Αν $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ είναι ένα 2 διάστατο διάνυσμα τότε είναι:

$$c = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad , \quad s = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

τότε η περιστροφή Givens είναι:

$$J(1,2,\theta) = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$ τέτοια ώστε να ισχύει: $J(1,2,\theta)\,x = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$

<u>Αλγόριθμος 1</u> <u>Υπολογισμός των παραμέτρων c και s της περιστροφής</u> του Givens $J(1,2,\theta)$

Δίδονται x

<u>Β1</u> Αν $|x_2| \geq |x_1|$ τότε $t = \frac{x_1}{x_2}$, $s = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $c = st$

<u>Β2</u> Αν $|x_2| < |x_1|$ τότε $t = \frac{x_2}{x_1}$, $c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $s = ct$

<u>Πολυπλοκότητα</u>: 4 flops και 1 τετραγωνική ρίζα

<u>Αλγόριθμος 2</u> <u>Υπολογισμός του πολλαπλ. από αριστερά ενός πίνακα A με τον πίνακα περιστροφής του Givens $J(i,j,\theta)$</u>.

Δίδονται m, n, A, c, s , i, j $(1 \leq i \leq j \leq m)$

Για $k = 1(1)n$

$a = a_{ik}$

$b = a_{jk}$

$a_{ik} = ac + bs$

$a_{jk} = -as + bc$

<u>Πολυπλοκότητα</u>: $4n$ flops

Αλγόριθμος 3 Δημιουργία μηδενικών σε μια συγκεκριμένη θέση (j,i) ενός $n\times n$ πίνακα A με την εφαρμογή περιστροφής Givens $J(i,j,\theta)$.

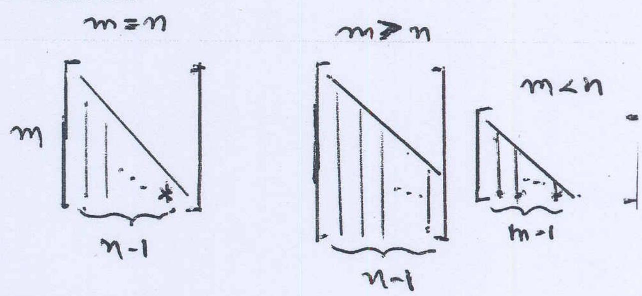
Διάβασε n, A, (j,i).

B1 Εύρεση $c=\cos\theta$ και $s=\sin\theta$ έτσι ώστε

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_{ii} \\ \alpha_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\text{Αλγόριθμος } 1)$$

B2 Θέσε $A = J(i,j,\theta)\,A$ (Αλγόριθμος 2)

Αλγόριθμος 4 Παραγοντοποίηση QR ενός $m\times n$ πίνακα A με εφαρμογή περιστροφών Givens.



Διάβασε m, n, A

Για $k = 1(1)\min\{n, m-1\}$

  Για $l = k+1, \dots, m$

  B1: Εύρεση c και s έτσι ώστε

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_{kk} \\ \alpha_{lk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\text{Αλγόριθμος } 1)$$

  B2 Φύλαξη των δεικτών k και l και των αριθμών c και s

  B3 $A = J(k,l,\theta)\,A$ (Αλγόριθμος 2)

Πολυπλοκότητα: Αν $m \geq n$ τότε ο αλγόριθμος QR με Givens απαιτεί $2n^2(m-\frac{n}{3})$ flops (δεν περιλαμβάνεται ο υπολογισμός του Q)

Αν $m<n$ τότε $2m^2(n-\frac{m}{3})$ flops

διπλάσιος αριθμός flops συγκριτικά με QR με Householder.

Αλγόριθμος Lanczos για συμμετρικούς πίνακες

Υπάρχουν περιοχές εφαρμογών, όπως τα δυναμικά συστήματα, διαστημική, φυσική κλέρων, Πυρηνική, όπου υπάρχουν προβλήματα βιομηχ. για πολύ μεγάλους και αραιούς πίνακες.

Η μέθοδος QR δεν είναι στην πράξη η πιο κατάλληλη για τέτοια προβλήματα διότι με την εφαρμογή της καταστρέφεται η αραιότητα του πίνακα και δημιουργείται πρόβλημα μνήμης.

Αλγόριθμος της μεθόδου Lanczos για συμμετρικούς πίνακες

Έστω A $n\times n$ πίνακας και v_1 μοναδιαίο διάνυσμα.
Ο αλγόριθμος Lanczos κατασκευάζει ταυτόχρονα ένα συμμετρικό τριδιαγώνιο πίνακα T και ένα ορθογώνιο πίνακα V έτσι ώστε

$$T = V^T A V$$

Έστω

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & b_1 & & & \\ b_1 & \alpha_2 & b_2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & \alpha_{n-1} & b_{n-1} \\ \mathbf{0} & & & b_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

και $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$.

διανύσματα Lanczos

$v_{j+1}^T v_j = 1$

Τότε έχουμε:

$$V^T A V = T$$

ή

$$AV = VT$$

ή

$$A\cdot[v_1, v_2, \dots, v_n] = [v_1, v_2, \dots, v_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 & b_1 & & & \\ b_1 & \alpha_2 & b_2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & b_{n-2} & \alpha_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

ή

$$A v_j = \alpha_j v_j + b_{j-1} v_{j-1} + b_j v_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1) \quad (\text{έστω } b_0 v_0 = 0)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) από αριστερά με v_j^T λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνθήκη ορθογωνιότητας δίνει:

$$v_j^T v_j = 1$$
$$v_j^T v_k = 0 \quad \text{για } j \neq k$$

Προκύπτει

$$\alpha_j = v_j^T A v_j \quad , \; j = 1, 2, \ldots, n \qquad (2)$$

Επίσης αν θέσουμε:

$$r_j = A v_j - \alpha_j v_j - \beta_{j-1} v_{j-1} \qquad (3)$$

Τότε από (1) και (3) έχουμε:

$$r_j = \beta_j v_{j+1} \Leftrightarrow v_{j+1} = \frac{r_j}{\beta_j} \quad \text{αν } \beta_j \neq 0.$$

που εξασφαλίζεται αν πάρουμε: $\beta_j = \|r_j\|_2$.

<u>Αλγόριθμος</u> (Βασική συμμετρική μέθοδος Lanczos) κατασκευή συμμ. τριδιαγωνίου T και ορθογωνίου $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ έτσι ώστε $V^T A V = T$

Διάβασε n, A, v_1

Θέσε $v_0 = 0$
$\beta_0 = 1$
$r_0 = v_1$

Για $j = 1(1)n$

$v_j = r_{j-1} / \beta_{j-1}$

$\alpha_j = v_j^T A v_j$

$r_j = (A - \alpha_j I) v_j - \beta_{j-1} v_{j-1}$

$\beta_j = \|r_j\|_2$