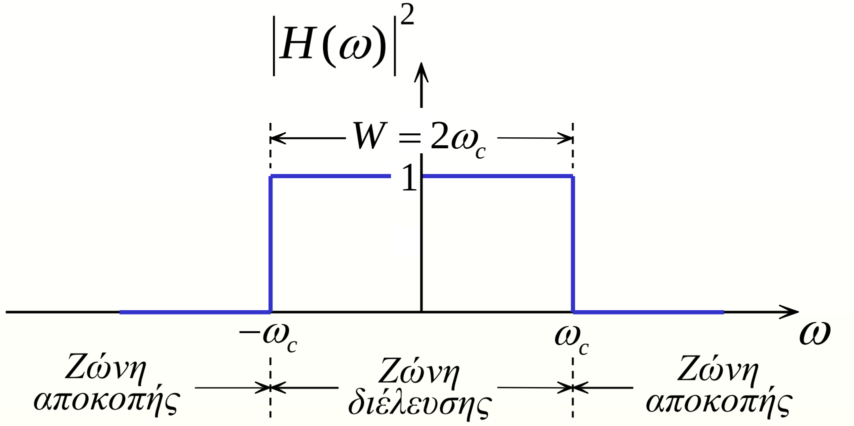
Αναλογικά φίλτρα

Τα IIR φίλτρα είναι επαναληπτικά ή αναδρομικά, με την έννοια ότι δείγματα της εξόδου χρησιμοποιούνται από το σύστημα για τον υπολογισμό των νέων τιμών της εξόδου σε επόμενες χρονικές στιγμές.

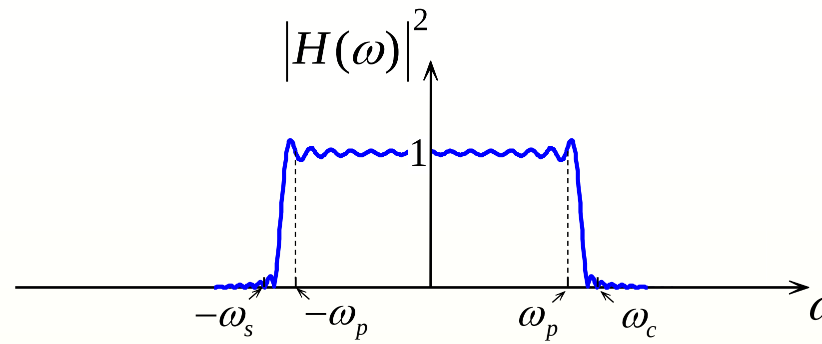
Για να επιτύχουμε μια επιθυμητή απόκριση χρειαζόμαστε σημαντικά λιγότερους συντελεστές για ένα IIR φίλτρο σε σχέση με το αντίστοιχο FIR.

Τα IIR φίλτρα είναι ασταθή, αν οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου.
Τα IIR δεν έχουν γραμμική απόκριση φάσης στη ζώνη διέλευσης, όπως τα μη επαναληπτικά FIR φίλτρα με συμμετρική ή αντισυμμετρική κρουστική απόκριση.

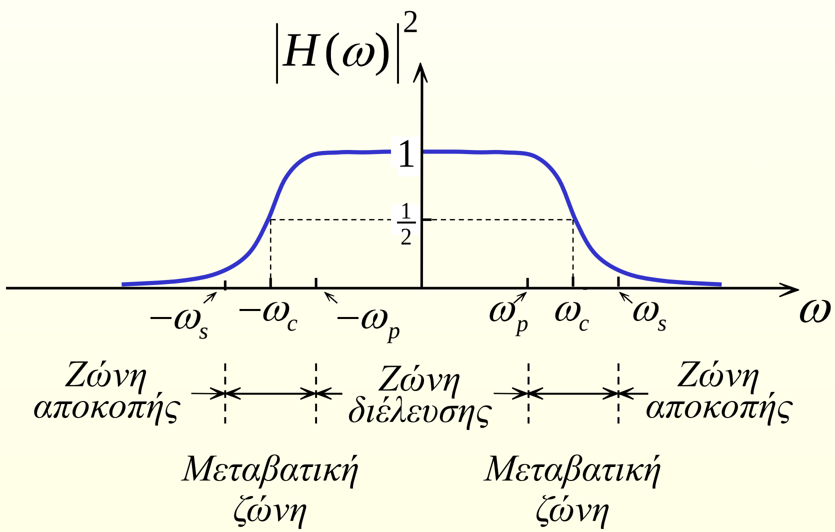
Τα IIR φίλτρα μπορούν εύκολα να σχεδιασθούν αρχίζοντας από ένα αναλογικό φίλτρο και κατόπιν χρησιμοποιώντας κατάλληλη απεικόνιση του επιπέδου-s στο επίπεδο-z.
Αρχικά προσδιορίζεται η $H(s)$ και στη συνέχεια στο $H(z)$, έτσι ώστε τα επιθυμητά χαρακτηριστικά του αναλογικού φίλτρου να διατηρούνται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο



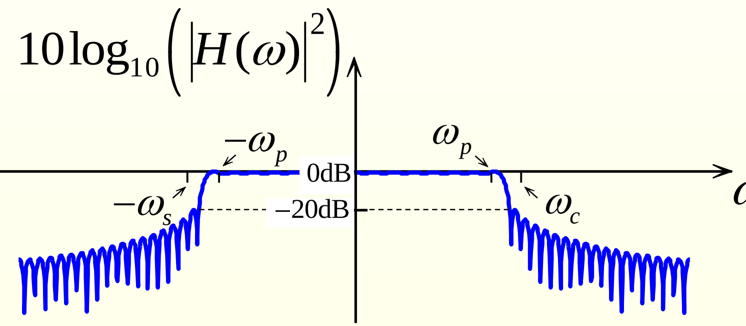
Ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με εύρος-ζώνης $W = 2\omega_c$



Η γραφική παράσταση της απόκρισης ισχύος σε συνάρτηση με τη κυκλική συχνότητα.

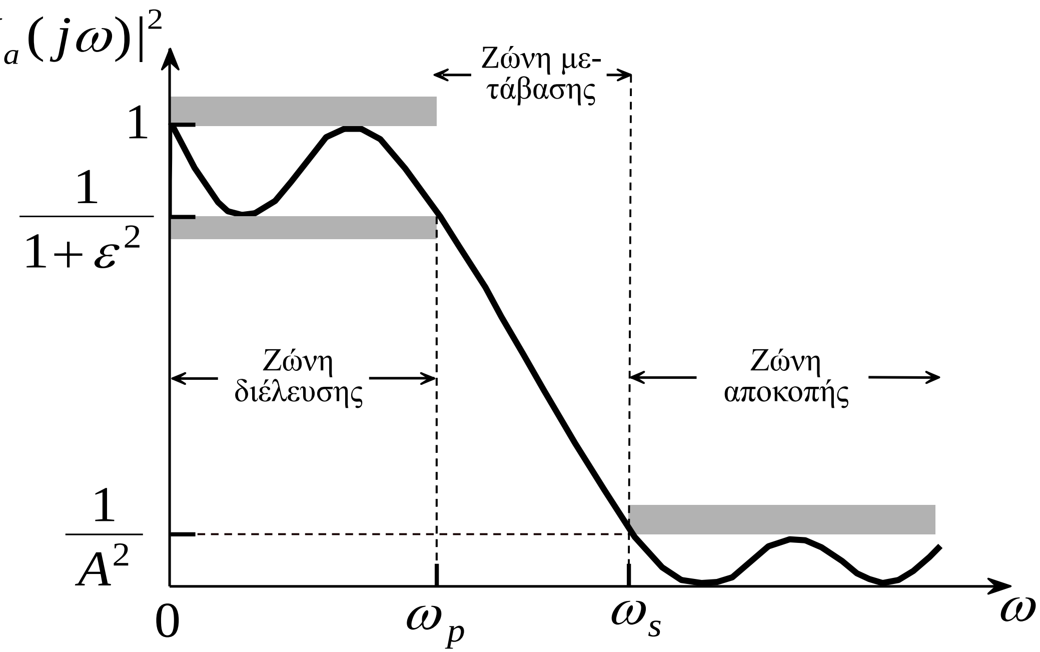


Πραγματικό βαθυπερατό φίλτρο



Η γραφική παράσταση της απόκρισης ισχύος σε dB σε συνάρτηση με τη κυκλική συχνότητα.

Χαρακτηριστικά χαμηλοπερατού αναλογικού φίλτρου



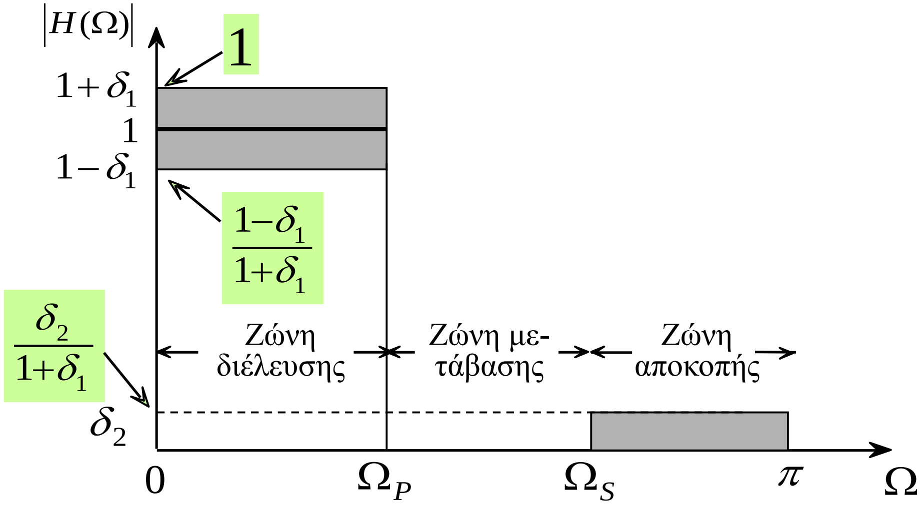
Κανονικοποιημένη απόκριση ισχύος ενός αναλογικού φίλτρου βασικής ζώνης.

ε παράμετρος ταλαντώσεων ζώνης διέλευσης (*passband ripple parameter*)

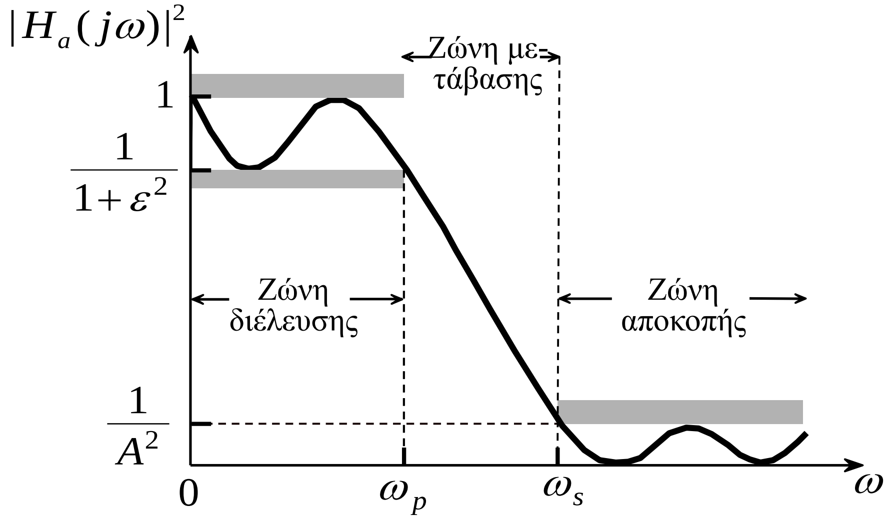
ω_p συχνότητα αποκοπής ζώνης διέλευσης (*passband cutoff frequency*)

A παράμετρος εξασθένησης ζώνης αποκοπής (*stopband attenuation parameter*)

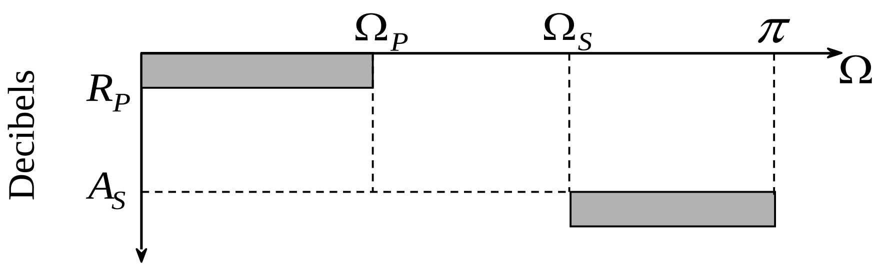
ω_s συχνότητα αποκοπής ζώνης αποκοπής (*stopband cutoff frequency*)



Απόλυτη απόκριση ισχύος ενός ψηφιακού φίλτρου βασικής ζώνης.



Κανονικοποιημένη απόκριση ισχύος ενός αναλογικού φίλτρου βασικής ζώνης.

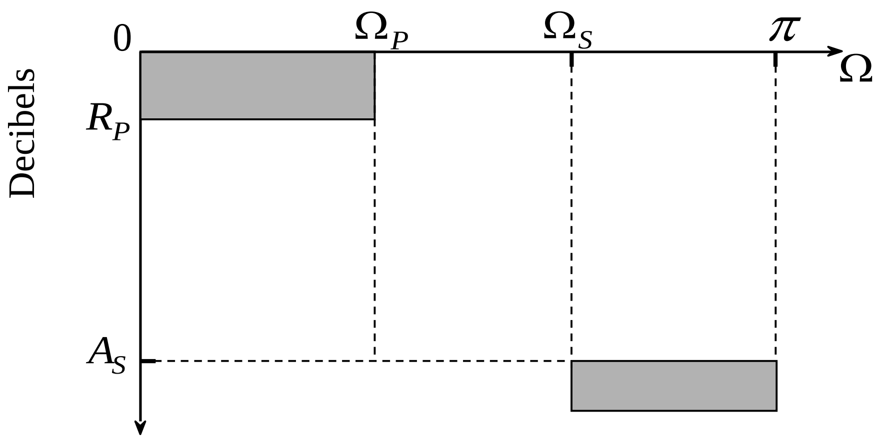


Σχετική απόκριση ισχύος ενός ψηφιακού φίλτρου βασικής ζώνης.

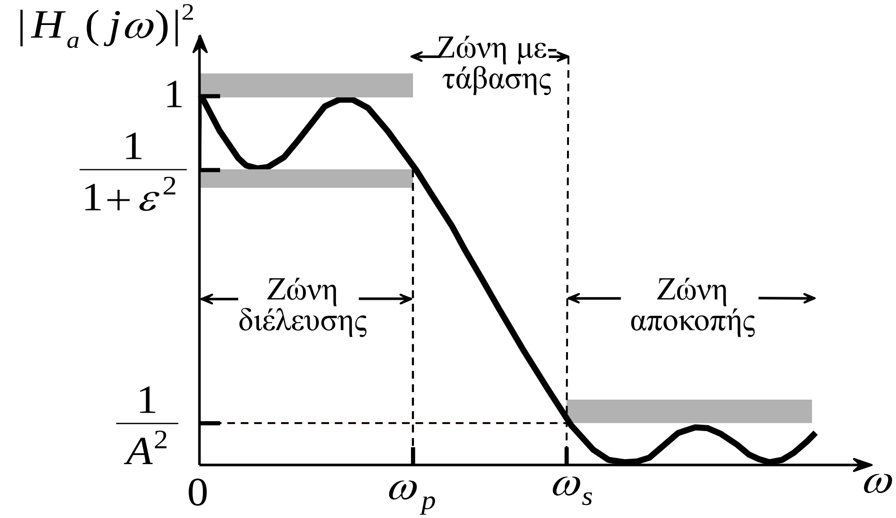
Η απόκριση συχνότητας του αναλογικού φίλτρου ικανοποιεί τις

$$0 \le |H_a(j\omega)|^2 \le \frac{1}{A^2}, \qquad \omega_s \le |\omega|$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2} \le |H_a(j\omega)|^2 \le 1, \qquad |\omega| \le \omega_p$$



Σχετική απόκριση ισχύος ενός ψηφιακού φίλτρου βασικής ζώνης.



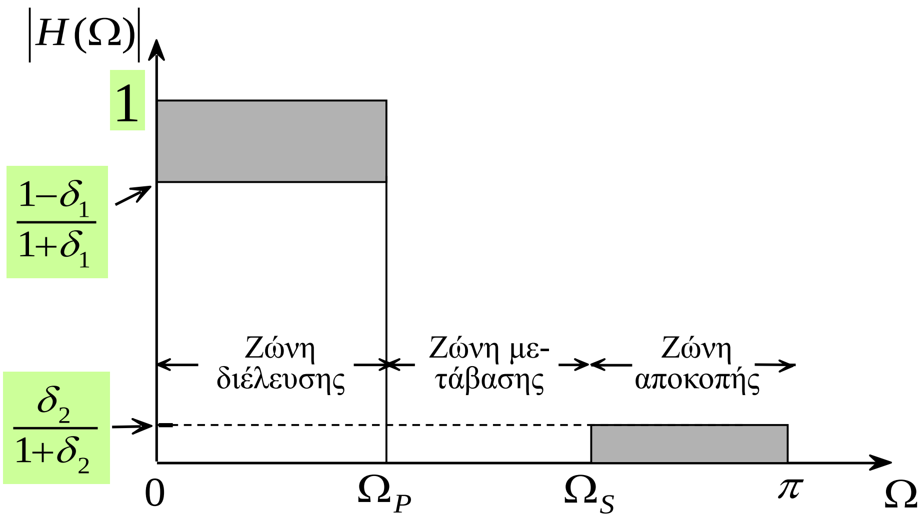
Κανονικοποιημένη απόκριση ισχύος ενός αναλογικού φίλτρου βασικής ζώνης.

Σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων ψηφιακού - αναλογικού φίλτρου

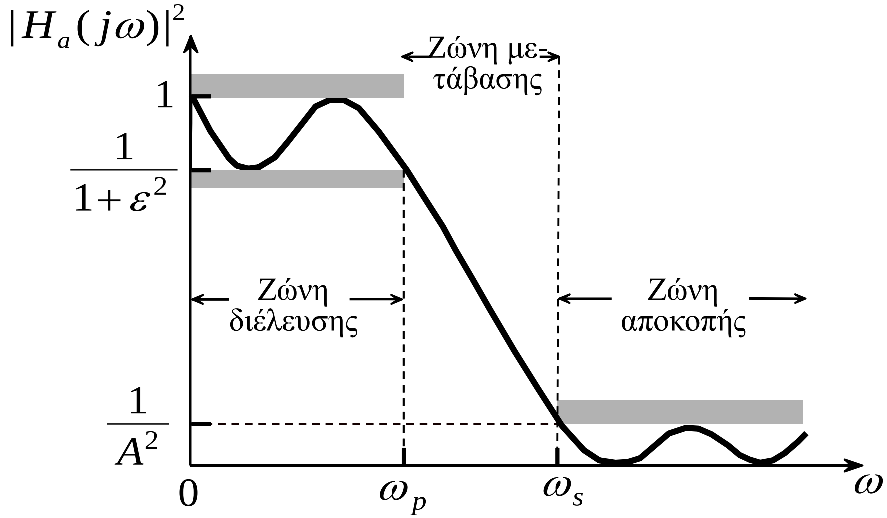
$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \quad \text{στην} \quad \omega = \omega_p \qquad\qquad |H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{A^2} \quad \text{στην} \quad \omega = \omega_s$$

Οι παράμετροι ε και A σχετίζονται με τις R_p και A_s αντίστοιχα στην κλίμακα dB με τις

$$R_p = -10\log_{10}\frac{1}{1+\varepsilon^2} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{R_p/10} - 1} \qquad A_s = -10\log_{10}\frac{1}{A^2} \Rightarrow A = 10^{A_s/20}$$



Απόλυτη απόκριση ισχύος ενός ψηφιακού φίλτρου βασικής ζώνης.



Κανονικοποιημένη απόκριση ισχύος ενός αναλογικού φίλτρου βασικής ζώνης.

Σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων ψηφιακού - αναλογικού φίλτρου

Οι ταλαντώσεις δ_1 και δ_2 σχετίζονται με τις ε και A αντίστοιχα με τις

$$\frac{1-\delta_1}{1+\delta_1} = \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon^2}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\sqrt{\delta_1}}{1-\delta_1}$$

$$\frac{\delta_2}{1+\delta_1} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = \frac{1+\delta_1}{\delta_2}$$

Ιδιότητες της απόκρισης ισχύος αναλογικού φίλτρου

Από τη συνάρτηση μεταφοράς ενός αναλογικού συστήματος προσδιορίζεται η απόκριση συχνότητας του συστήματος αν περιέχεται ο φανταστικός άξονας στο πεδίο σύγκλισης ως

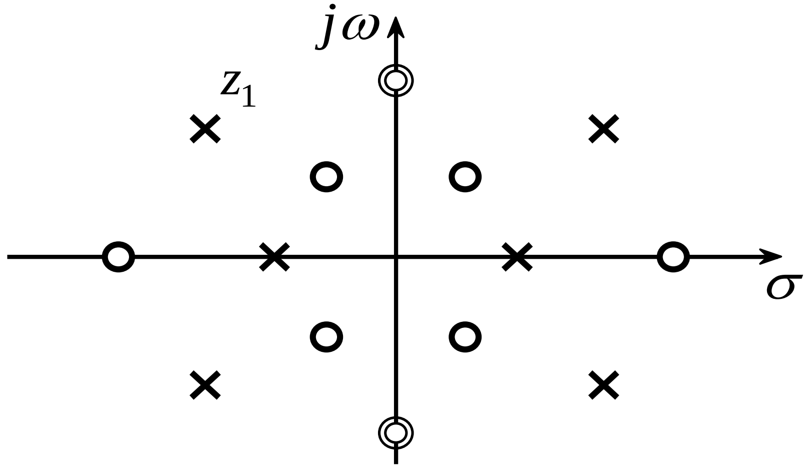
$$H_a(j\omega) = H_a(s)\big|_{s=j\omega}$$

έχουμε για το τετράγωνο του μέτρου της απόκρισης συχνότητας

$$|H_a(j\omega)|^2 = H_a(j\omega)H_a^*(j\omega) = H_a(j\omega)H_a(-j\omega) = H_a(s)H_a(-s)\big|_{s=j\omega}$$

ή ισοδύναμα

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\omega)|^2\big|_{\omega=s/j}$$



Παράδειγμα πόλων και μηδενικών της
$H_a(s)H_a(-s)$

Παρατηρούμε ότι οι πόλοι και τα μηδενικά είναι τοποθετημένα συμμετρικά ως προς το φανταστικό άξονα.

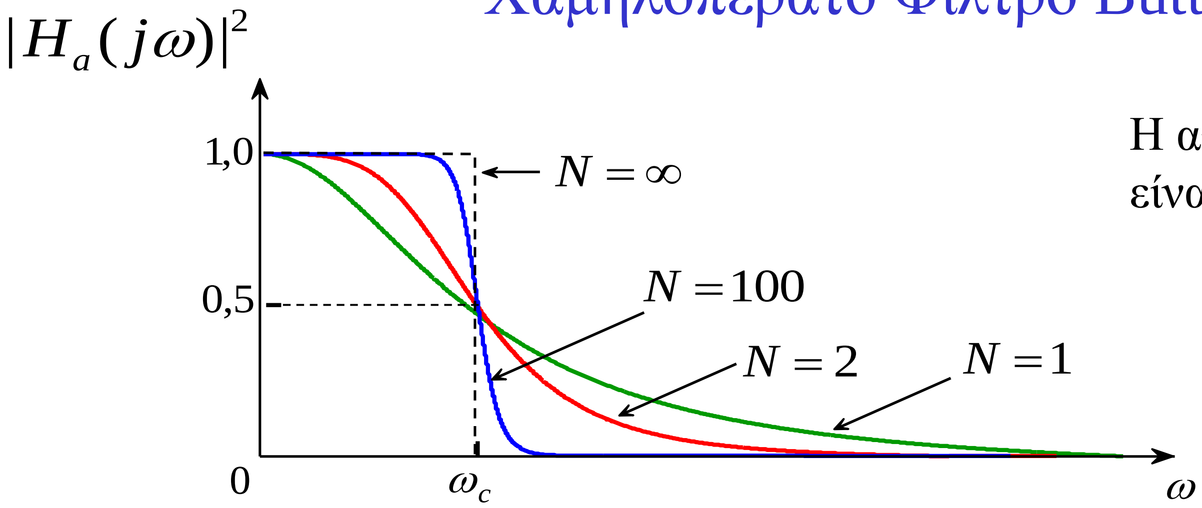
Για πραγματικά φίλτρα οι πόλοι και τα μηδενικά είναι συζυγή, δηλαδή, παρουσιάζουν συμμετρία ως προς τον πραγματικό άξονα.

Αν θέλουμε το αναλογικό φίλτρο να είναι αιτιατό και ευσταθές θα πρέπει οι πόλοι να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο. Έτσι δίνουμε όλους τους πόλους της $H_a(s)H_a(-s)$ που βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο στην $H_a(s)$

Αντίθετα τα μηδενικά της $H_a(s)$ μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο.

Επιλέγουμε τα μηδενικά της $H_a(s)H_a(-s)$ που βρίσκονται στο φανταστικό άξονα ως μηδενικά της $H_a(s)$, και έτσι το φίλτρο είναι φίλτρο ελάχιστης φάσης.

Χαμηλοπερατό Φίλτρο Butterworth



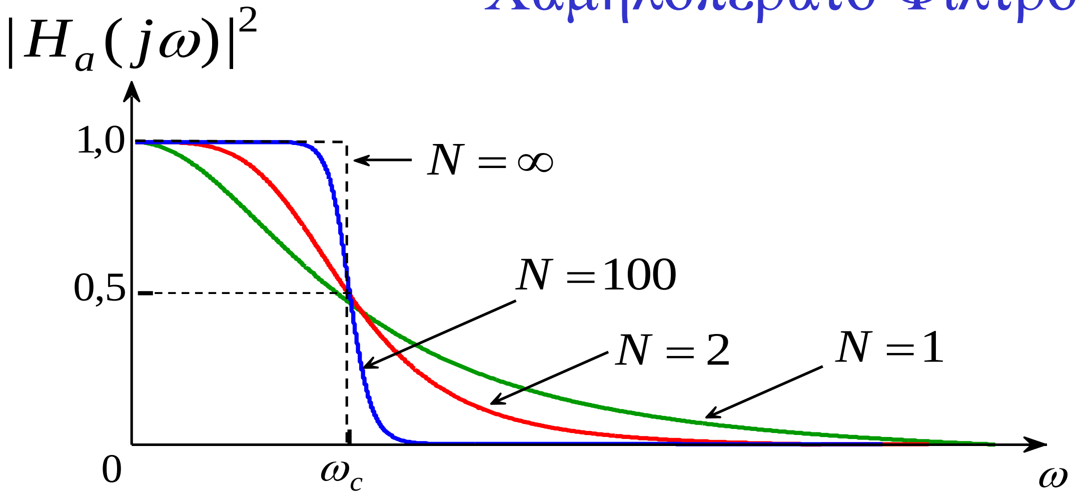
Η απόκριση ισχύος του φίλτρου είναι

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left[\frac{\omega}{\omega_c}\right]^{2N}}$$

Για τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος ισχύουν

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\omega)|^2\Big|_{\omega=s/j} = \frac{1}{1+(s/j\omega_c)^{2N}} = \frac{(j\omega_c)^{2N}}{s^{2N}+(j\omega_c)^{2N}}$$

Χαμηλοπερατό Φίλτρο Butterworth



Η απόκριση ισχύος του φίλτρου είναι

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left[\frac{\omega}{\omega_c}\right]^{2N}}$$

$$H_a(s)\,H_a(-s) = \frac{1}{1+\left(s/\,j\omega_c\right)^{2N}}$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή $\left(\text{ή οι πόλοι της } H_a(s)H_a(-s)\right)$ είναι

$$\frac{s}{j\omega_c} = (-1)^{\frac{1}{2N}} \quad \Rightarrow p_k = (-1)^{\frac{1}{2N}}\, j\omega_c \;=\; \omega_c\, e^{j\frac{\pi}{2}}\; e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+1)} \quad = \omega_c\, e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)}$$

$$p_k = \omega_c\, e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)}, \qquad k = 0,1,\,\ldots,\,2N-1$$

Οι θέσεις των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο

$$p_k = \omega_c \, e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2N-1$$

Για $N = 1$ έχουμε

$$k=0 \;\Rightarrow\; p_0 = \omega_c e^{j\frac{\pi}{2}2} = \omega_c e^{j\pi} = -\omega_c$$

$$k=1 \;\Rightarrow\; p_1 = \omega_c e^{j\frac{\pi}{2}4} = \omega_c e^{j2\pi} = \omega_c$$

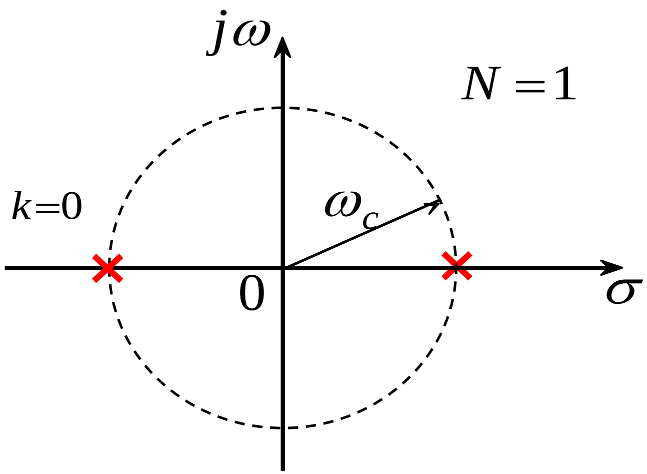
Για $N = 2$ έχουμε

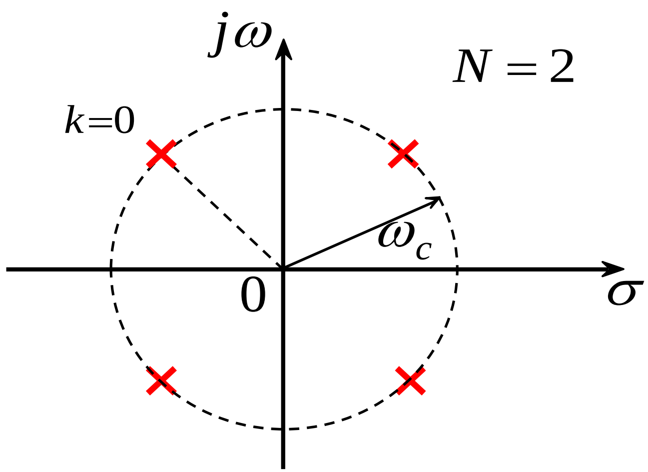
$$k=0 \;\Rightarrow\; p_0 = \omega_c e^{j\frac{\pi}{4}3} = \omega_c \cos\frac{3\pi}{4} + j\omega_c \sin\frac{3\pi}{4}$$

$$k=1 \;\Rightarrow\; p_1 = \omega_c e^{j\frac{\pi}{4}5} = \omega_c \cos\frac{5\pi}{4} + j\omega_c \sin\frac{5\pi}{4}$$

$$k=2 \;\Rightarrow\; p_2 = \omega_c e^{j\frac{\pi}{4}7} = \omega_c \cos\frac{7\pi}{4} + j\omega_c \sin\frac{7\pi}{4}$$

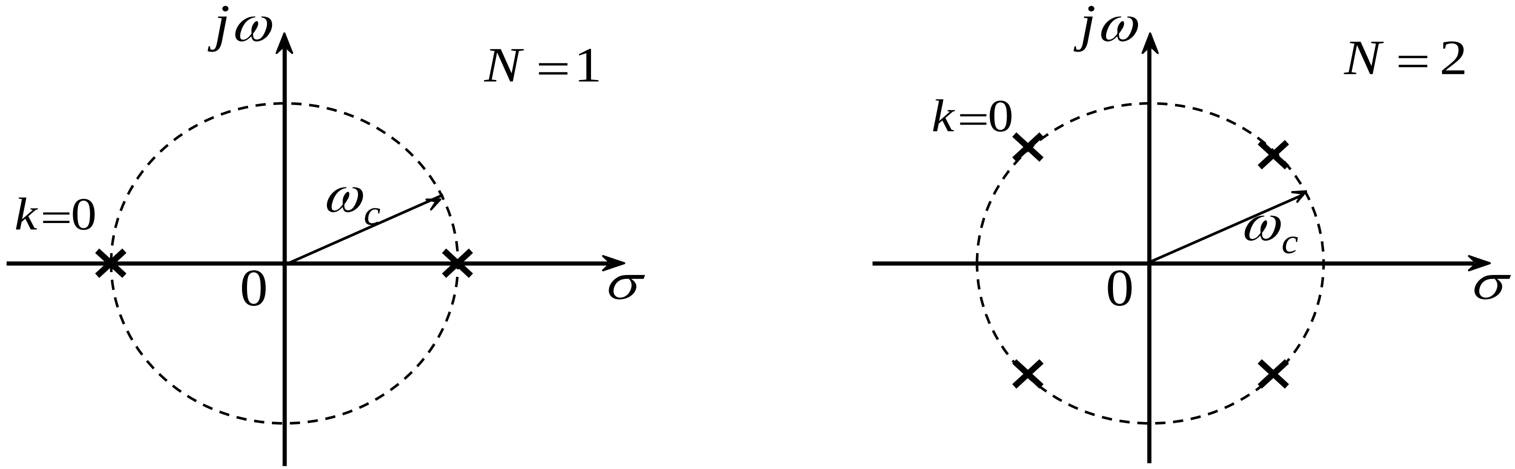
$$k=3 \;\Rightarrow\; p_3 = \omega_c e^{j\frac{\pi}{4}9} = \omega_c \cos\frac{9\pi}{4} + j\omega_c \sin\frac{9\pi}{4}$$



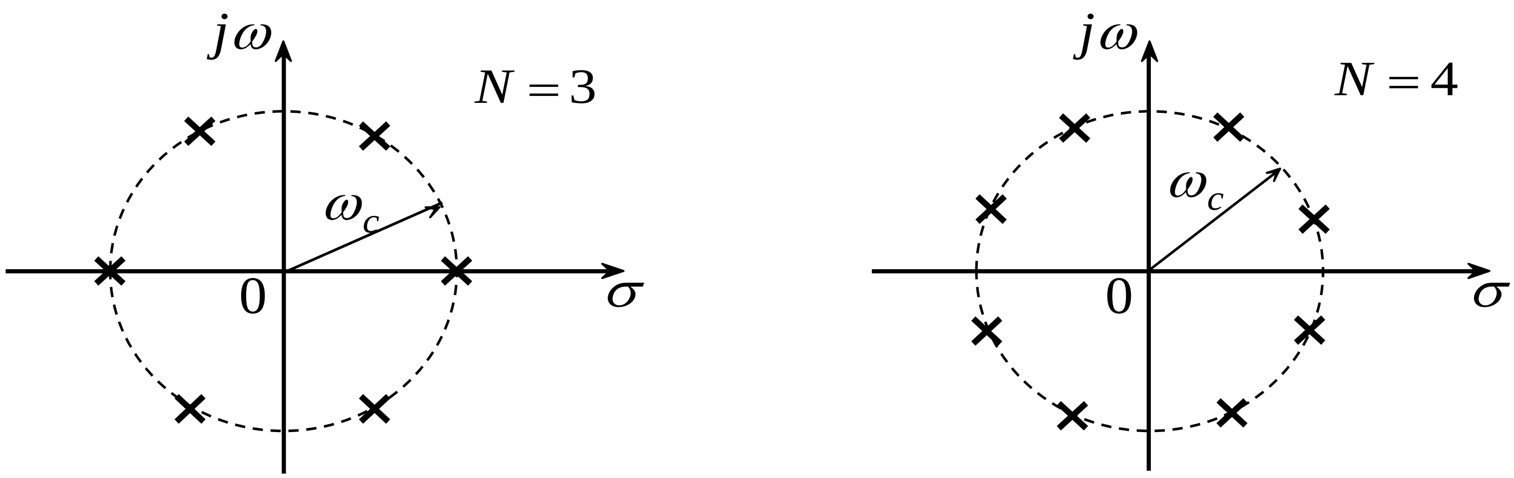


Διαγράμματα πόλων φίλτρων Batterworth 1η και 2η τάξης

Οι θέσεις των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο



Διαγράμματα πόλων φίλτρων Batterworth 1η και 2η τάξης

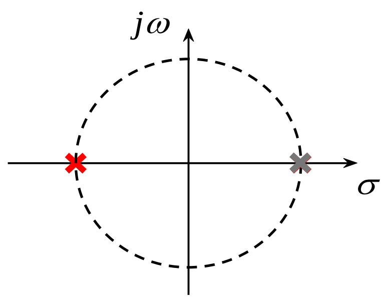


Διαγράμματα πόλων φίλτρων Batterworth 3η και 4η τάξης

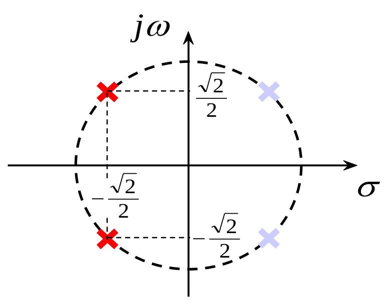
Ένα ευσταθές και αιτιατό φίλτρο $H_a(s)$ μπορεί να οριστεί αν επιλέξουμε τους πόλους που βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικού ημιεπιπέδου, δηλαδή,

$$H_a(s) = \frac{\omega_c^N}{\prod\limits_{\substack{\text{πόλοι στο}\\ \text{αριστερό}\\ \text{ημιεπίπεδο}}} (s - p_k)}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς των πρωτότυπων φίλτρων Butterworth βασικής ζώνης πρώτης και δεύτερης τάξης είναι αντίστοιχα



$$H_a(s) = \frac{1}{s+1}$$



$$H(s) = \frac{1}{\left(s + \frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2}\right)} \frac{1}{\left(s + \frac{\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{\left(s + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η τάξη ενός χαμηλοπερατού φίλτρου Butterworth το οποίο παρουσιάζει εξασθένιση 1 dB στο 1 KHz και 40 dB στο 5 KHz

Λύση:

Για την παράμετρο ταλάντωσης ε στη ζώνη διέλευσης έχουμε

$$10\log_{10}\frac{1}{1+\varepsilon^2} = -1\text{dB} \Rightarrow \varepsilon^2 = 0{,}2589$$

$$R_p = -10\log_{10}\frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

Για την παράμετρο εξασθένησης A στη ζώνη αποκοπής έχουμε

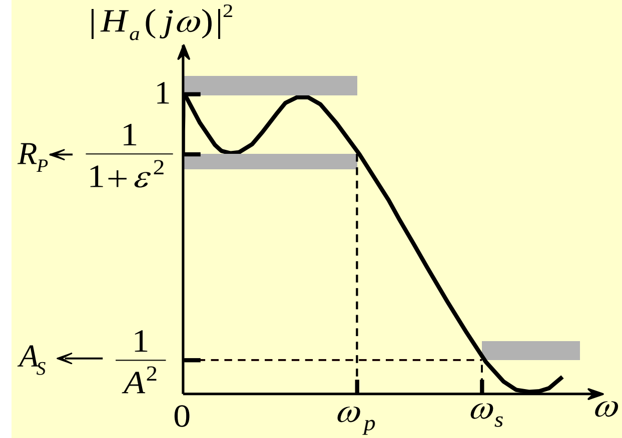
$$10\log_{10}\frac{1}{A^2} = -40\text{dB} \Rightarrow A^2 = 10^4$$

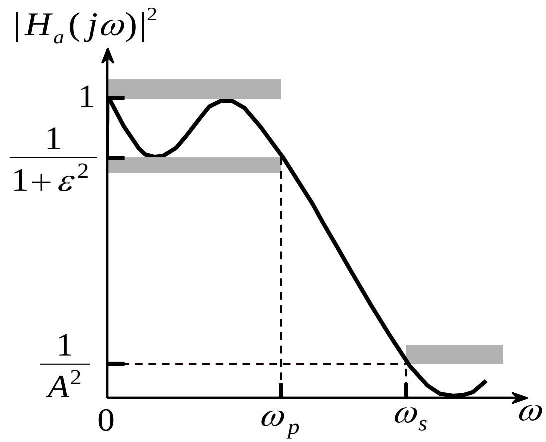
$$A_s = -10\log_{10}\frac{1}{A^2}$$

Για τις συχνότητες ω_p και ω_s έχουμε

$$f_p = 1\text{KHz} \Rightarrow \omega_p = 2\pi f_p = 2000\pi \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$f_s = 5\text{KHz} \Rightarrow \omega_s = 2\pi f_s = 10000\pi \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$





Για την απόκριση ισχύος στη συχνότητα ω_p έχουμε

$$|H_a(j\omega_p)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \Longrightarrow \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N} = \varepsilon^2$$

Για την απόκριση ισχύος στη συχνότητα ω_p έχουμε

$$|H_a(j\omega_s)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2} \Longrightarrow \left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N} = A^2 - 1$$

από τις οποίες έχουμε

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^{2N} = \frac{A^2-1}{\varepsilon^2} \Longrightarrow N = \frac{1}{2}\frac{\log_{10}\frac{A^2-1}{\varepsilon^2}}{\log_{10}\frac{\omega_s}{\omega_p}} = 3{,}281$$

η τιμή στρογγυλεύεται στον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο. Έτσι η τάξη είναι $N = 4$.

Η τιμή για την τάξη του φίλτρου εκφράζεται με τη βοήθεια του ***λόγου μετάβασης*** $k = \frac{\omega_p}{\omega_s}$

και του ***παράγοντα διακριτότητας*** $k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}$ ως

$$N = \frac{1}{2}\frac{\log_{10} k_1}{\log_{10} k}$$

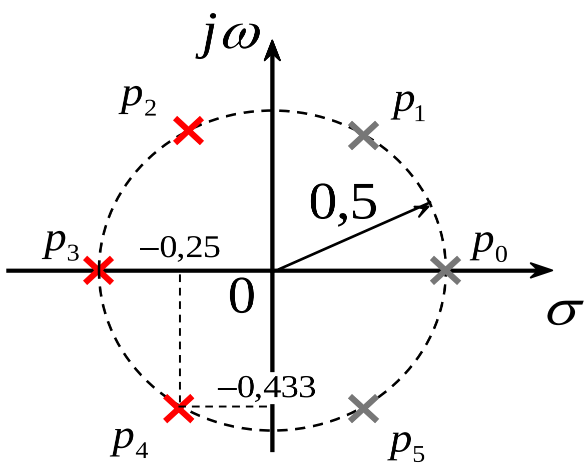
Παράδειγμα

Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς, $H_a(s)$, του αναλογικού φίλτρου που έχει

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+64\omega^6}$$

Λύση:

Παρατηρούμε $\quad |H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+64\omega^6} = \frac{1}{1+(\omega/0{,}5)^{2(3)}} \Longrightarrow$ $N = 3$ και $\omega_c = 0{,}5$



Οι πόλοι της $\quad H_a(s)H_a(-s)$

έτσι η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H_a(s) = \frac{\omega_c^3}{(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)}$$

$$H_a(s) = \frac{1/8}{(s+0{,}25-j0{,}433)(s+0{,}5)(s+0{,}25+j0{,}433)}$$

$$H_a(s) = \frac{0{,}125}{(s+0{,}5)(s^2+0{,}5s+0{,}25)}$$

$$H_a(s) = \frac{0{,}125}{s^3+s^2+0{,}5s+0{,}125}$$

Στο MATLAB υπάρχει η συνάρτηση [z,p,k] = buttap(N) η οποία σχεδιάζει ένα πρωτότυπο (δηλαδή ω_c=1) αναλογικό φίλτρο Butterworth τάξης N και επιστρέφει τα μηδενικά στο διάνυσμα z τους πόλους στο p και την τιμή κέρδους στο k. Η συνάρτηση u_buttap που ακολουθεί σχεδιάζει ένα μη κανονικοποιημένο αναλογικό φίλτρο Butterworth σε άμεση μορφή.

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+64\omega^6} = \frac{1}{1+(\omega/0,5)^{2(3)}} \Rightarrow N=3 \text{ και } \omega_c = 0,5$$

$$H_a(s) = \frac{0,125}{s^3+s^2+0,5s+0,125}$$

```
function [b,a] = u_buttap(N,Omegac);
%       b = Συντελεστές του πολυωνύμου του αριθμητή της Ha(s)
%      a = Συντελεστές του πολυωνύμου του παρονομαστή της Ha(s)
%      N = Τάξη του φίλτρου Butterworth
%     Omegac = Συχνότητα αποκοπής σε radians/sec
[z,p,k] = buttap(N);
p = p*Omegac;
k = k*Omegac^N;
B = real(poly(z));
b0 = k;
b = k*B;
a = real(poly(p));
```

```
[b,a] = u_buttap(3, 0.5)
```

```
b =
     0.125
a =
     1.000  1.000 0.500 0.1250
```

Από τα χαρακτηριστικά του αναλογικού χαμηλοπερατού φίλτρου ω_p, R_p, ω_s και A_s θα προσδιοριστούν η τάξη N και η συχνότητα αποκοπής ω_c της ζώνης διέλευσης φίλτρου Butterworth

$$\text{για} \quad \omega = \omega_p, \; -10\log_{10}|H_a(j\omega_p)|^2 = R_p \Rightarrow -10\log_{10}\frac{1}{1+\left(\omega_p/\omega_c\right)^{2N}} = R_p$$

$$\text{για} \quad \omega = \omega_s, \; -10\log_{10}|H_a(j\omega_s)|^2 = A_s \Rightarrow -10\log_{10}\frac{1}{1+\left(\omega_s/\omega_c\right)^{2N}} = A_s$$

Λύνοντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις έχουμε

$$N = \left\lceil \frac{\log_{10}[(10^{R_p/10}-1)/(10^{A_s/10}-1)]}{2\log_{10}(\omega_p/\omega_s)} \right\rceil$$

$$\omega_c = \frac{\omega_p}{\sqrt[2N]{10^{R_p/10}-1}} \qquad\qquad \omega_c = \frac{\omega_s}{\sqrt[2N]{10^{A_s/10}-1}}$$

Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί ένα χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth με χαρακτηριστικά

$$\omega_p = 0{,}2\pi,\ R_p = 7\text{dB},\ \omega_s = 0{,}3\pi \ \text{ και } \ A_s = 16\text{dB}$$

Λύση:

$$N = \left\lceil \frac{\log_{10}[(10^{0,7}-1)/(10^{1,6}-1)]}{2\log_{10}(0{,}2\pi/0{,}3\pi)} \right\rceil = \lceil 2{,}79 \rceil = 3$$

$$\omega_c = \frac{0{,}2\pi}{\sqrt[6]{10^{0,7}-1}} = 0{,}4985 \qquad \omega_c = \frac{0{,}3\pi}{\sqrt[6]{10^{1,6}-1}} = 0{,}5122$$

επιλέγουμε ω_c= 0,5, έτσι καταλήγουμε στο φίλτρο του προηγούμενου παραδείγματος

$$H_a(j\omega) = \frac{0{,}125}{(s+0{,}5)(s^2+0{,}5s+0{,}25)}$$

Η συνάρτηση afd_butt που ακολουθεί σχεδιάζει ένα μη κανονικοποιημένο αναλογικό φίλτρο Butterworth σε άμεση μορφή από τα χαρακτηριστικά του.

```
function [b,a] = afd_butt(Wp,Ws,Rp,As)
%   b = Οι συντελεστές του αριθμητή της Ha(s)
%    a = Οι συντελεστές του παρονομαστή της Ha(s)
%   wp = Συχνότητα άκρης της ζώνης διέλευσης σε rad/sec; wp > 0
%   ws = Συχνότητα ακρής της ζώνης αποκοπής σε  rad/sec; ws > wp > 0
%   Rp = Ταλαντώσεις της ζώνης διέλευσης σε +dB; (Rp > 0)
%   As = Εξασθένιση της ζώνης αποκοπής σε +dB; (As > 0)
if wp <= 0
        error('Η συχνότητα άκρης της ζώνης διέλευσης πρέπει να είναι > 0')
end
if ws <= wp
        error('Η άκρη της ζώνης αποκοπής πρέπει να είναι > της συχνότητας άκρης της
ζώνης διέλευσης ')
end
if (Rp <= 0) | (As < 0)
        error('PB ταλάντωση και/ή SB εξασθένηση πρέπει να είναι > 0')
end
N = ceil((log10((10^(Rp/10)-1)/(10^(As/10)-1)))/(2*log10(wp/ws)));
fprintf('\n*** Butterworth Filter Order = %2.0f \n',N)
OmegaC = wp/((10^(Rp/10)-1)^(1/(2*N)));
[b,a]=u_buttap(N,OmegaC);
```

Η συνάρτηση freqs_m που ακολουθεί προσδιορίζει τα χαρακτηριστικά ενός φίλτρου Butterworth.

```
function [db,mag,pha,w] = freqs_m(b,a,wmax);

%   db = Το μέτρο σε db στο διάστημα [0 έως wmax]
%   mag = Το μέτρο στο διάστημα [0 έως wmax]
%   pha = Η απόκριση φάσης σε radians στο διάστημα [0 έως wmax]
%    w = διάνυσμα από 500 δείγματα συχνότητας στο διάστημα  [0 έως wmax]
%    b = Οι συντελεστές του αριθμητή της Ha(s)
%    a = Οι συντελεστές του παρομανομαστή της Ha(s)
%    wmax = Μέγιστη συχνότητα σε rad/sec του διαστήματος ενδιαφέροντος
%
w = [0:1:500]*wmax/500;
H = freqs(b,a,w);
mag = abs(H);
db = 20*log10((mag+eps)/max(mag));
pha = angle(H);
```

Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί ένα χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth με χαρακτηριστικά

$$\omega_p = 0{,}2\pi, \;\; R_p = 7\text{dB}, \;\; \omega_s = 0{,}3\pi \;\; \text{και} \;\; A_s = 16\,\text{dB}$$

```
wp = 0.2*pi;
ws = 0.3*pi;
Rp = 7;
As = 16;
Ripple = 10 ^ (-Rp/20);
Attn = 10 ^ (-As/20);
% Σχεδιάση αναλογικού φίλτρου
[b,a] = afd_butt(wp,ws,Rp,As);
% Υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας:
[db,mag,pha,w] = freqs_m(b,a,0.5*pi);
% Υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης:
[ha,x,t] = impulse(b,a);
% Plots
```

Μετατροπή φίλτρου βασικής ζώνης σε φίλτρο διέλευσης ζώνης συχνοτήτων

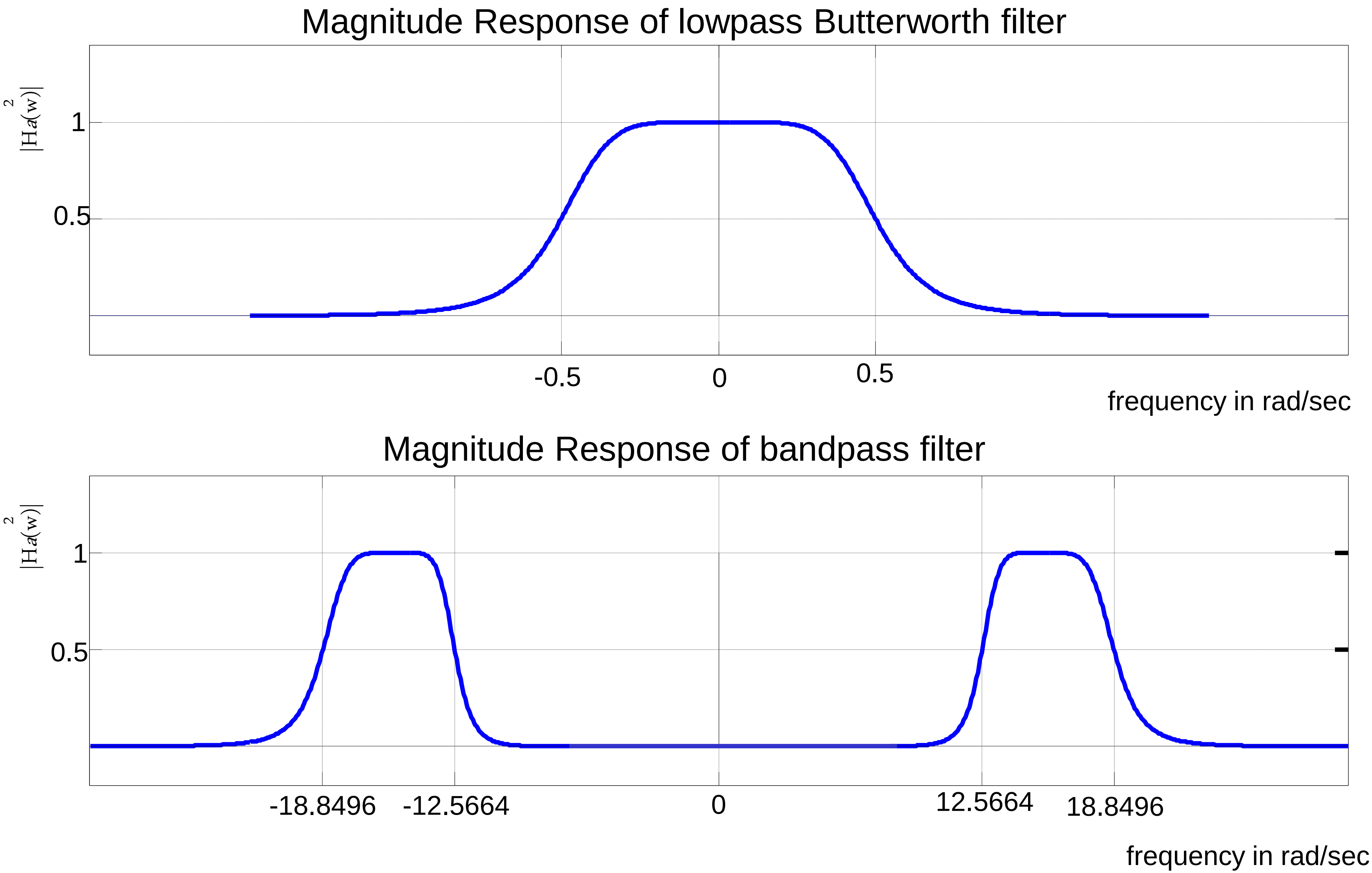
Για τη μετατροπή ενός αναλογικού φίλτρου βασικής ζώνης με συχνότητα ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, σε φίλτρο ζώνης διέλευσης με συχνότητες ω_l και ω_u στο κατώτερο και ανώτερο όριο της ζώνης διέλευσης αντίστοιχα, εκτελούμε το μετασχηματισμό

$$H_{BP}(s) = H_p(s)\Big|_{s=\omega_p \frac{s^2+\omega_u \omega_l}{s(\omega_u-\omega_l)}}$$

Παρατηρούμε ότι η τάξη του φίλτρου διέλευσης ζώνης συχνοτήτων που προκύπτει είναι διπλάσια της τάξης του αρχικού φίλτρου βασικής ζώνης.

Εφαρμογή

Να μετατραπεί το πρώτης τάξης φίλτρο Butterworth βασικής ζώνης με συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \omega_p / (s + \omega_p)$, όπου $\omega_p = 2\pi$ rad/sec, σε ένα αναλογικό φίλτρο διέλευσης ζώνης συχνοτήτων με συχνότητες στα όρια της ζώνης διέλευσης $\omega_l = \pi$ rad / sec και $\omega_u = 3\pi$ rad / sec.


Magnitude Response of lowpass Butterworth filter
$|Ha(w)|^2$
1
0.5
-0.5
0
0.5
frequency in rad/sec
Magnitude Response of bandpass filter
$|Ha(w)|^2$
1
0.5
-18.8496
-12.5664
0
12.5664
18.8496
frequency in rad/sec

Μετατροπή φίλτρου βασικής ζώνης σε φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων

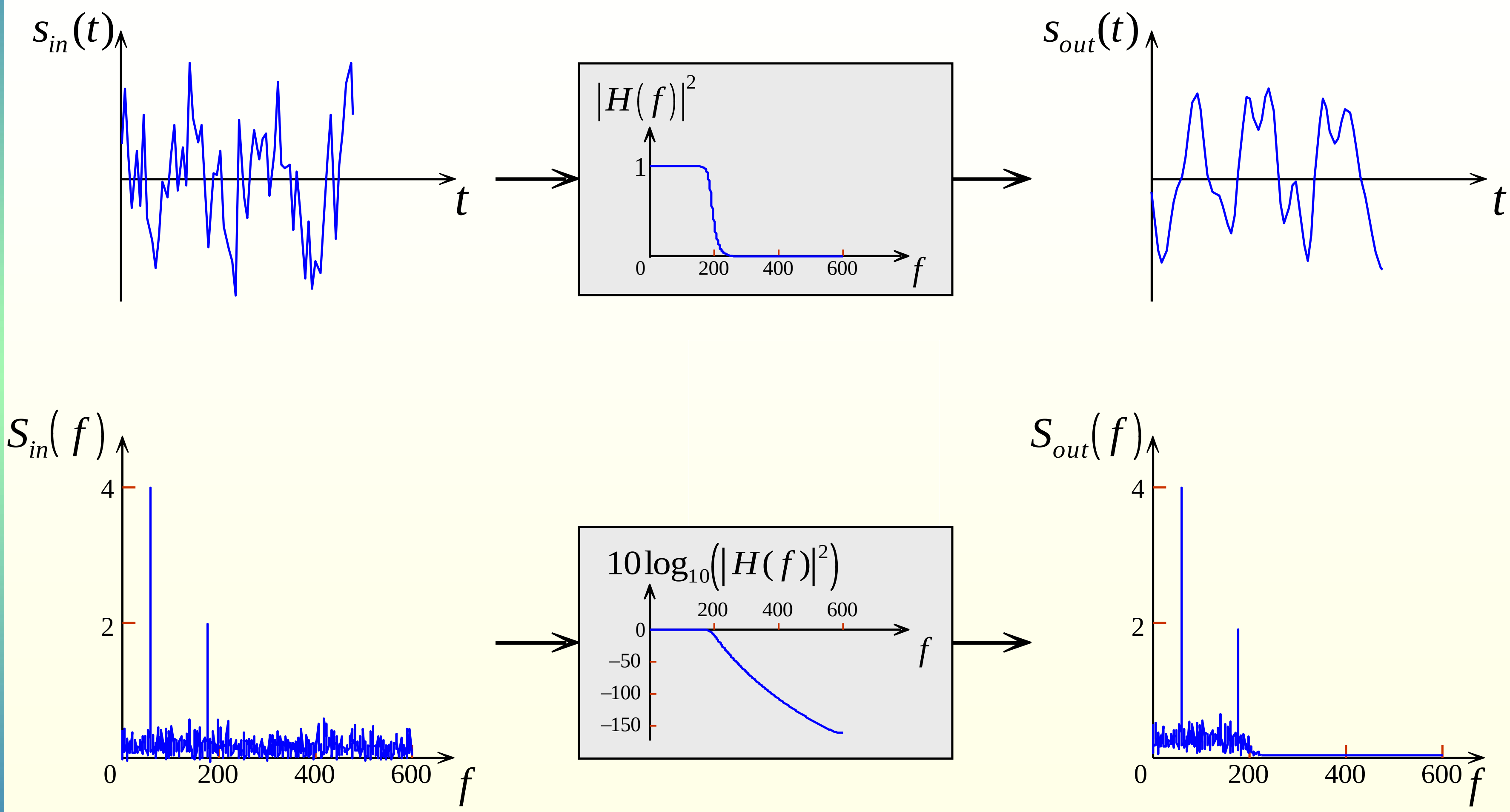
Για τη μετατροπή ενός αναλογικού φίλτρου βασικής ζώνης με συχνότητα ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, σε φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων με συχνότητα ω_l στο όριο της ζώνης διέλευσης αντίστοιχα, εκτελούμε το μετασχηματισμό

$$H_{HP}(s) = H_p(s)\Big|_{s=\frac{\omega_p \omega_l}{s}}$$

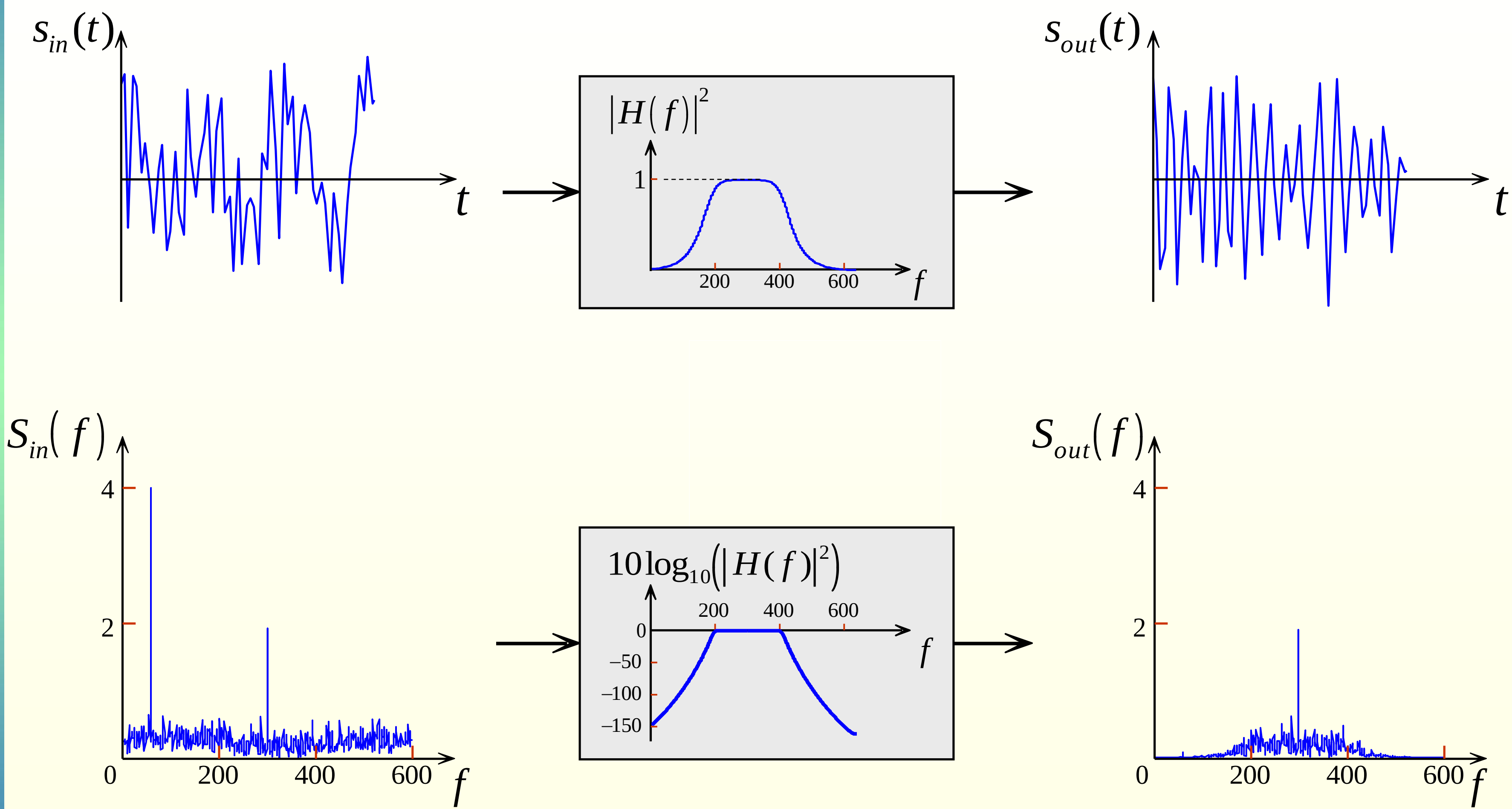
Μετατροπή φίλτρου βασικής ζώνης σε φίλτρο διαφορετικής βασικής ζώνης

Για να μετατρέψουμε ένα αναλογικό φίλτρο βασικής ζώνης με συχνότητα αποκοπής ω_p, σε ένα άλλο φίλτρο βασικής ζώνης με συχνότητα αποκοπής ω'_p , εκτελούμε το μετασχηματισμό

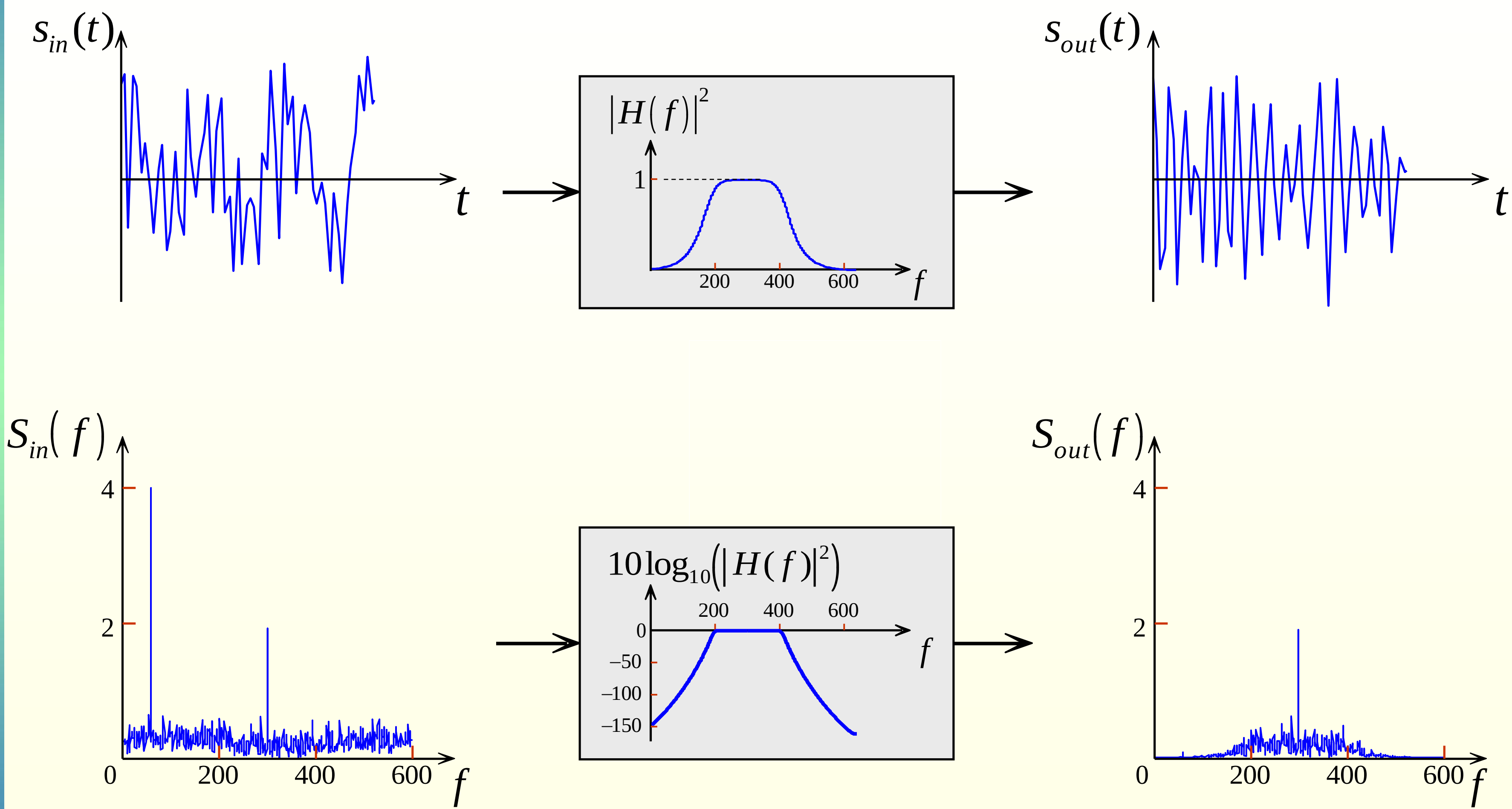
$$H_{HP}(s) = H_p(s)\Big|_{s=\frac{\omega_p}{\omega'_p}s}$$



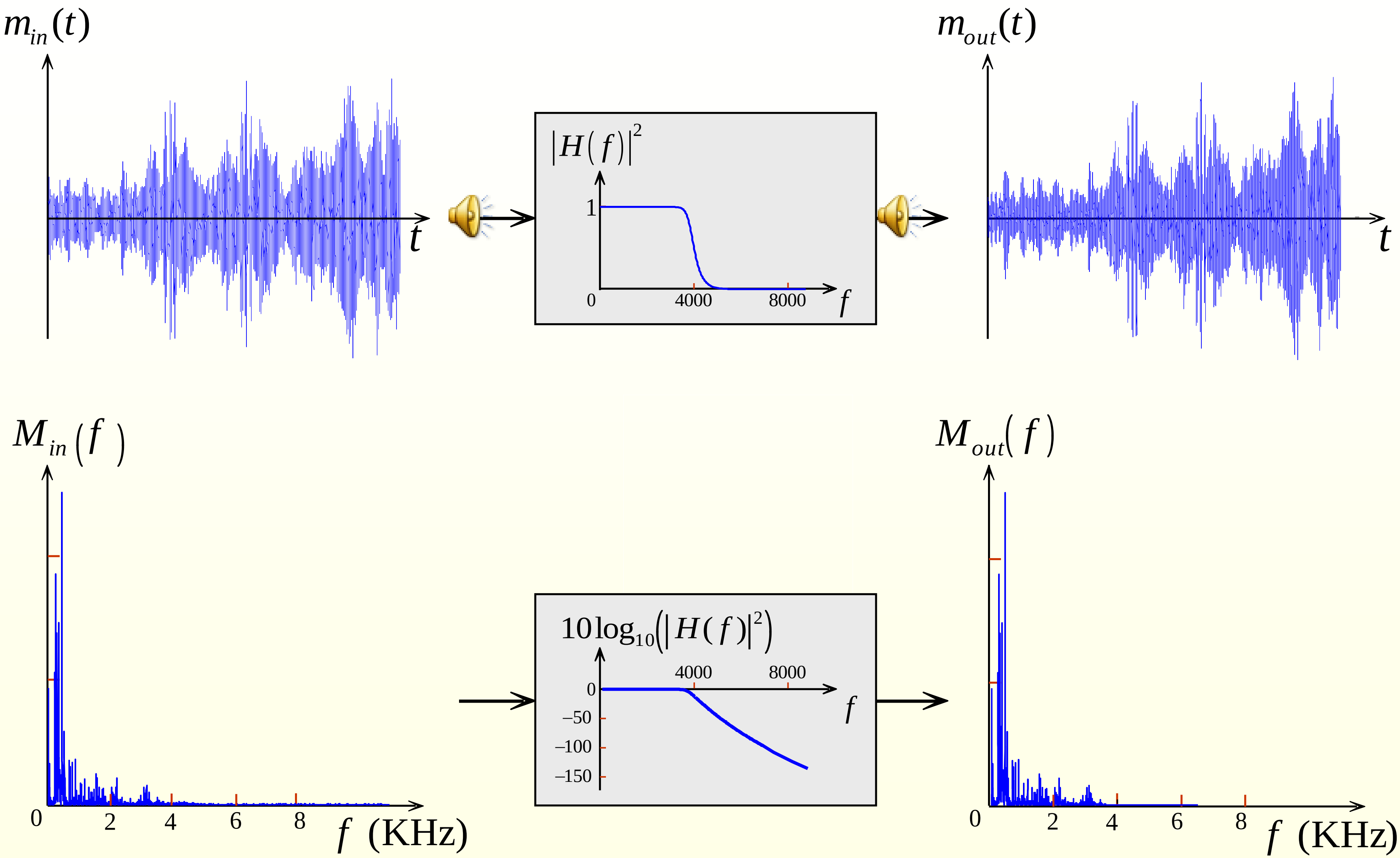
$s_{in}(t)$
t
$|H(f)|^2$
1
0
200
400
600
f
$s_{out}(t)$
t
$S_{in}(f)$
4
2
0
200
400
600
f
$10\log_{10}\left(|H(f)|^2\right)$
200
400
600
0
–50
–100
–150
f
$S_{out}(f)$
4
2
0
200
400
600
f

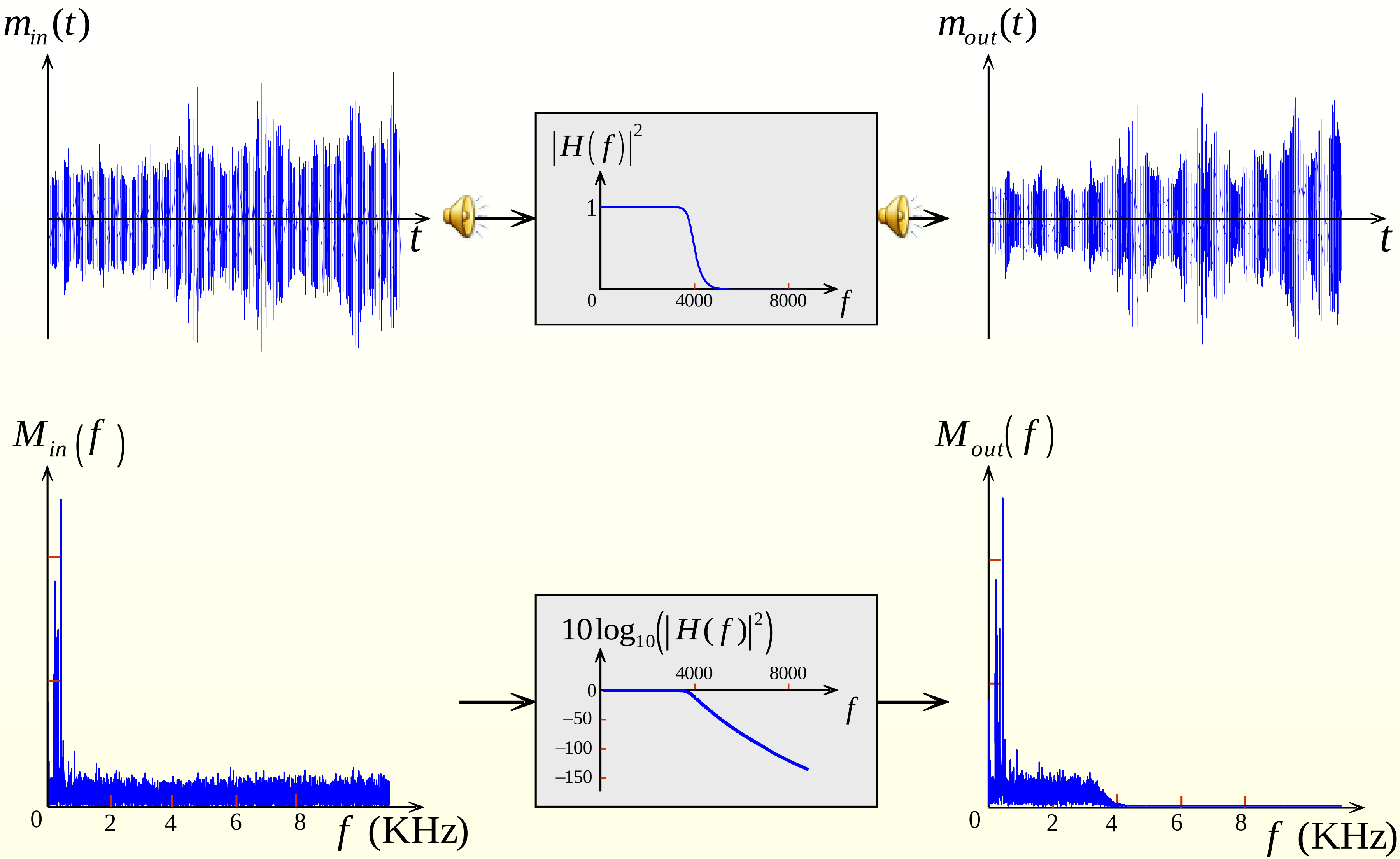


$s_{in}(t)$
t
$|H(f)|^2$
1
200
400
600
f
$s_{out}(t)$
t
$S_{in}(f)$
4
2
0
200
400
600
f
$10\log_{10}\left(|H(f)|^2\right)$
200
400
600
0
–50
–100
–150
f
$S_{out}(f)$
4
2
0
200
400
600
f

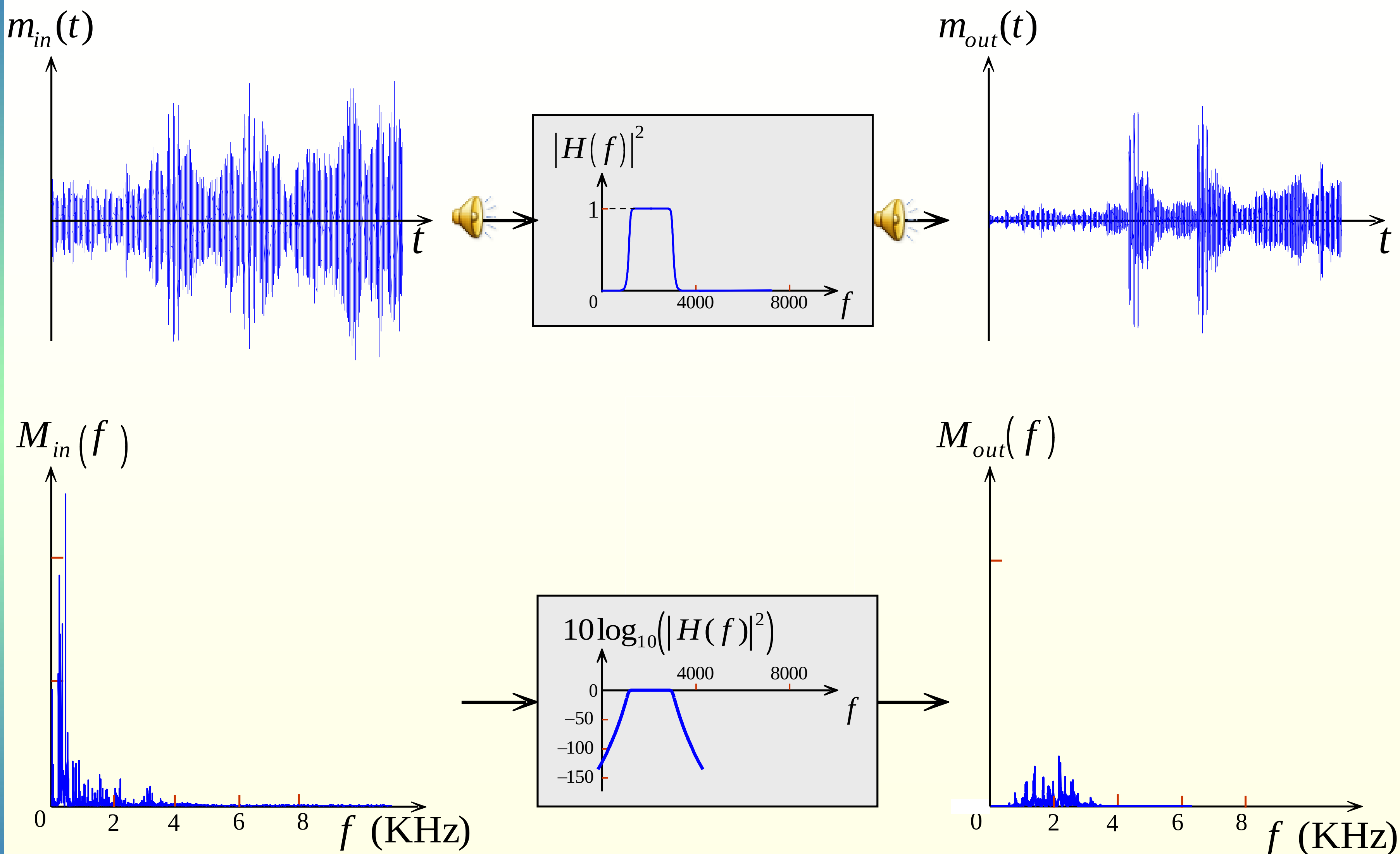


$s_{in}(t)$
t
$|H(f)|^2$
1
200
400
600
f
$s_{out}(t)$
t
$S_{in}(f)$
4
2
0
200
400
600
f
$10\log_{10}\left(|H(f)|^2\right)$
200
400
600
0
–50
–100
–150
f
$S_{out}(f)$
4
2
0
200
400
600
f


$m_{in}(t)$
t
$|H(f)|^2$
1
0
4000
8000
f
$m_{out}(t)$
t
$M_{in}(f)$
0
2
4
6
8
f (KHz)
$10\log_{10}(|H(f)|^2)$
4000
8000
0
–50
–100
–150
f
$M_{out}(f)$
0
2
4
6
8
f (KHz)



$m_{in}(t)$
t
$|H(f)|^2$
1
0
4000
8000
f
$m_{out}(t)$
t
$M_{in}(f)$
0
2
4
6
8
f (KHz)
$10\log_{10}\left(|H(f)|^2\right)$
4000
8000
0
–50
–100
–150
f
$M_{out}(f)$
0
2
4
6
8
f (KHz)


$m_{in}(t)$
t
$|H(f)|^2$
1
0
4000
8000
f
$m_{out}(t)$
t
$M_{in}(f)$
0
2
4
6
8
f (KHz)
$10\log_{10}\left(|H(f)|^2\right)$
4000
8000
0
–50
–100
–150
f
$M_{out}(f)$
0
2
4
6
8
f (KHz)

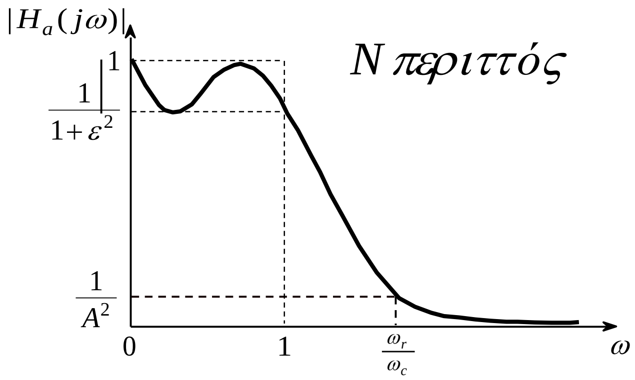
Χαμηλοπερατό Φίλτρο Chebyshev

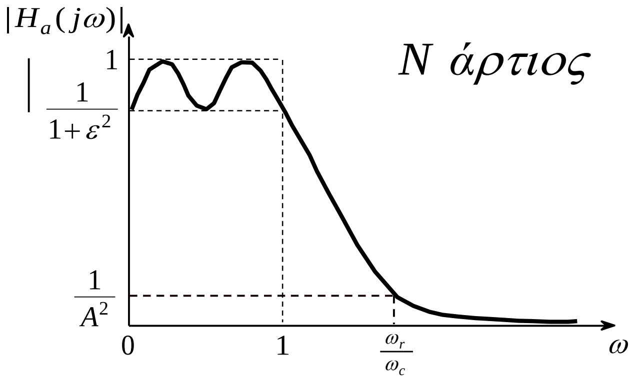
$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_N^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

όπου N είναι η τάξη του φίλτρου, ε είναι ο παράγοντας ταλάντωσης στη ζώνη διέλευσης και $T_N(x)$ το πολυώνυμο Chebyshev N-τάξης το οποίο δίνεται από τη

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos\left(N\cos^{-1}(x)\right), & 0 \le x \le 1 \\ \cosh\left(N\cosh^{-1}(x)\right), & 1 < x < \infty \end{cases} \quad \text{όπου} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

Το πολυώνυμο $T_N(x)$ μεταξύ $0 < x < 1$ ταλαντώνεται μεταξύ του -1 και 1 έτσι το φίλτρο παρουσιάζει ταλαντώσεις ίσου πλάτους στη ζώνη διέλευσης. Επίσης για $1 < x < \infty$ ελαττώνεται μονότονα στο μηδέν.





Για να προσδιορίσουμε ένα αιτιατό και ευσταθές φίλτρο $H_a(s)$ πρέπει να βρούμε τους πόλους του $H_a(s)\, H_a(-s)$ και να επιλέξουμε τους πόλους που βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο για το $H_a(s)$. Οι πόλοι του $H_a(s)\, H_a(-s)$ είναι οι ρίζες του

$$1+\varepsilon^2 T_N^2 \frac{s}{j\omega_c}$$

Αν $p_k = \sigma_k + j\omega_k,\ k = 0,1,\ldots,N-1$ είναι οι πόλοι στο αριστερό ημιεπίπεδο του παρα-πάνω πολυωνύμου τότε

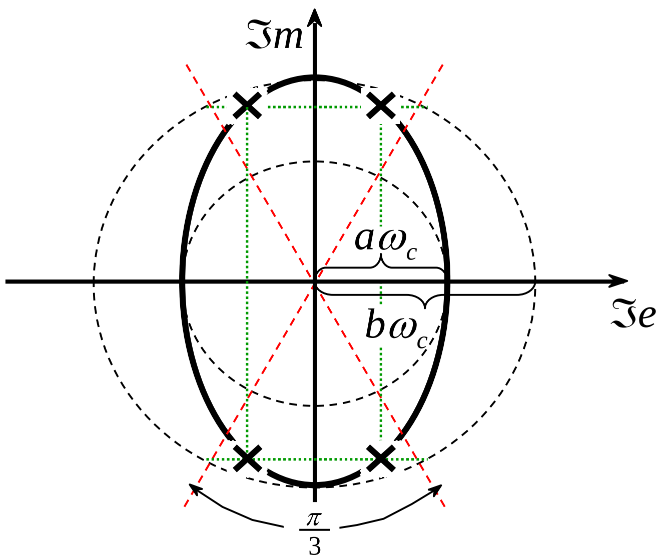
$$\sigma_k = (a\omega_c)\cos\left[\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{(2k+1)\pi}{2N}\right] \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$\omega_k = (b\omega_c)\sin\left[\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{(2k+1)\pi}{2N}\right]$$

όπου

$$a = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[N]{\alpha} - \sqrt[N]{1/\alpha}\right) \qquad b = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[N]{\alpha} + \sqrt[N]{1/\alpha}\right) \quad \text{και} \quad \alpha = \tfrac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1+\tfrac{1}{\varepsilon^2}}$$

Οι πόλοι του φίλτρου βρίσκονται σε έλλειψη με κύριο άξονα $a\omega_c$ και δευτερεύοντα άξονα $b\omega_c$



Η θέση των πόλων για ένα φίλτρο Chebyshev τρίτης τάξης

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H_a(s) = \frac{K}{\prod_k (s - p_k)}$$

όπου K είναι ο παράγοντας κανονικοποίησης που επιλέγεται έτσι ώστε

$$H_a(j0) = \begin{cases} 1, & N \text{ περιττός} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, & N \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Στο MATLAB υπάρχει η συνάρτηση

$$[z, p, k] = \text{cheb1ap}(N, Rp)$$

η οποία σχεδιάζει ένα κανονικοποιημένο αναλογικό φίλτρο Chebyshev τάξης N με ταλάντωση ζώνης διέλευσης Rp και επιστρέφει τα μηδενικά στο διάνυσμα z τους πόλους στο p και την τιμή κέρδους στο k. Η συνάρτηση u_chblap που ακολουθεί σχεδιάζει ένα μη κανονικοποιημένο αναλογικό φίλτρο Chebyshev σε άμεση μορφή.

```
function [b,a] = u_chb1ap(N,Rp,Omegac);

%      b = Συντελεστές του πολυωνύμου του αριθμητή
%      a = Συντελεστές του πολυωνύμου του παρονομαστή
%      N = Τάξη του φίλτρου
%     Rp = Ταλάντωση στη ζώνη διέλευσης σε dB; Rp > 0
%     Omegac = Συχνότητα αποκοπής σε radians/sec
%
[z,p,k] = cheb1ap(N,Rp);
      a = real(poly(p));
    aNn = a(N+1);
      p = p*Omegac;
      a = real(poly(p));
    aNu = a(N+1);
      k = k*aNu/aNn;
      b0 = k;
      B = real(poly(z));
      b = k*B;
```

Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί ένα χαμηλοπερατό FIR φίλτρο διακριτού χρόνου με χαρακτηριστικά

$$\omega_p = 0{,}2\pi \qquad \omega_s = 0{,}3\pi \qquad R_p = 1dB \qquad A_s = 16\,dB$$

Λύση

$$\varepsilon = \sqrt{10^{R_p/10} - 1} = \sqrt{10^{1/10} - 1} = 0{,}5088 \qquad A = 10^{A_s/20} = 10^{16/20} = 6{,}3096$$

$$\omega_c = \omega_p = 0{,}2\pi \qquad \omega_r = \frac{0{,}3\pi}{0{,}2\pi}$$

και η τάξη του φίλτρου είναι

$$g = \sqrt{(A^2 - 1)/\varepsilon^2} = 12{,}2429 \qquad N = \left\lceil \frac{\log_{10}\left[g + \sqrt{g^2 - 1}\right]}{\log_{10}\left[\omega_r + \sqrt{\omega_r^2 - 1}\right]} \right\rceil \qquad N = 4$$

$$\alpha = \tfrac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \tfrac{1}{\varepsilon^2}} = 4{,}1702$$

$$a = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[N]{\alpha} - \sqrt[N]{1/\alpha}\right) = 0{,}3646$$

$$b = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[N]{\alpha} + \sqrt[N]{1/\alpha}\right) = 1{,}0644$$

Υπάρχουν 4 πόλοι

$$p_{0,3} = (a\omega_c)\cos\left[\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{8}\right] \pm (b\omega_c)\sin\left[\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{8}\right] = -0{,}0877 \pm j0{,}6179$$

$$p_{1,2} = (a\omega_c)\cos\left[\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{3\pi}{8}\right] \pm (b\omega_c)\sin\left[\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{3\pi}{8}\right] = -0{,}2117 \pm j0{,}2559$$

επομένως

$$H_a(s) = \frac{K}{\prod_k (s - p_k)} = \frac{0{,}03829\,(= 0{,}89125 \times 0{,}1103 \times 0{,}3895)}{\left(s^2 + 0{,}1754s + 0{,}3895\right)\left(s^2 + 0{,}4234s + 0{,}1103\right)}$$

Ο αριθμητής είναι τέτοιος ώστε

$$H_a(j0) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 0{,}89125$$

```
function [b,a] = afd_chb1(wp,ws,Rp,As);
%    b = Οι συντελεστές του αριθμητή της Ha(s)
%    a = Οι συντελεστές του παρομανομαστή της Ha(s)
%   wp = Συχνότητα άκρης της ζώνης διέλευσης σε rad/sec; wp > 0
%   ws = Συχνότητα ακρής της ζώνης αποκοπής σε  rad/sec; ws > wp > 0
%   Rp = Ταλαντώσεις της ζώνης διέλευσης σε +dB; (Rp > 0)
%   As = Εξασθένιση της ζώνης αποκοπής σε +dB; (As > 0)
if wp <= 0
        error('Η συχνότητα άκρης της ζώνης διέλευσης πρέπει να είναι > 0')
end
if ws <= wp
        error('Η άκρη της ζώνης αποκοπής πρέπει να είναι > της συχνότητας άκρης της ζώνης
διέλευσης ')
end
if (Rp <= 0) | (As < 0)
        error('PB ταλάντωση και/ή SB εξασθένηση πρέπει να είναι > 0')
end
ep = sqrt(10^(Rp/10)-1);
A = 10^(As/20);
OmegaC = wp;
OmegaR = ws/wp;
g = sqrt(A*A-1)/ep;
N = ceil(log10(g+sqrt(g*g-1))/log10(OmegaR+sqrt(OmegaR*OmegaR-1)));
[b,a]=u_chb1ap(N,Rp,OmegaC);
```

```
function [C,B,A] = sdir2cas(b,a);
%  C = συντελεστές κέρδους
%  B = Ο πίνακας K x 3 των πραγματικών συντελεστών bk
%  A = Ο πίνακας K x 3 των πραγματικών συντελεστών ak
%  b = Συντελεστές του πολυωνύμου του αριθμητή του άμεσου
σχήματος
% a = Συντελεστές του πολυωνύμου του παρονομαστή του άμεσου
σχήματος
Na = length(a)-1; Nb = length(b)-1;
% υπολογισμός του κέρδους C
b0 = b(1);
b = b/b0;
a0 = a(1);
a = a/a0;
C = b0/a0;
%
% Παρονομαστής των τμημάτων δεύτερης τάξης:
p= cplxpair(roots(a)); K = floor(Na/2);
if K*2 == Na           % Υπολογισμός όταν Na είναι περιττός
  A = zeros(K,3);
  for n=1:2:Na
     Arow = p(n:1:n+1,:);
     Arow = poly(Arow);
     A(fix((n+1)/2),:) = real(Arow);
  end
elseif Na == 1          % Υπολογισμός όταν Na = 1
A = [0 real(poly(p))];

else                    % Υπολογισμός όταν Na είναι άρτιο και > 1
A = zeros(K+1,3);
for n=1:2:2*K
     Arow = p(n:1:n+1,:);
     Arow = poly(Arow);
     A(fix((n+1)/2),:) = real(Arow);
     end
     A(K+1,:) = [0 real(poly(p(Na)))];
end
% Αριθμητής των τμημάτων δεύτερης τάξης: :
z = cplxpair(roots(b)); K = floor(Nb/2);
if Nb == 0             % Υπολογισμός όταν Nb = 0
  B = [0 0 poly(z)];

elseif K*2 == Nb     % Υπολογισμός όταν Nb είναι περιττό
  B = zeros(K,3);
  for n=1:2:Nb
     Brow = z(n:1:n+1,:);
     Brow = poly(Brow);
     B(fix((n+1)/2),:) = real(Brow);
  end

elseif Nb == 1        % Υπολογισμός του Nb = 1
     B = [0 real(poly(z))];

else                 % Υπολοιγμός όταν Nb είναι άρτιος και > 1
  B = zeros(K+1,3);
  for n=1:2:2*K
     Brow = z(n:1:n+1,:);
     Brow = poly(Brow);
     B(fix((n+1)/2),:) = real(Brow);
  end
  B(K+1,:) = [0 real(poly(z(Nb)))];
end
```

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

 Σεραφείμ Καραμπογιάς. «Προχωρημένα θέματα επεξεργασίας σήματος. Αναλογικά φίλτρα». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI42/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.