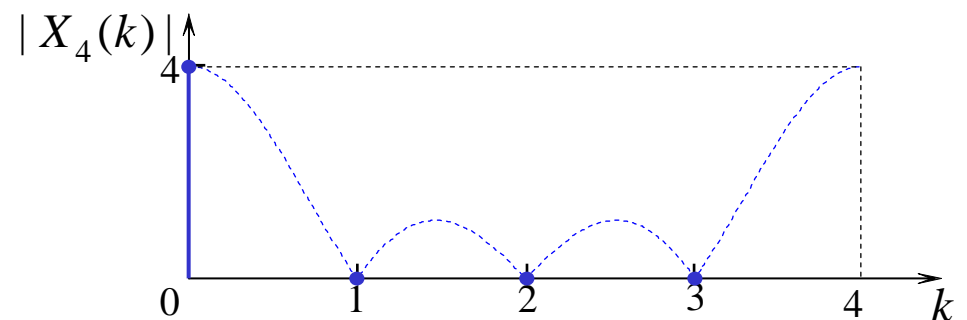
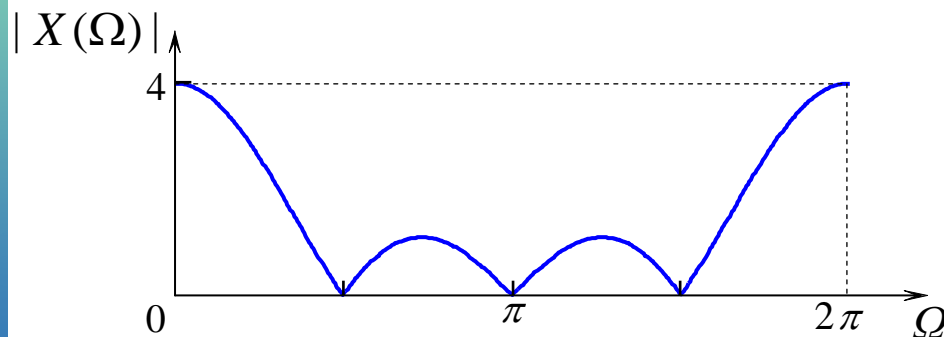
Απάντηση

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της ακολουθίας είναι

$$X(\Omega) = \frac{\sin(2\Omega)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j\frac{3\Omega}{2}}$$

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier 4-σημείων της ακολουθίας $x(n)$ είναι

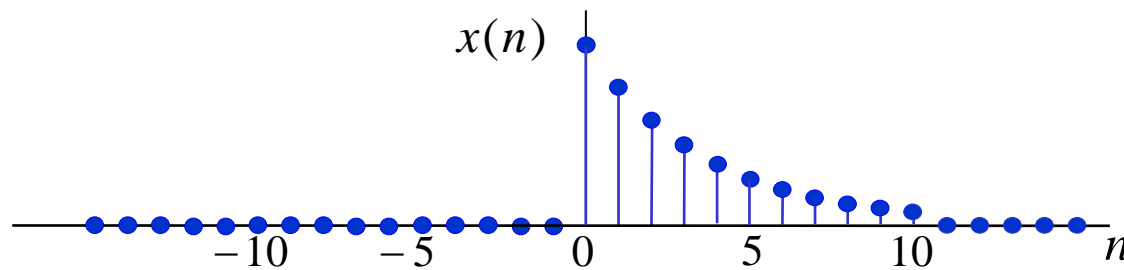
$$X_4(k) = \{4, 0, 0, 0\}$$



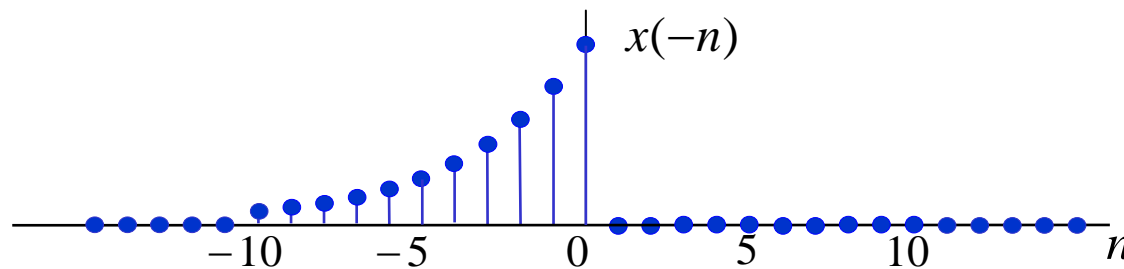
Κυκλική ανάκλαση ακολουθίας

Η *κυκλική ανάκλαση* μιας ακολουθίας μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια των υπολοίπων (modulo) ως $x((-n))_N$ όπου ο συμβολισμός $((m))_N$ διαβάζεται ως $m \text{ modulo } N$ και σημαίνει το υπόλοιπο της διαίρεσης του m δια του N και είναι

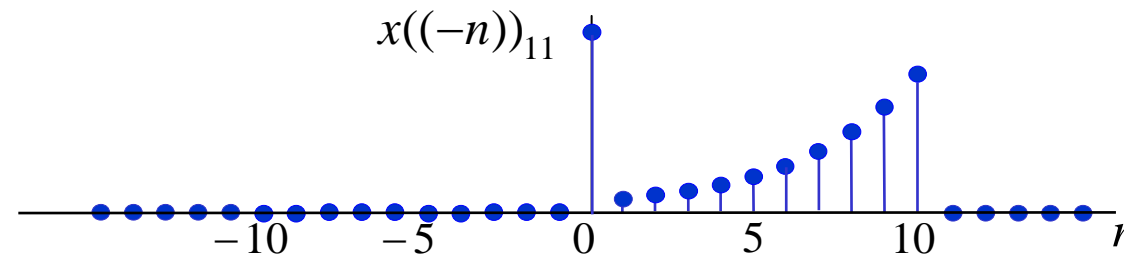
$$x((-n))_N = \begin{cases} x(0), & n = 0 \\ x(N - n), & 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$



Η ακολουθία 11-σημείων $x(n) = a^n$ όπου $0 \leq n \leq 10$ και $0 < a < 1$



η ανάκλασή της η οποία δεν είναι ακολουθία 11-σημείων

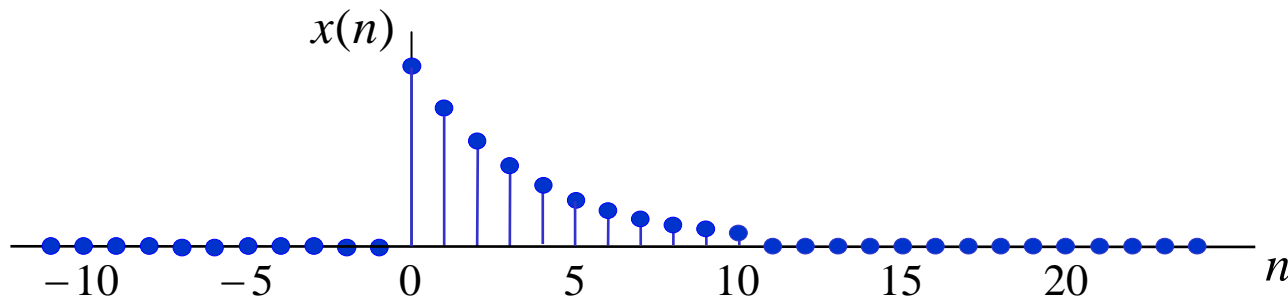


η κυκλική ανάκλασή της η οποία είναι ακολουθία 11-σημείων.

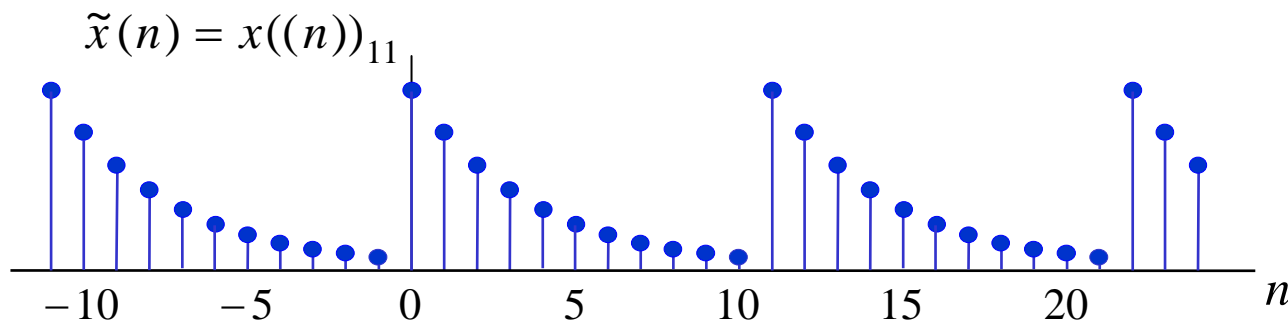
Κυκλική ολίσθηση ακολουθίας

Η **περιοδική επέκταση** ανά N δείγματα της πεπερασμένου μήκους ακολουθίας $x(n)$ που έχει N δείγματα στο διάστημα $0, 1, 2, \dots, N-1$ είναι η περιοδική ακολουθία

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n - kN)$$



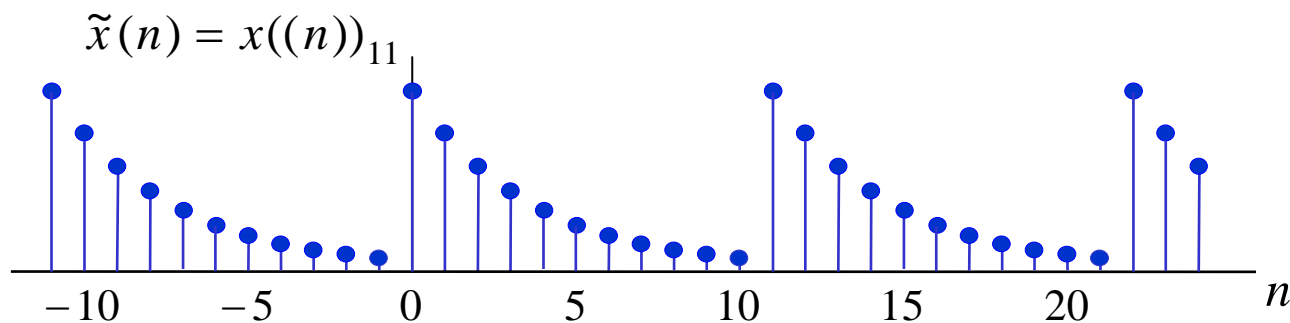
Η ακολουθία 11-σημείων $x(n) = a^n$ όπου $0 \leq n \leq 10$ και $0 < a < 1$



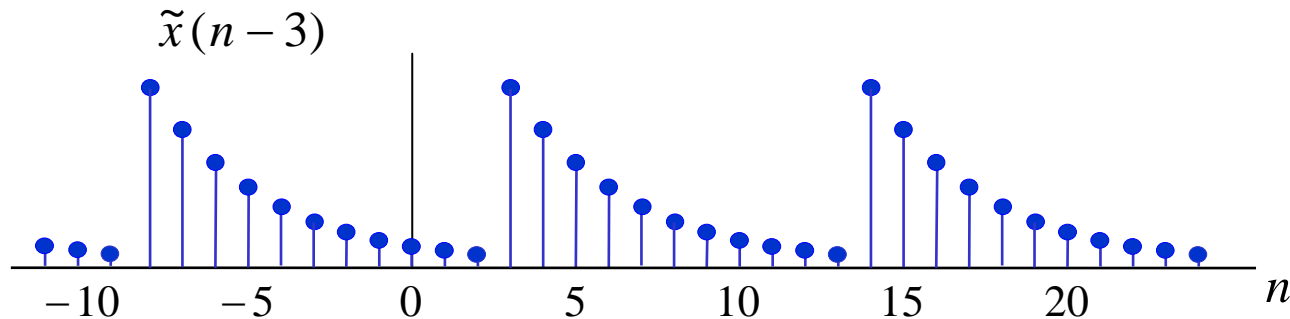
Η περιοδική επέκταση ανά 11 δείγματα της πεπερασμένου μήκους ακολουθίας $x(n)$

Η *ολίσθηση (μετατόπιση)* της περιοδικής ακολουθίας $\tilde{x}(n)$ κατά m δείγματα προς τα δεξιά δίνει την επίσης περιοδική ακολουθία $\tilde{x}(n - m)$.

$$\tilde{x}(n - m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n - m - kN)$$



Η περιοδική επέκταση ανά 11 δείγματα της πεπερασμένου μήκους ακολουθίας $x(n)$



Η γραμμική ολίσθηση κατά 3 δείγματα προς τα αριστερά της περιοδικής επέκτασης ανά 11 δείγματα της ακολουθίας $x(n)$.

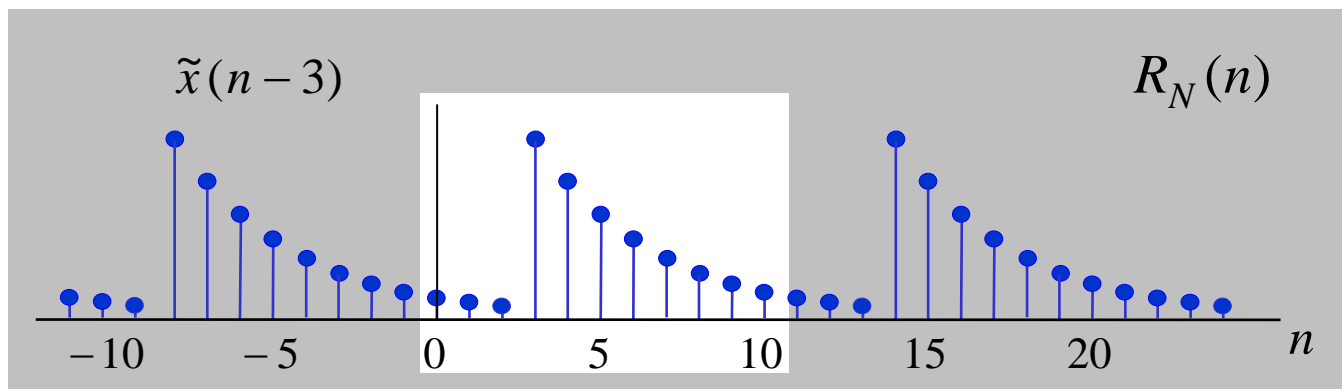
Η πεπερασμένου μήκους ακολουθία

$$\tilde{x}(n-m)R_N(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n-m), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $R_N(n)$ είναι το ορθογώνιο παράθυρο μήκους N , δηλαδή,

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

αποτελεί *την κυκλική ολίσθηση M -σημείων* της ακολουθίας $x(n)$.



Η γραμμική ολίσθηση κατά 3 δείγματα προς τα αριστερά της περιοδικής επέκτασης ανά 11 δείγματα της ακολουθίας $x(n)$.

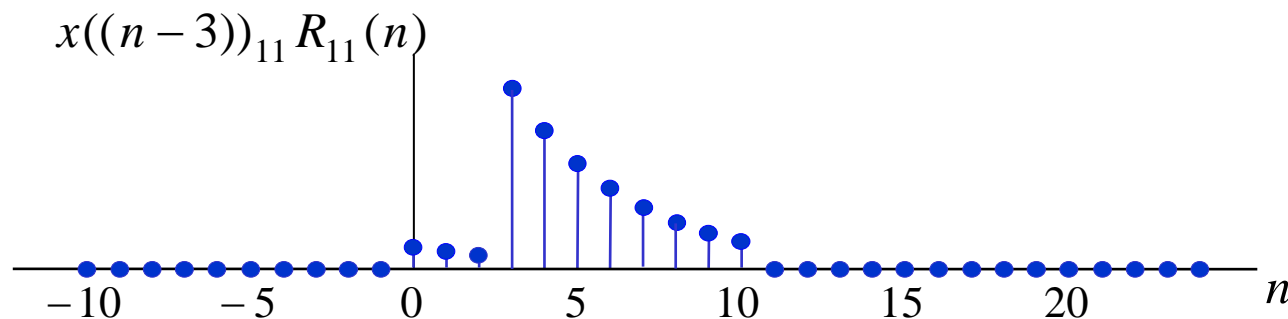
Η πεπερασμένου μήκους ακολουθία

$$\tilde{x}(n-m)R_N(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n-m), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $R_N(n)$ είναι το ορθογώνιο παράθυρο μήκους N , δηλαδή,

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

αποτελεί *την κυκλική ολίσθηση M -σημείων* της ακολουθίας $x(n)$.



Η κυκλικά ολισθημένη ακολουθία κατά 3 δείγματα προς τα αριστερά.

Κυκλική συνέλιξη

Η *κυκλική συνέλιξη* δύο ακολουθιών $x_1(n)$ και $x_2(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ ορίζεται από τη σχέση

$$y(n) = x_1(n) \textcircled{N} x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Η κυκλική συνέλιξη $y(n)$ έχει την ίδια μορφή με τη γραμμική συνέλιξη έχει όμως μήκος N , όσο δηλαδή και το μήκος καθεμιάς από τις αρχικές ακολουθίες, και όχι μήκος $2N-1$ όπως συμβαίνει στην περίπτωση της γραμμικής συνέλιξης των δύο αυτών ακολουθιών. Η κυκλική συνέλιξη ονομάζεται επίσης και *κυκλική συνέλιξη N -σημείων*.

Τα βήματα για τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης δύο ακολουθιών είναι

1. κυκλική ανάκλαση (κατοπτρισμός) της μιας ακολουθίας,
2. κυκλική ολίσθηση (μετατόπιση) της κατοπτρικής ακολουθίας,
3. πολλαπλασιασμός της μετατοπισμένης κατοπτρικής ακολουθίας με τη άλλη ακολουθία σημείο προς σημείο και
4. άθροιση των γινομένων.

Τα βήματα αυτά επαναλαμβάνονται.

■ Παράδειγμα

Να προσδιοριστεί η κυκλική συνέλιξη 4-σημείων για τις ακολουθίες

$$x_1(n) = \{3, 2, 1\} \quad x_2(n) = \{1, 2, 3, 4\}$$

Απάντηση

$$y(n) = \{14, 12, 14, 20\}$$

Ιδιότητες του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

Μερικές ιδιότητες του διακριτού μετασχηματισμού Fourier είναι ανάλογες με τις αντίστοιχες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Υπάρχουν όμως και διαφορετικές ιδιότητες οι οποίες οφείλονται στο πεπερασμένο μήκος που έχουν τόσο όσο οι ακολουθίες όσο και ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier τους

Γραμμικότητα

$$a x_1(n) + b x_2(n)$$

$$a X_1(k) + b X_2(k)$$

Κυκλική ολίσθηση
στο χρόνο

$$x((n - n_0))_N$$

$$e^{-jk \frac{2\pi}{N} n_0} X(-k)$$

Κυκλική ολίσθηση
στη συχνότητα

$$e^{jk_0 \frac{2\pi}{N} n} x(n)$$

$$X((k - k_0))_N$$

Κυκλική συνέλιξη

$$x(n) \otimes y(n)$$

$$X_1(k) \cdot X_2(k)$$

Πολλαπλασιασμός

$$x_1(n) \cdot x_2(n)$$

$$\frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k)$$

Θεώρημα Parseval

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

$$E_x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Η ποσότητα $\frac{|X(k)|^2}{N}$ ονομάζεται **φασματική πυκνότητα ενέργειας** της ακολουθίας πεπερασμένης διάρκειας. Για περιοδική ακολουθία ονομάζεται **φασματική πυκνότητα ισχύος**.

■ Παράδειγμα

Με τη βοήθεια της ιδιότητας της κυκλικής συνέλιξης να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη 4-σημείων των ακολουθιών

$$x_1(n) = [3, 2, 1] \quad x_2(n) = [1, 2, 3, 4]$$

Λύση

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x_1(n) = \{3, 2, 1, 0\} \xrightarrow{DFT} X_1(k) = [6, 2 - j \cdot 2, 2, 2 + j \cdot 2] = [6, 2\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}, 2, 2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}]$$

$$x_2(n) = \{1, 2, 3, 4\} \xrightarrow{DFT} X_2(k) = [10, -2 + 2j, -2, -2 - 2j] = [10, 2\sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}}, -2, 2\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}]$$

$$X(k) = X_1(k) \cdot X_2(k) = \left[60 + 8 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k} + 4 \cdot e^{-j\pi} + 8 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k} \right] = [60, j \cdot 8, -4, -j \cdot 8]$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x(n) = [14, 12, 14, 20]$$

Η γραμμική συνέλιξη με τη βοήθεια του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

$$x_1(n) \longrightarrow \boxed{h_1(n)} \longrightarrow y(n) = h_1(n) * x_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x_1(k) \cdot h_1(n-k)$$

$$X_1(\Omega) \longrightarrow \boxed{H_1(\Omega)} \longrightarrow Y(\Omega) = H_1(\Omega) \cdot X_1(\Omega) \xleftarrow{F^{-1}} y(n) = h_1(n) * x_1(n)$$

Αν η εισόδου είναι ακολουθία N_1 -σημείων και η κρουστική απόκριση είναι ακολουθία N_2 -σημείων τότε η έξοδος του συστήματος είναι ακολουθία $(N_1 + N_2 - 1)$ -σημείων.

Οι ακολουθίες $x(n)$ και $h(n)$ σχηματίζονται από τις ακολουθίες $x_1(n)$ και $h_1(n)$ προσθέτοντας στοιχεία μηδενικής τιμής σε κάθε μία από αυτές, έτσι ώστε το μήκος τους να γίνει ίσο με $N \geq N_1 + N_2 - 1$.

$$X(k) \longrightarrow \boxed{H(k)} \longrightarrow y(n) = h(n) \circledN x(n) \xleftarrow{F} H(k) \cdot X(k)$$

Η κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών $x(n)$ και $h(n)$ είναι ισοδύναμη με τη γραμμική συνέλιξη των ακολουθιών $x_1(n)$ και $h_1(n)$.

■ Παράδειγμα

Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι $h_1(n) = [3, 2, 1]$. Με τη βοήθεια του διακριτού μετασχηματισμού Fourier να υπολογίσετε την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι το σήμα $x_1(n) = [1, 2, 3, 4]$.

Απάντηση

$$y(n) = [3, 8, 14, 20, 11, 4]$$

Παρατηρήσεις

Αν προσδιορίσουμε την έξοδο του συστήματος χρησιμοποιώντας κυκλική συνέλιξη 5-σημείων προσδιορίζεται η ακολουθία $[7, 8, 14, 20, 11]$. Η ακολουθία αυτή έχει προέλθει από την $[3, 8, 14, 20, 11, 4]$ με αναδίπλωση του στοιχείου 4, δηλαδή, $[7, 8, 14, 20, 11] = [3+4, 8, 14, 20, 11]$.

Αν προσδιορίσουμε την έξοδο του συστήματος χρησιμοποιώντας κυκλική συνέλιξη 4-σημείων προσδιορίζεται η ακολουθία $[14, 12, 14, 20]$. Η ακολουθία αυτή έχει προέλθει από την $[3, 8, 14, 20, 11, 4]$ με αναδίπλωση των στοιχείων 11 και 4, δηλαδή, $[14, 12, 14, 20] = [3+11, 8+4, 14, 20]$.

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier σε μορφή πινάκων

Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση ανάλυσης του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

$$X_N(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

για $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{array}{rcllcl} X_N(0) & = & e^0 x(0) & + e^0 x(1) & + e^0 x(2) & \dots & + e^0 x(N-1) \\ X_N(1) & = & e^0 x(0) & + e^{-j\frac{2\pi}{N}} x(1) & + e^{-j\frac{2\pi}{N}2} x(2) & \dots & + e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} x(N-1) \\ X_N(2) & = & e^0 x(0) & + e^{-j2\frac{2\pi}{N}} x(1) & + e^{-j2\frac{2\pi}{N}2} x(2) & \dots & + e^{-j2\frac{2\pi}{N}(N-1)} x(N-1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_N(N-1) & = & e^0 x(0) & + e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}} x(1) & + e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}2} x(2) & \dots & + e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}(N-1)} x(N-1) \end{array}$$

ή με μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} X_N(0) \\ X_N(1) \\ X_N(2) \\ \vdots \\ X_N(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^0 & e^0 & e^0 & \dots & e^0 \\ e^0 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ e^0 & e^{-j2\frac{2\pi}{N}} & e^{-j2\frac{2\pi}{N}2} & \dots & e^{-j2\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^0 & e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}} & e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}2} & \dots & e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_N(0) \\ X_N(1) \\ X_N(2) \\ \vdots \\ X_N(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^0 & e^0 & e^0 & \dots & e^0 \\ e^0 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ e^0 & e^{-j2\frac{2\pi}{N}} & e^{-j2\frac{2\pi}{N}2} & \dots & e^{-j2\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^0 & e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}} & e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}2} & \dots & e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

αν $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ είναι η $N_{οοστη}$ ρίζα της μονάδας τότε

$$X_N(k) = \text{DFT}[x(t)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

και

$$\begin{bmatrix} X_N(0) \\ X_N(1) \\ X_N(2) \\ \vdots \\ X_N(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

ή με τη μορφή πινάκων

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \cdot \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} X_N(0) \\ X_N(1) \\ X_N(2) \\ \vdots \\ X_N(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

ή με τη μορφή πινάκων

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \cdot \mathbf{x}$$

Ο πίνακας \mathbf{W}_N δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{W}_N \equiv \left[W_N^{kn}, 0 \leq k, n \leq N-1 \right] = \begin{matrix} & & & n \rightarrow \\ \downarrow k & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ο πίνακας \mathbf{W}_N είναι ένας τετραγωνικός πίνακας και ονομάζεται πίνακας DFT

$$\begin{bmatrix} X_N(0) \\ X_N(1) \\ X_N(2) \\ \vdots \\ X_N(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_N(0) \\ X_N(1) \\ X_N(2) \\ \vdots \\ X_N(N-1) \end{bmatrix} = W_N \begin{matrix} \begin{matrix} & & n \rightarrow \\ \begin{matrix} k \downarrow \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N-1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & N-1 \\ 0 & 2 & 4 & \dots & 2(N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & N-1 & 2(N-1) & \dots & (N-1)^2 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Η τελευταία σχέση πραγματοποιείται με τη βοήθεια του MATLAB χρησιμοποιώντας γινόμενο πίνακα επί διάνυσμα

$$X = x * (\exp(-j * \pi / M)). ^ (n' * k);$$

```
>> n = 0:1:2;
>> k = 0:1:2;
>> n'*k
ans =
    0    0    0
    0    1    2
    0    2    4
```

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier σε μορφή πινάκων

Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση σύνθεσης του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

$$\begin{aligned} x(n) = \text{IDFT}[X_N(k)] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

για $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^0 & e^0 & e^0 & \dots & e^0 \\ e^0 & e^{j\frac{2\pi}{N}} & e^{j\frac{2\pi}{N}2} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ e^0 & e^{j2\frac{2\pi}{N}} & e^{j2\frac{2\pi}{N}2} & \dots & e^{j2\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^0 & e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}} & e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}2} & \dots & e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_N(0) \\ X_N(1) \\ X_N(2) \\ \vdots \\ X_N(N-1) \end{bmatrix}$$

ή

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \cdot \mathbf{X}$$

Ταχύς μετασχηματισμός Fourier

Ο πίνακας W ο οποίος χρησιμοποιείται κατά τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier είναι συμμετρικός. Αξιοποιώντας τη συμμετρία και τη περιοδικότητα των τιμών του πίνακα καταλήγουμε σε μεθόδους υπολογισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier με αρκετά λιγότερες πράξεις.

Έχουν αναπτυχθεί ένα πλήθος από διαφορετικούς αλγόριθμους που επιτυγχάνουν το σκοπό αυτό. Οι διαφορές τους βρίσκονται στο πλήθος και το είδος των πράξεων καθώς και στο μέγεθος της απαιτούμενης μνήμης. Θα αναφέρουμε τον αλγόριθμο των Cooley-Tukey, ο οποίο προτάθηκε το 1965.

Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να εφαρμοστεί σε ακολουθίες $N = 2^n$ -σημείων.

Με το παράδειγμα που ακολουθεί θα παρουσιαστεί η δυνατότητα περιορισμού των απαιτούμενων πράξεων λόγω των ιδιοτήτων της συμμετρίας και της περιοδικότητας που παρουσιάζει ο πίνακας W .

■ Παράδειγμα

Να βρεθεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier 4-σημείων της ακολουθίας

$$x(n) = [x(0), x(1), x(2), x(3)]$$

Λύση

Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση ανάλυσης του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

$$X_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_4^{nk}, \quad 0 \leq k \leq 3, \quad W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = -j$$

για $k = 0, 1, 2$ και 3 και εκφράσουμε τις εξισώσεις σε μορφή πινάκων έχουμε

$$\begin{bmatrix} X_4(0) \\ X_4(1) \\ X_4(2) \\ X_4(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Επειδή $W_4^0 = W_4^4 = 1$, $W_4^1 = W_4^9 = -j$, $W_4^2 = W_4^6 = -1$ και $W_4^3 = j$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} X_4(0) \\ X_4(1) \\ X_4(2) \\ X_4(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_4(0) \\ X_4(1) \\ X_4(2) \\ X_4(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία έχουμε

$$X_4(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = \underbrace{[x(0) + x(2)]}_{g_1} + \underbrace{[x(1) + x(3)]}_{g_2}$$

$$X_4(1) = x(0) - jx(1) - x(2) + jx(3) = \underbrace{[x(0) - x(2)]}_{h_1} - j \underbrace{[x(1) - x(3)]}_{h_2}$$

$$X_4(2) = x(0) - x(1) + x(2) - x(3) = \underbrace{[x(0) + x(2)]}_{g_1} - j \underbrace{[x(1) - x(3)]}_{g_2}$$

$$X_4(3) = x(0) + jx(1) - x(2) - jx(3) = \underbrace{[x(0) - x(2)]}_{h_1} + j \underbrace{[x(1) - x(3)]}_{h_2}$$

Οι σχέσεις αυτές οδηγούν σε ένα αποτελεσματικό αλγόριθμο που έχει δύο βήματα

$$\begin{array}{l} 1 \text{ βήμα} \\ g_1 = x(0) + x(2) \\ g_2 = x(1) + x(3) \\ h_1 = x(0) - x(2) \\ h_2 = x(1) - x(3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \text{ βήμα} \\ X(0) = g_1 + g_2 \\ X(1) = h_1 - j h_2 \\ X(2) = g_1 - g_2 \\ X(3) = h_1 + j h_2 \end{array}$$

- ▶ Η ακολουθία 4-σημείων $x(n)$ διαιρείται σε δύο ακολουθίες 2-σημείων με τις οποίες σχηματίζονται δύο διανύσματα στήλες ως

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x(1) \\ x(3) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) \\ x(2) & x(3) \end{bmatrix}$$

- ▶ προσδιορίζεται ο DFT 2-σημείων για κάθε στήλη

$$\mathbf{W}_2 \begin{bmatrix} x(0) & x(1) \\ x(2) & x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) & x(1) \\ x(2) & x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) + x(2) & x(1) + x(3) \\ x(0) - x(2) & x(1) - x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$$

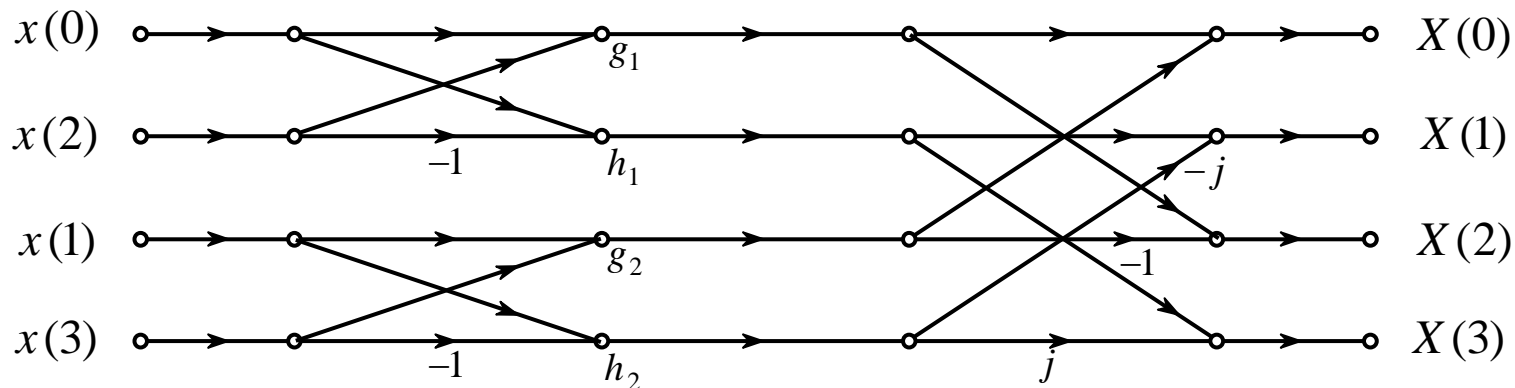
- ▶ κάθε στοιχείο του πίνακα πολλαπλασιάζεται με $\{W_4^{pq}\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -j \end{bmatrix} \cdot \underset{\downarrow p}{*} \overset{q \rightarrow}{\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & -jh_2 \end{bmatrix}$$

- ▶ και τέλος προσδιορίζεται ο DFT 2-σημείων για κάθε γραμμή

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & -jh_2 \end{bmatrix} \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & -jh_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & g_1 - g_2 \\ h_1 - jh_2 & h_1 + jh_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) & X(2) \\ X(1) & X(3) \end{bmatrix}$$

	$g_1 = x(0) + x(2)$		$X(0) = g_1 + g_2$
1 βήμα	$g_2 = x(1) + x(3)$	2 βήμα	$X(1) = h_1 - j h_2$
	$h_1 = x(0) - x(2)$		$X(2) = g_1 - g_2$
	$h_2 = x(1) - x(3)$		$X(3) = h_1 + j h_2$



Διάγραμμα ροής διακριτού μετασχηματισμού Fourier τεσσάρων σημείων

Η διάταξη των δειγμάτων του διακριτού μετασχηματισμού Fourier στην έξοδο είναι κανονική, δηλαδή, $X(0)$, $X(1)$, $X(2)$ και $X(3)$, σε αντίθεση η διάταξη των δειγμάτων εισόδου είναι μη κανονική, $x(0)$, $x(2)$, $x(1)$ και $x(3)$.

Η διάταξη αυτή προκύπτει από τη κανονική διάταξη των δειγμάτων με αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων στη δυαδική αναπαράσταση των δεικτών (*bit reversal*).

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι σε κάθε στάδιο οι έξοδοι μπορούν να αποθηκεύονται στις ίδιες θέσεις μνήμης, που ήταν αποθηκευμένες οι αντίστοιχες είσοδοι του σταδίου.

Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε τα συμπεράσματα του παραδείγματος

Αρχικά, η ακολουθία των N όρων $x(n)$ χωρίζεται σε δύο ακολουθίες μήκους $N/2$ η κάθε μία, τις $g_1(n) = x(2n)$ και $g_2(n) = x(2n+1)$, για $n = 0, 1, \dots, (N/2-1)$ οι οποίες αποτελούνται από τους όρους με άρτιους και περιττούς δείκτες αντίστοιχα.

Η εξίσωση ανάλυσης του διακριτού μετασχηματισμού Fourier γράφεται

$$\begin{aligned} X_N(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_N^{2nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_N^{2nk} \end{aligned}$$

Επειδή $W_N^{2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}nk} = W_{N/2}^{2nk}$ έχουμε

$$X(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_N^{2nk}}_{G_1(k)} + W_N^k \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_{N/2}^{nk}}_{G_2(k)}$$

$$X(k) = G_1(k) + W_N^k G_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Επιπλέον επειδή

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{N}{2})} = e^{-j\pi} e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = -W_N^k, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

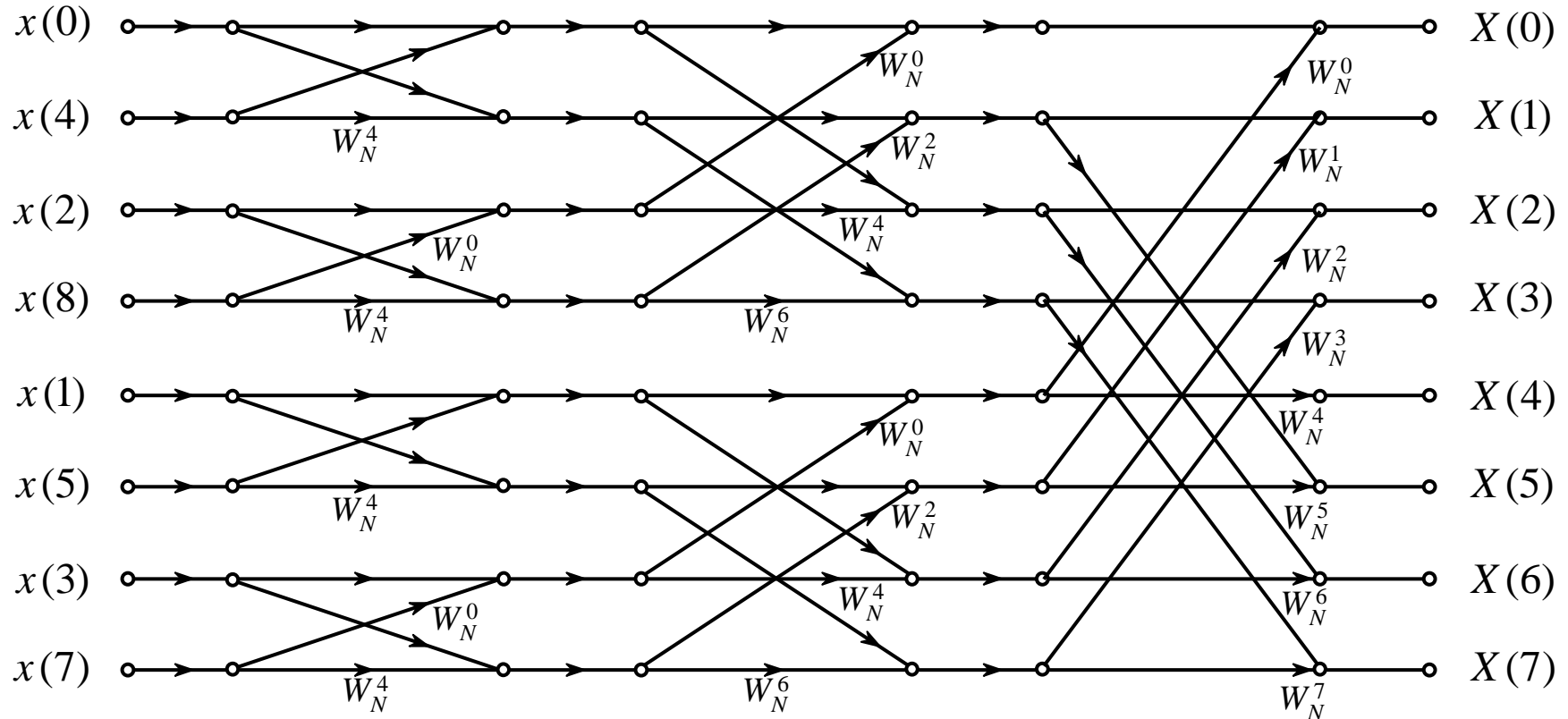
και αν $k = k + \frac{N}{2}$ έχουμε

$$X(k) = X\left(k + \frac{N}{2}\right) = G_1(k) + W_N^k G_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός του $X(k)$ έχει εκφραστεί με τη βοήθεια δύο διακριτών μετασχηματισμών Fourier με πλήθος σημείων $N/2$ ο καθένας.

Η διαδικασία ανάλυσης που ακολουθήθηκε προηγουμένως μπορεί να συνεχιστεί και για τον υπολογισμό των δύο νέων διακριτών μετασχηματισμών Fourier $G_1(k)$ και $G_2(k)$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε σε διακριτό μετασχηματισμό Fourier 2-σημείων που είναι εύκολο να υπολογιστεί.

Σημειώνεται ότι ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier δεν αποτελεί νέο μετασχηματισμό Fourier αλλά αποτελεί μία αποδοτική αλγοριθμική μέθοδο με την έννοια ότι ελαττώνει την υπολογιστική πολυπλοκότητα, δηλαδή, το συνολικό πλήθος πράξεων (πολλαπλασιασμών και προσθέσεων). Πράγματι, η υπολογιστική πολυπλοκότητα του ταχύ μετασχηματισμού Fourier είναι της τάξεως $N \log_2 N$ και όχι N^2 του διακριτού μετασχηματισμού Fourier.



Διάγραμμα ροής διακριτού μετασχηματισμού Fourier οκτώ σημείων

Η διάταξη των δειγμάτων του διακριτού μετασχηματισμού Fourier στην έξοδο είναι κανονική, δηλαδή, $X(0), X(1), X(2), \dots, X(7)$.

Σε αντίθεση η διάταξη των δειγμάτων εισόδου είναι μη κανονική, δηλαδή, $x(0), x(4), x(2), x(6), x(1), x(5), x(3), x(7)$. Η διάταξη αυτή προκύπτει από την κανονική διάταξη των δειγμάτων με αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων στη δυαδική αναπαράσταση των δεικτών (*bit reversal*)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Με τη βοήθεια της ιδιότητας της συνέλιξης μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y(n)$ ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου το οποίο έχει κρουστική απόκριση $h(n)$, όταν γνωρίζουμε την είσοδό του $x(n)$.

■ Παράδειγμα

Δίνεται το γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα το οποίο έχει κρουστική απόκριση

$$h(n) = a^n u(n)$$

Αν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα:

$$x(n) = \beta^n u(n)$$

Να προσδιοριστεί η έξοδος του συστήματος.

Απάντηση

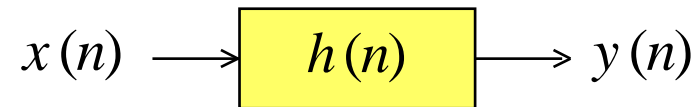
Αν $a \neq \beta$ η είσοδος του συστήματος είναι

$$y(n) = \frac{1}{a-b} [a^{n+1} - \beta^{n+1}] u(n)$$

Αν $a = \beta$ η είσοδος του συστήματος είναι

$$y(n) = (n+1) a^n u(n)$$

► Συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές



Το σήμα εισόδου $x(n)$ και το σήμα εξόδου $y(n)$ ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου ικανοποιούν μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad \text{με } a_0 = 1$$

Το σήμα εισόδου, $x(n)$, και το σήμα εξόδου, $y(n)$, ενός ΓΧΑ συστήματος συνδέονται με το άθροισμα της συνέλιξης.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

Η απόκριση συχνότητας του ΓΧΑ συστήματος είναι

$$H(\Omega) = \frac{\sum_{K=0}^M b_k e^{-j k \Omega}}{\sum_{K=0}^M a_k e^{-j k \Omega}}$$

■ Παράδειγμα (σύστημα πρώτης τάξης)

Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου, το οποίο αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία, και χαρακτηρίζεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n] - a y(n-1) = x(n) \quad \text{με} \quad |a| < 1$$

Να βρεθούν η απόκριση συχνότητας, η κρουστική απόκριση του συστήματος και η απόκριση του συστήματος στο μοναδιαίο βήμα.

Απάντηση

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(n) = a^n u(n)$$

Η απόκριση του συστήματος στο μοναδιαίο βήμα είναι

$$y(n) = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u(n)$$

■ Παράδειγμα

Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου, το οποίο αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία, και χαρακτηρίζεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - \frac{3}{4} y(n-1) + \frac{1}{8} y(n-2) = 2x(n)$$

Να βρεθούν η απόκριση συχνότητας και η κρουστική απόκριση του συστήματος. Αν η είσοδος του συστήματος είναι

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

Να βρεθεί το σήμα εξόδου του συστήματος.

Απάντηση

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι

$$H(\Omega) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} e^{-j\Omega} + \frac{1}{8} e^{-j2\Omega}}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(n) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

Το σήμα εξόδου του συστήματος είναι

$$y(n) = -4\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

■ Παράδειγμα

Δίνεται σύστημα διακριτού χρόνου του οποίου η σχέση μεταξύ των σημάτων εισόδου εξόδου περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n] = \frac{1}{2} x[n] + \frac{1}{2} x[n-1]$$

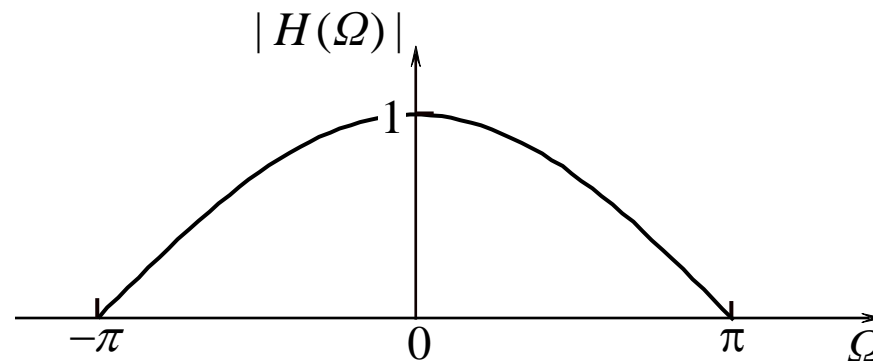
Να βρεθεί η κρουστική απόκριση, η απόκριση συχνότητας του συστήματος και να γίνει η γραφική παράσταση της απόκρισης πλάτους.

Απάντηση

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι $h[n] = \frac{1}{2} \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1]$

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι $H(\Omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega} = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)$

Η γραφική παράσταση της απόκρισης πλάτους του συστήματος είναι



■ Παράδειγμα

Δίνεται σύστημα διακριτού χρόνου του οποίου η σχέση μεταξύ των σημάτων εισόδου εξόδου περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n] = x[n] + a x[n-1]$$

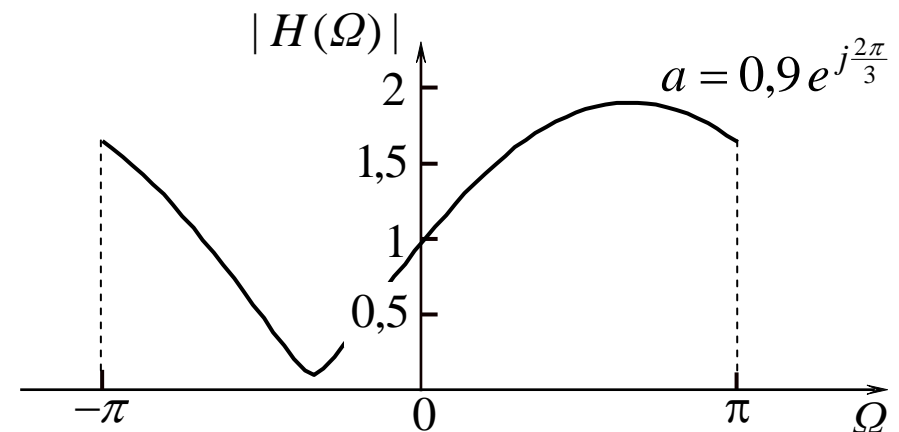
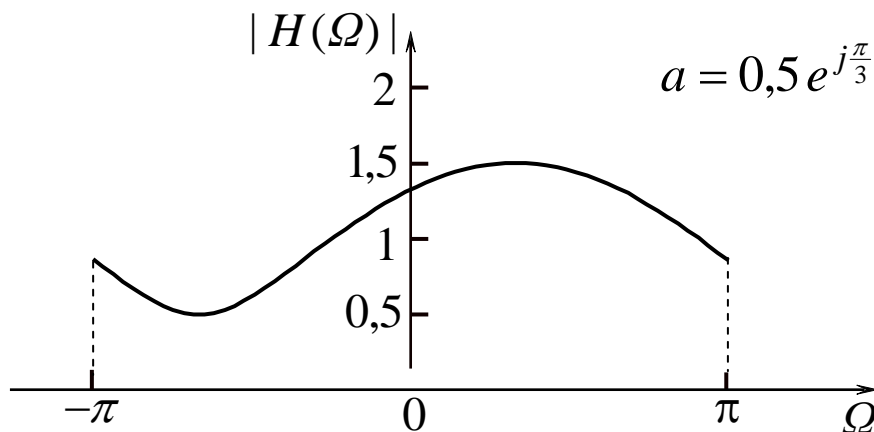
Να βρεθεί η κρουστική απόκριση, η απόκριση συχνότητας του συστήματος και να γίνει η γραφική παράσταση της απόκρισης πλάτους.

Απάντηση

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι $h[n] = \delta[n] + a \delta[n-1]$

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι $H(\Omega) = 1 + |a| e^{-j(\Omega - \arg\{a\})}$

Η γραφική παράσταση της απόκρισης πλάτους του συστήματος είναι



Σε πολλές εφαρμογές πραγματικού χρόνου, η ακολουθία εισόδου ενός FIR φίλτρου έχει μεγάλο μήκος, παραδείγματος χάριν η ακολουθία που προέρχεται από σήμα ομιλίας ενός μικροφώνου, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως μία ακολουθία απείρου μήκους.

Η έξοδος του φίλτρου υπολογίζεται με τη βοήθεια γραμμικής συνέλιξης χρησιμοποιώντας ταχύ μετασχηματισμό Fourier ο οποίος θα έχει φυσικά μεγάλο μήκος. Επιπλέον δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός της εξόδου πριν επεξεργαστούμε όλα τα δείγματα της εισόδου, και αυτό δημιουργεί μεγάλη καθυστέρηση.

Στις περιπτώσεις αυτές υπολογίζεται η επιμέρους έξοδοι του συστήματος όταν είναι γνωστό ένα τμήμα (μπλοκ) της ακολουθίας εισόδου με τη βοήθεια ταχύ μετασχηματισμού Fourier που τώρα έχει μικρό μήκος. Στη συνέχεια υπολογίζεται η έξοδος του φίλτρου με τη βοήθεια των επιμέρους εξόδων του φίλτρου.

Τα παραπάνω επεξηγούνται με το παράδειγμα που ακολουθεί.

■ Παράδειγμα

Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου που έχει κρουστική απόκριση

$$h(n) = [1, 0, -1]$$

Αν η είσοδος του συστήματος είναι η ακολουθία

$$x(n) = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$$

να βρεθεί η έξοδος του συστήματος με τη βοήθεια κυκλικής συνέλιξης 6-σημείων.

Λύση:

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι ακολουθία $N_2=3$ -σημείων. Αν η ακολουθία εισόδου καταταμηθεί σε ακολουθίες $N_1=6$ -σημείων τότε είναι γνωστό ότι η γραμμική συνέλιξη κάθε υποακολουθίας με την κρουστική απόκριση θα είναι ακολουθία $N_1+N_2-1=8$ -σημείων. Αν χρησιμοποιηθεί κυκλική συνέλιξη $N=6$ -σημείων τότε τα πρώτα $N_1+N_2+1-N=2$ στοιχεία κάθε ακολουθίας θα είναι εσφαλμένα λόγω του φαινομένου της επικάλυψης.

$$x(n) = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] \Rightarrow \begin{cases} x_1(n) = [0, 0, 1, 2, 3, 4] \\ x_2(n) = [3, 4, 5, 6, 7, 8] \\ x_3(n) = [7, 8, 9, 10, 0, 0] \end{cases}$$

Κάθε υποακολουθία επικαλύπτεται με την προηγούμενή της στους δύο πρώτους όρους. Στην τελευταία υποακολουθία έχουν προστεθεί μηδενικά ώστε να γίνει ακολουθία 6-σημείων.

Η κυκλική συνέλιξη 6-σημείων κάθε υποακολουθίας $x_k(n)$, $k = 1, 2$ και 3 με την κρουστική απόκριση του συστήματος δίνει τις ακολουθίες

$$y_1(n) = x_1(n) \textcircled{4} h(n) = [-3, -4, 1, 2, 2, 2]$$

$$y_2(n) = x_2(n) \textcircled{4} h(n) = [-4, -4, 2, 2, 2, 2]$$

$$y_3(n) = x_3(n) \textcircled{4} h(n) = [7, 8, 2, 2, -9, -10]$$

Από τις ακολουθίες $y_k(n)$, $k = 1, 2$ και 3 διαγράφουμε τους δύο πρώτους όρους οι οποίοι λόγω της επικάλυψης είναι εσφαλμένοι και σχηματίζεται η ακολουθία

$$y(n) = x(n) * h(n) = [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, -9, -10]$$

Η ακολουθία αυτή είναι ίση με την γραμμική συνέλιξη.