

## Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων σε Εκθετικές Εισόδους

$$x(n) = e^{j\Omega_0 n} \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = H(\Omega_0) \cdot e^{j\Omega_0 n}$$

όπου

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\Omega k}$$

Η συνάρτηση  $H(\Omega)$  είναι ο **Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier** της  $h(n)$  και ονομάζεται **Απόκριση Συχνότητας του Συστήματος**

Η απόκριση συχνότητας είναι μιγαδική συνάρτηση της διακριτής συχνότητας  $\Omega$  και γενικά έχει τη μορφή

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| e^{j\arg H(\Omega)}$$

$$x(n) = A \cos(\Omega_0 n + \phi) \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow y(n) = \overset{\text{Απόκριση πλάτους}}{|H(\Omega_0)|} A \cos(\Omega_0 n + \phi + \overset{\text{Απόκριση φάσης}}{\arg H(\Omega_0)})$$

## Γεωμετρικός ή γραφικός προσδιορισμός της $H(\Omega)$

Υπολογίζεται ποιοτικά η απόκριση συχνότητας και βασίζεται στο διάγραμμα πόλων και μηδενικών της  $H(z)$

$$H(z) = \frac{b_0 z^{N-M} (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_M)}{(z - \rho_1)(z - \rho_2) \cdots (z - \rho_N)}$$

Για  $z = e^{j\Omega}$

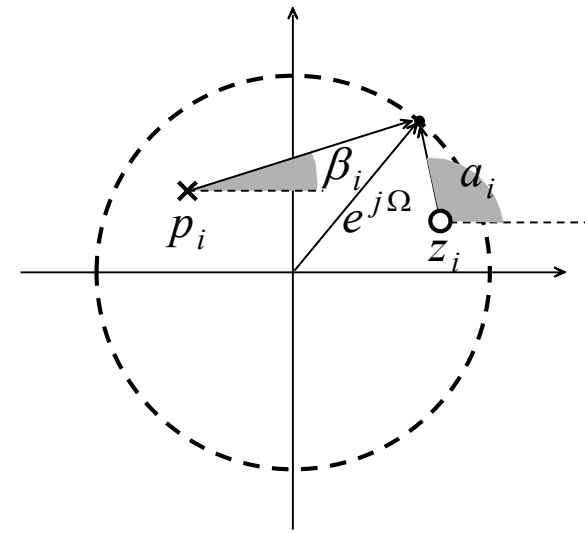
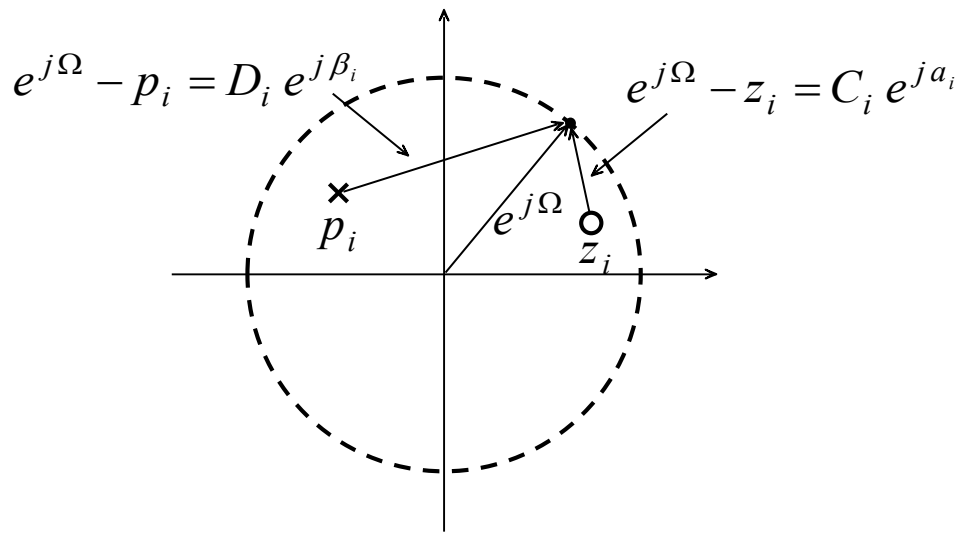
$$H(e^{j\Omega}) = \frac{b_0 e^{j\Omega(N-M)} (e^{j\Omega} - z_1)(e^{j\Omega} - z_2) \cdots (e^{j\Omega} - z_M)}{(e^{j\Omega} - \rho_1)(e^{j\Omega} - \rho_2) \cdots (e^{j\Omega} - \rho_N)}$$

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 e^{j\Omega(N-M)} \frac{(C_1 e^{ja_1})(C_2 e^{ja_2}) \cdots (C_M e^{ja_M})}{(D_1 e^{j\beta_1})(D_2 e^{j\beta_2}) \cdots (D_N e^{j\beta_N})} = V e^{j\theta}$$

όπου  $C_i$  είναι η απόσταση του μηδενικού  $z_i$  από το σημείο του μοναδιαίου κύκλου όπου καταλήγει το διάνυσμα  $e^{j\Omega}$

$D_i$  είναι η απόσταση του πόλου  $p_i$  από το σημείο του μοναδιαίου κύκλου όπου καταλήγει το διάνυσμα  $e^{j\Omega}$

Οι φάσεις  $\alpha_i$  και  $\beta_i$  είναι οι γωνίες των αντιστοίχων διανυσμάτων με τον άξονα των θετικών πραγματικών



Το μέτρο είναι

$$V = |b_0| \frac{C_1 C_2 \cdots C_M}{D_1 D_2 \cdots D_N}$$

και η φάση είναι

$$\theta = \angle b_0 + (N - M)\Omega + (a_1 + a_2 + \cdots + a_M) - (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_N)$$

Η παρουσία ενός μηδενικού κοντά στο μοναδιαίο κύκλο αναγκάζει το μέτρο της απόκρισης συχνότητας να παίρνει πολύ μικρές τιμές, για τιμές της συχνότητας κοντά στο συγκεκριμένο σημείο του μοναδιαίου κύκλου

Η παρουσία ενός πόλου κοντά στο μοναδιαίο κύκλο αναγκάζει το μέτρο της απόκρισης συχνότητας να παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, για τιμές της συχνότητας κοντά στο συγκεκριμένο σημείο του μοναδιαίου κύκλου

Οι πόλοι επιφέρουν το αντίθετο αποτέλεσμα από τα μηδενικά

Να σχεδιαστεί ψηφιακό φίλτρο το οποίο να αποκόπτει τη συχνότητα  $\Omega_0$ . (φίλτρο αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας).

Για να δημιουργήσουμε ένα μηδενικό στην απόκριση συχνότητας για μία συγκεκριμένη συχνότητα  $\Omega_0$  απλώς εισάγουμε ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών μηδενικών πάνω στο μοναδιαίο κύκλο και σε μία γωνία  $\Omega_0$ , δηλαδή,  $z_{12} = e^{\pm j\Omega_0}$

$$H(z) = b_0(1 - e^{j\Omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\Omega_0} z^{-1}) = b_0(1 - 2\cos(\Omega_0)z^{-1} + z^{-2})$$

παρατηρούμε ότι μηδενίζει τη συχνότητα  $\Omega_0$  ταυτόχρονα όμως εξασθενίζει σημαντικά και τις συχνότητες γύρω από την  $\Omega_0$ .

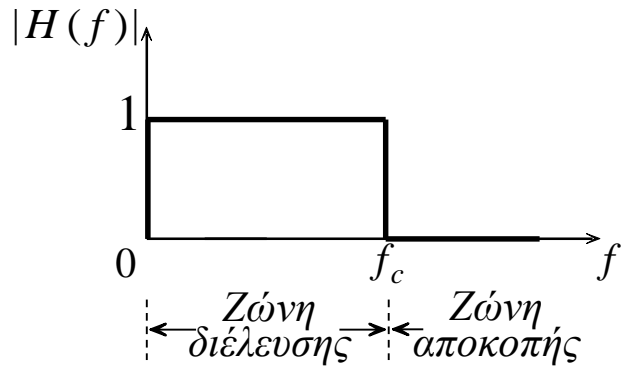
Για να μειώσουμε το εύρος χρησιμοποιούμε τεχνικές FIR φίλτρων μεγαλύτερης τάξης

Μία διαφορετική προσέγγιση είναι αυτή της εισαγωγής πόλων που βρίσκονται στην ίδια γωνία (συχνότητα) με τα μηδενικά στην απόκριση συχνότητας, δηλαδή,  $p_{12} = r e^{\pm j\Omega_0}$ . Το αποτέλεσμα των πόλων είναι η εισαγωγή συντονισμού στην περιοχή γύρω από τα μηδενικά και συνεπώς η ελάττωση του εύρους των συχνοτήτων που επηρεάζονται.

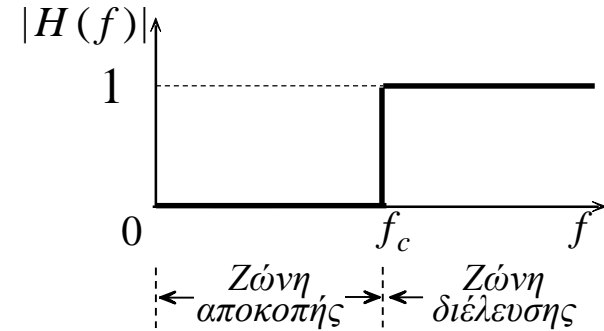
οπότε η απόκριση συχνότητας του φίλτρου γίνεται

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= b_0 \frac{(1 - e^{j\Omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\Omega_0} z^{-1})}{(1 - r e^{j\Omega_0} z^{-1})(1 - r e^{-j\Omega_0} z^{-1})} \\ &= b_0 \frac{(1 - 2 \cos(\Omega_0) z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 2 r \cos(\Omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2})} \end{aligned}$$

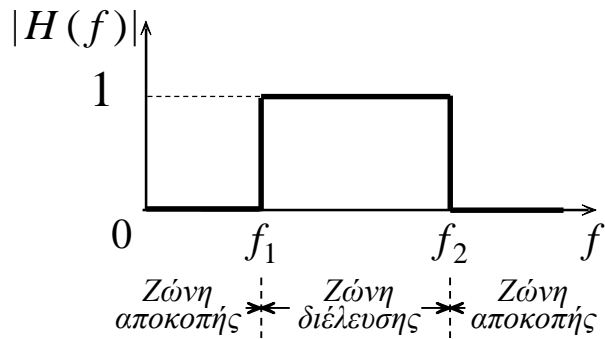
## Ιδανικά φίλτρα



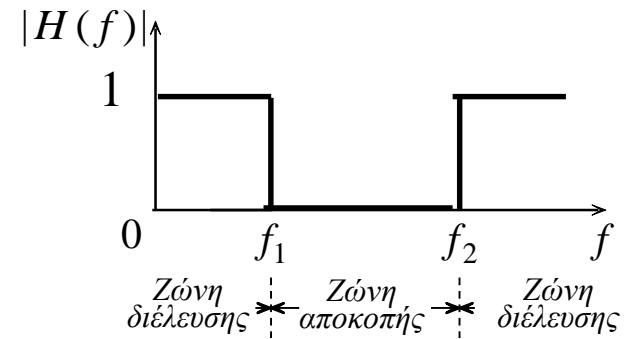
Ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο



Ιδανικό υψυπερατό φίλτρο

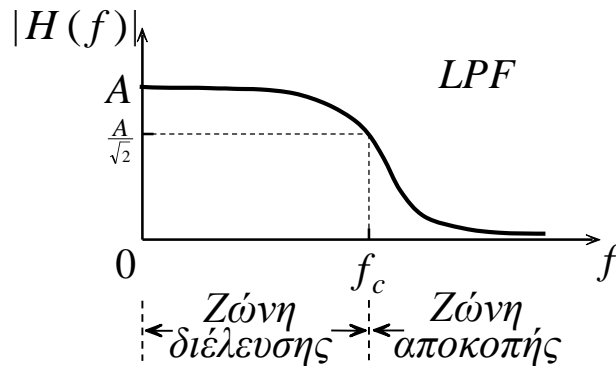


Ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο

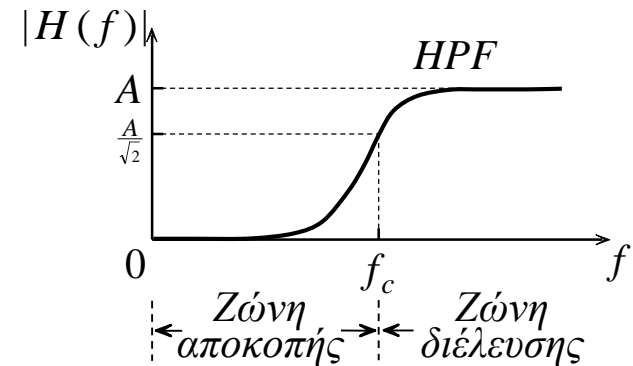


Ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο

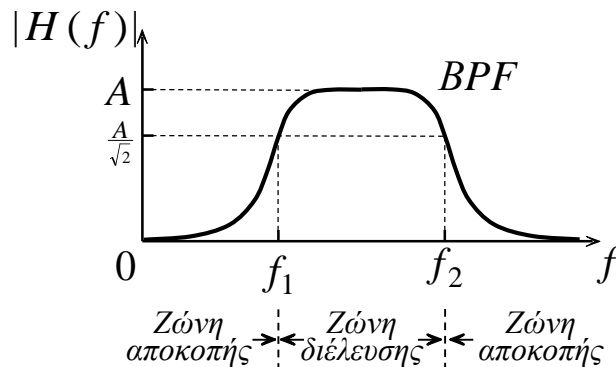
## Πραγματικά φίλτρα



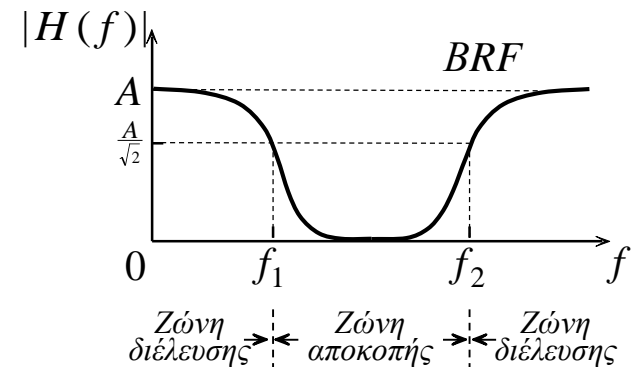
Πραγματικό βαθυπερατό φίλτρο



Πραγματικό υψιπερατό φίλτρο



Πραγματικό ζωνοπερατό φίλτρο



Πραγματικό ζωνοφρακτικό φίλτρο

Στη συχνότητα  $-3\text{dB}$  η απόκριση πλάτους  $|H(f)|$  του συστήματος είναι ίση με το  $1/\sqrt{2}$  της μέγιστης τιμής της.



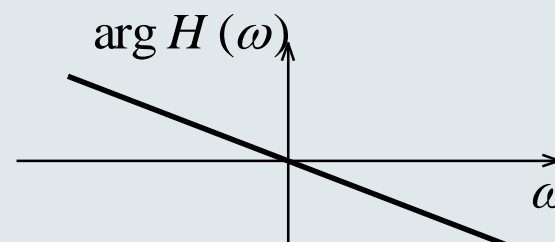
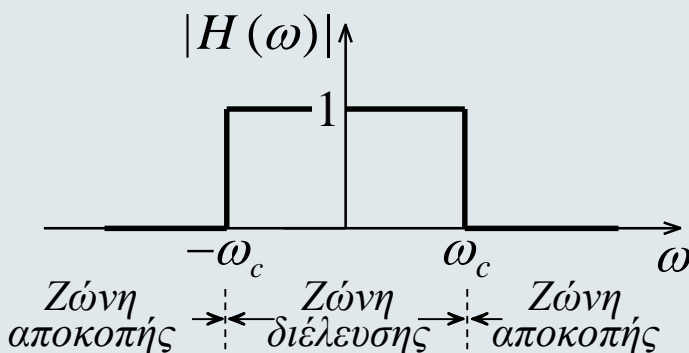
## Μέθοδοι σχεδίασης FIR φίλτρων

- ▶ Με τη βοήθεια συναρτήσεων μορφής παραθύρου (*Window design techniques*).
- ▶ Βασισμένη στη δειγματοληψία στη συχνότητα (*Frequency sampling design techniques*).
- ▶ Βέλτιστη μέθοδος σχεδίασης ίσης κυμάτωσης (*Optimal equiripple techniques*).

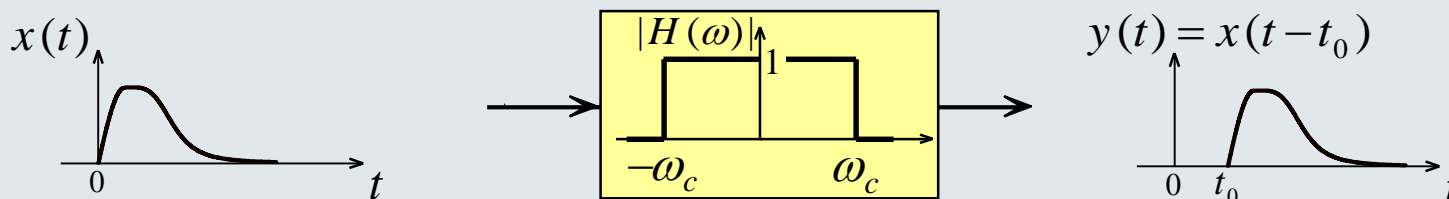
## ΙΔΑΝΙΚΟ ΦΙΛΤΡΟ ΒΑΣΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ - ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

όπου  $\omega_c$  είναι η *συχνότητα αποκοπής*.

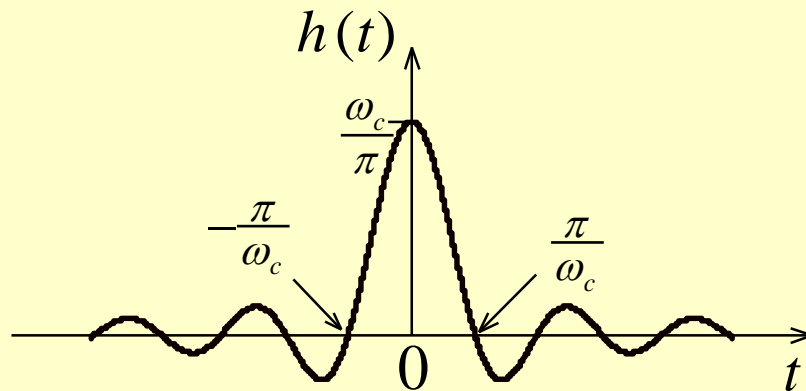


Η επίδραση του φίλτρου σε ένα σήμα εισόδου, με φασματικό περιεχόμενο εντοπισμένο στη ζώνη διέλευσης, είναι μια χρονική καθυστέρηση  $t_0$ .

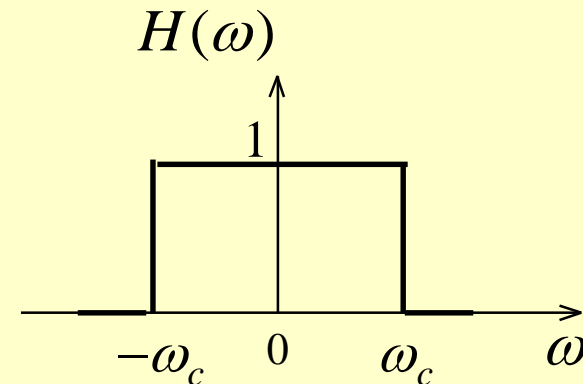


*Κρουστική απόκριση*

$$h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

*Απόκριση συχνότητας*

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$$



Ιδιότητα της ολίσθησης στο χρόνο του μετασχηματισμού Fourier

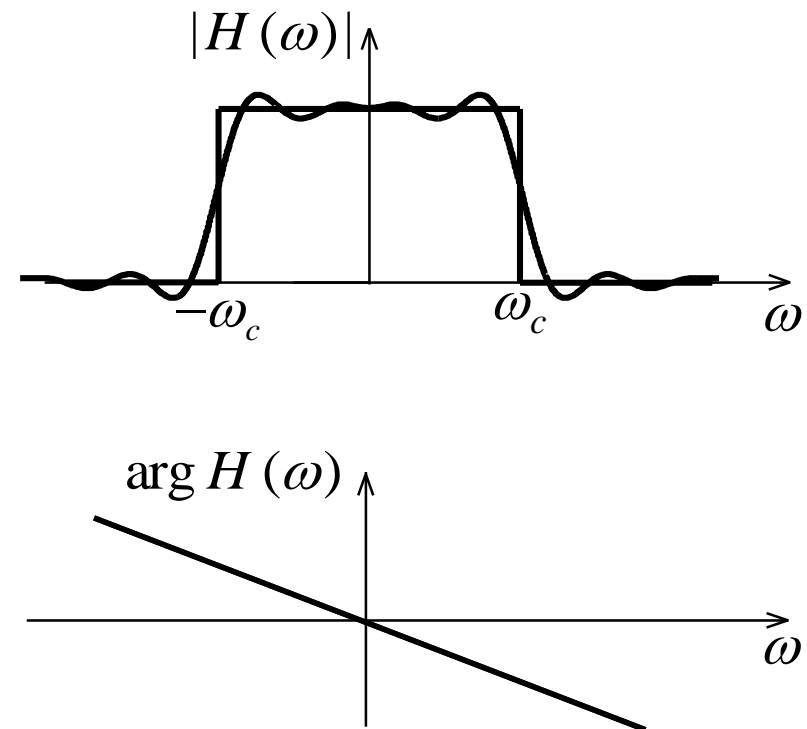
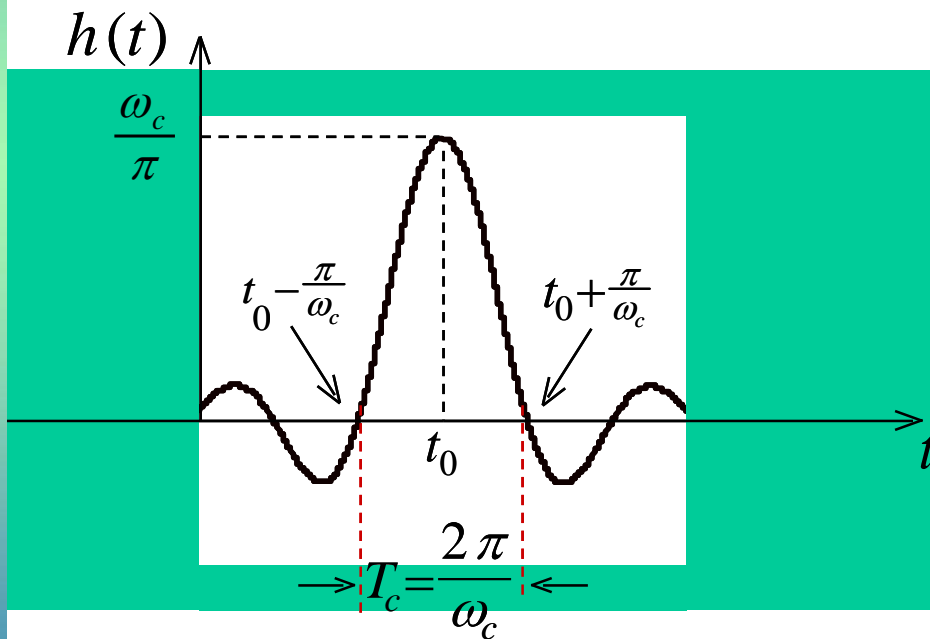
$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

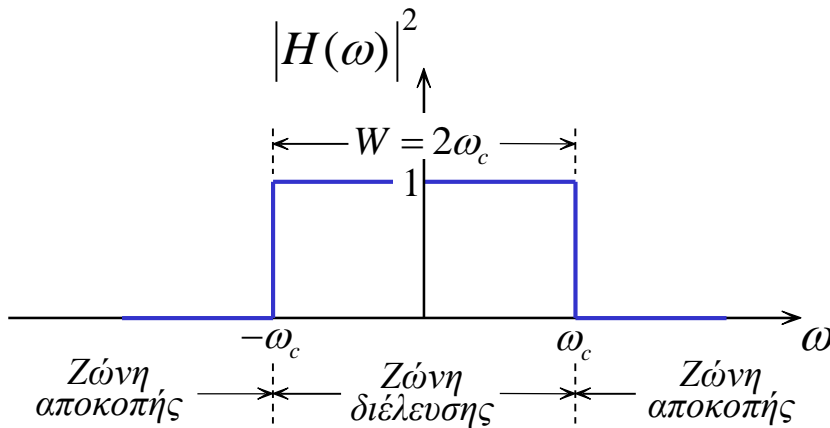
για κάθε πραγματικό αριθμό  $t_0$

## Η κρουστική απόκριση και η απόκριση συχνότητας του ιδανικού κατωπερατού φίλτρου

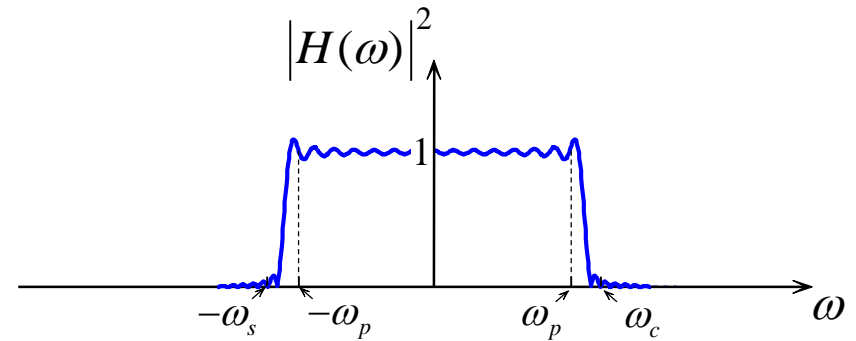
$$h(t) = \frac{\sin[\omega_c (t-t_0)]}{\pi (t-t_0)} = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\omega_c (t-t_0)}{\pi}\right]$$

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

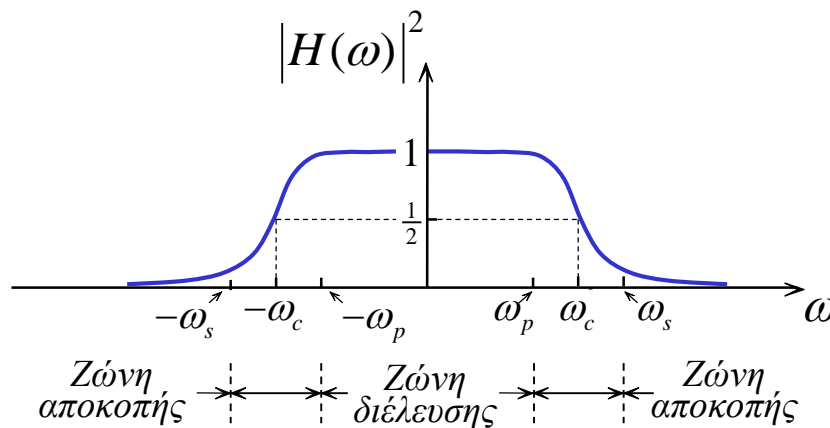




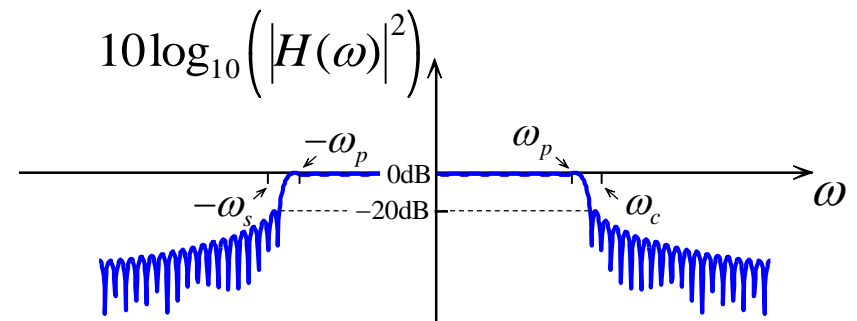
Ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με εύρος-ζώνης  $W = 2\omega_c$



Η γραφική παράσταση της απόκρισης ισχύος σε συνάρτηση με τη κυκλική συχνότητα.

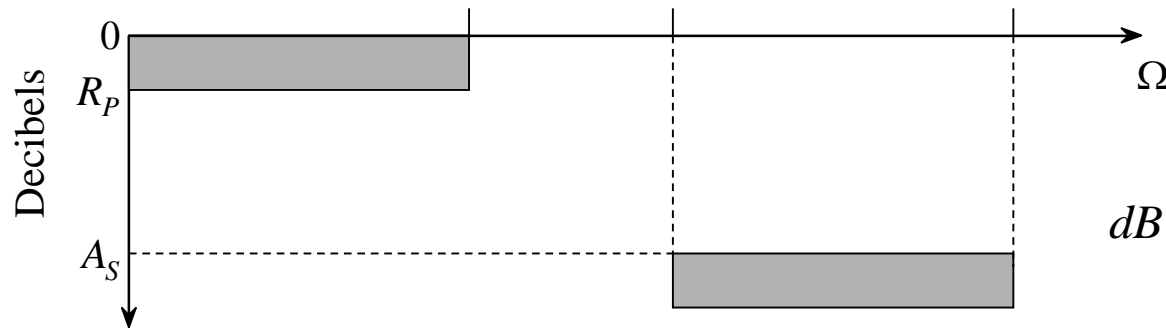
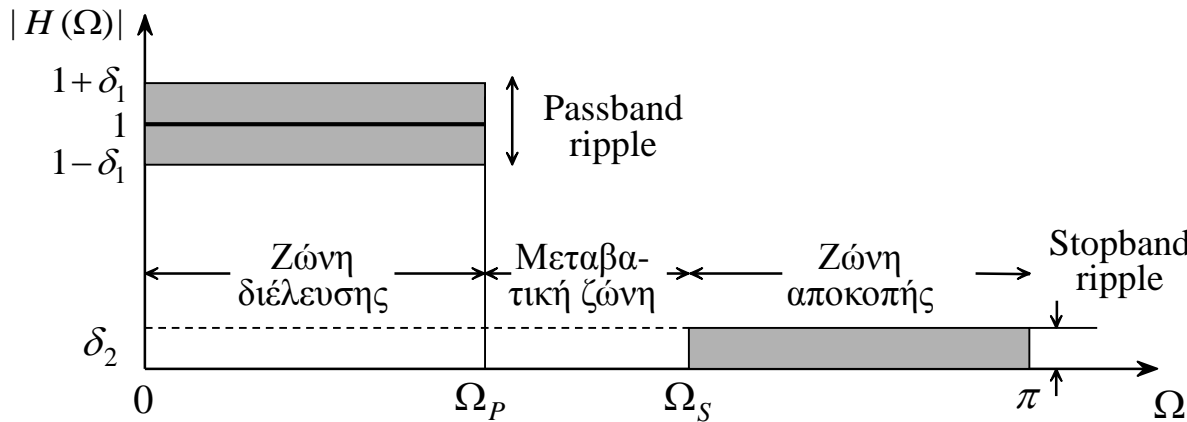


Μεταβατική ζώνη      Μεταβατική ζώνη  
Πραγματικό βαθυπερατό φίλτρο



Η γραφική παράσταση της απόκρισης ισχύος σε dB σε συνάρτηση με τη κυκλική συχνότητα.

## Σχεδιασμός FIR φίλτρων με τη βοήθεια συναρτήσεων μορφής παραθύρου



$$dB = -20 \log_{10} \frac{|H(e^{j\Omega})|}{|H(e^{j\Omega})|_{\max}} \geq 0$$

Η ταλάντωση ζώνης διέλευσης σε dB  $R_p = -20 \log_{10} \frac{1 - \delta_1}{1 + \delta_1} > 0 \ (\gg 1)$

Η εξασθένιση της ζώνης αποκοπής σε dB  $A_s = -20 \log_{10} \frac{\delta_2}{1 + \delta_2} > 0 \ (\gg 1)$

όπου  $\delta$  είναι η ανοχή (*tolerance*) της αντίστοιχης ζώνης

Αν με  $H_d(e^{j\Omega})$  δηλώνουμε τη επιθυμητή απόκριση συχνοτήτων του ιδανικού φίλτρου που θέλουμε να κατασκευάσουμε

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-ja\Omega}, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

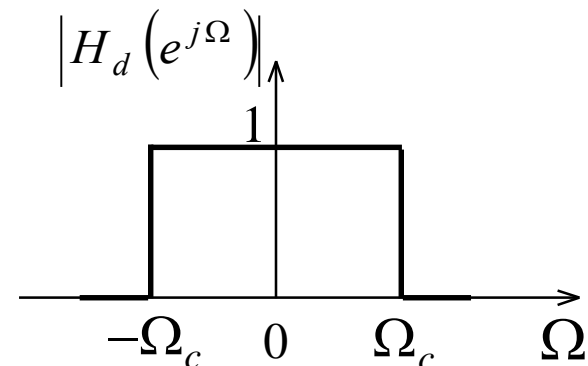
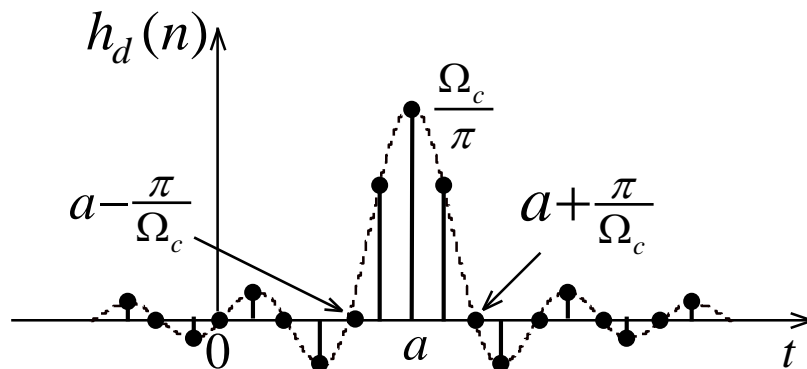
Η συχνότητα  $\Omega_c$  καλείται **συχνότητα αποκοπής** (cutoff frequency)

Η κρουστική απόκριση έχει μη πεπερασμένη διάρκεια και είναι

$$h_d(n) = F^{-1}[H_d(e^{-j\Omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_d(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{+\Omega_c} 1 \cdot e^{-ja\Omega} e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$h_d(n) = \frac{\sin[\Omega_c(n-a)]}{\pi(n-a)}$$

Η  $h_d(n)$  είναι συμμετρική ως προς  $a$  (ιδιότητα των φίλτρων ελάχιστης φάσης)



Για να βρούμε το FIR φίλτρο από την  $h_d(n)$  περιορίζουμε την  $h_d(n)$  από τις δύο πλευρές. Για να είναι το φίλτρο αιτιατό, ευσταθές και ελάχιστης φάσης θα πρέπει η κρουστική του απόκριση να έχει μήκος  $M$  και να βρίσκεται από την

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \text{και} \quad a = \frac{M-1}{2}$$

η λειτουργία αυτή ονομάζεται “παραθύρωση” και περιγράφεται από την

$$h(n) = h_d(n) w(n)$$

όπου

$$w(n) = \begin{cases} \text{συμμετρική συνάρτηση } \omega\varsigma \text{ προς } a, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

αποτελεί την ακολουθία παραθύρου.

Στην περίπτωση του ορθογώνιου παραθύρου είναι

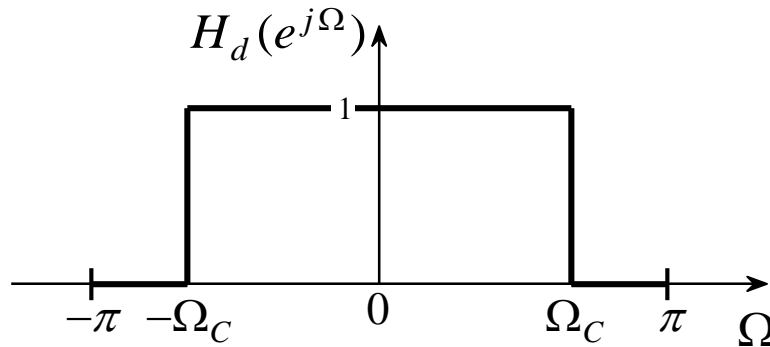
$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = R_M(n)$$



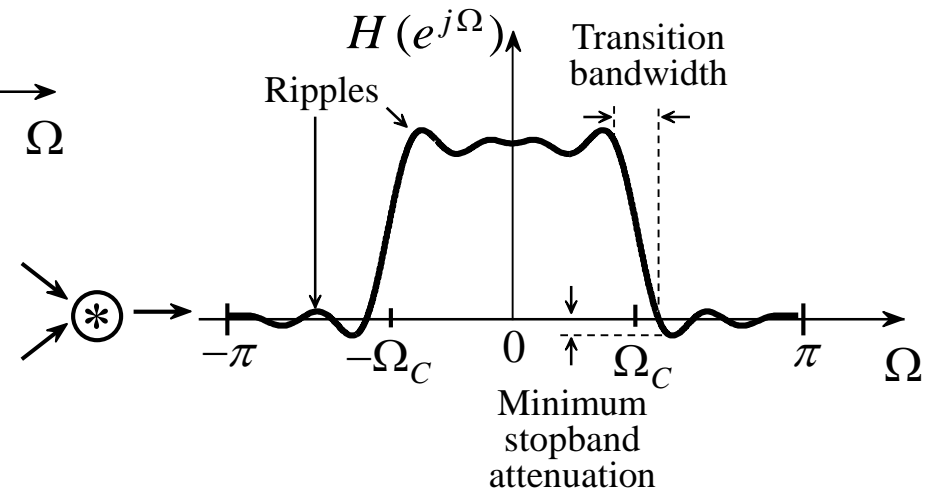
## Ποιο είναι το τμήμα της παραθύρωσης

Η απόκριση συχνότητας του FIR φίλτρου είναι

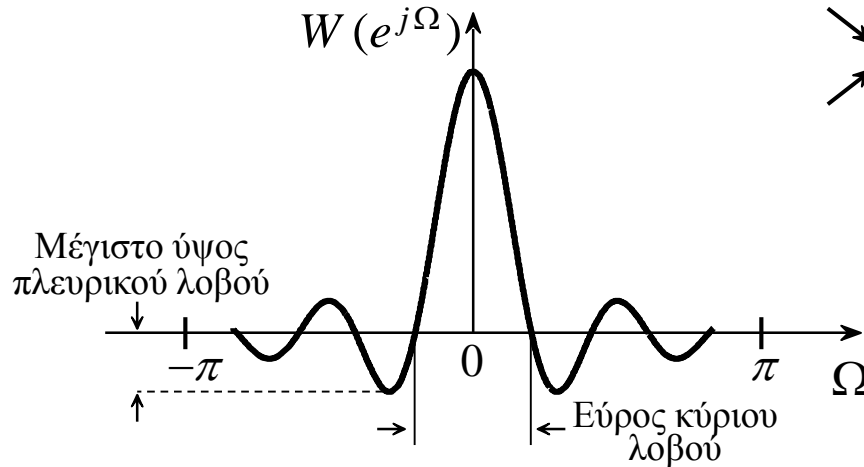
$$H(e^{j\Omega}) = H_d(e^{j\Omega}) \circledast W(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\lambda}) H_d(e^{j(\Omega-\lambda)}) d\lambda$$



Ο ΜΦ του ιδανικού φίλτρου  $h_d(n)$



Ο ΜΦ του πραγματικού φίλτρου  $h(n)$



Ο ΜΦ του ορθογώνιου παραθύρου  $w(n)$

Για την περίπτωση του ορθογώνιου παραθύρου έχουμε

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = R_M(n)$$

Η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας είναι

$$W(e^{j\Omega}) = \frac{\sin\left(\frac{\Omega M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} e^{-j\Omega \frac{M-1}{2}}$$

και η απόκριση πλάτους είναι

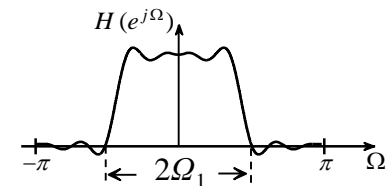
$$W_r(e^{j\Omega}) = \frac{\sin\left(\frac{\Omega M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

1 Η απόκριση πλάτους έχει το πρώτο μηδενισμό στη συχνότητα  $\Omega = \Omega_1$ , όπου

$$\frac{\Omega_1 M}{2} = \pi \Rightarrow \Omega_1 = \frac{2\pi}{M}$$

έτσι η ζώνη διέλευσης έχει περίπου εύρος

$$2\Omega_1 = \frac{4\pi}{M}$$



- 2 Η κορυφή του πρώτου πλευρικού λοβού βρίσκεται στη συχνότητα  $\Omega = 3\pi / M$  και έχει

$$\left| W_r(e^{j\Omega}) \right| = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2M}\right)} \approx \left| \frac{2M}{3\pi} \right|, \quad \text{για } M \gg 1$$

Συγκρίνοντας το πλάτος αυτό με το πλάτος του κύριου λοβού έχουμε ότι το πλάτος του πλευρικού λοβού είναι

$$\frac{2}{3\pi} = 21,22\% = 13\text{dB}$$

του πλάτους του κεντρικού λοβού.

- 3 Παρατηρούμε ότι η ελάχιστη εξασθένιση της ζώνης αποκοπής είναι 21dB και ότι είναι ανεξάρτητη του μήκους του παραθύρου  $M$ .

- 4 Επίσης παρατηρούμε ότι το ακριβές εύρος της μεταβατικής ζώνης είναι

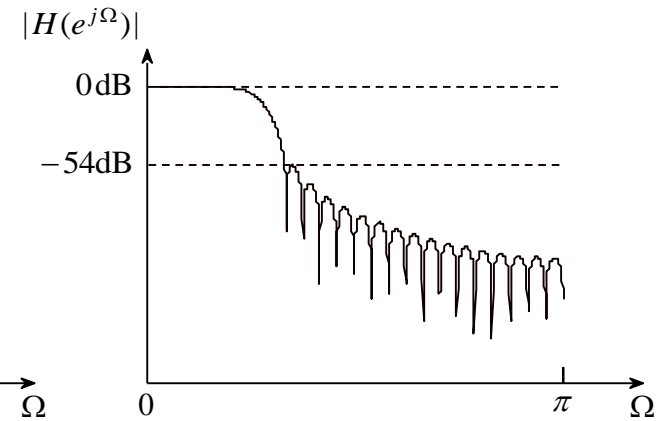
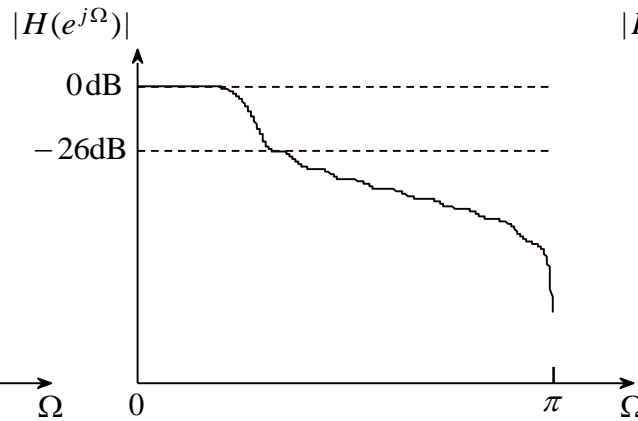
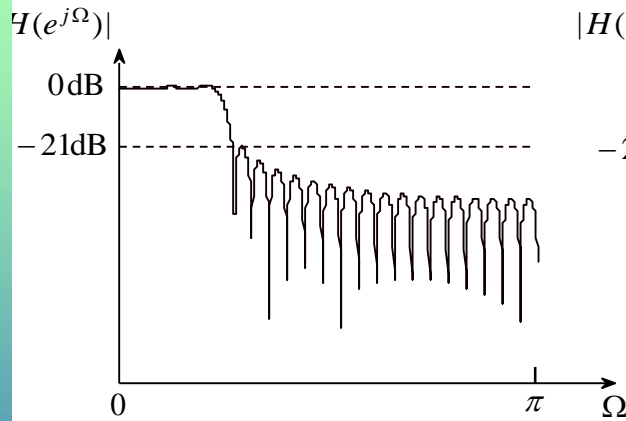
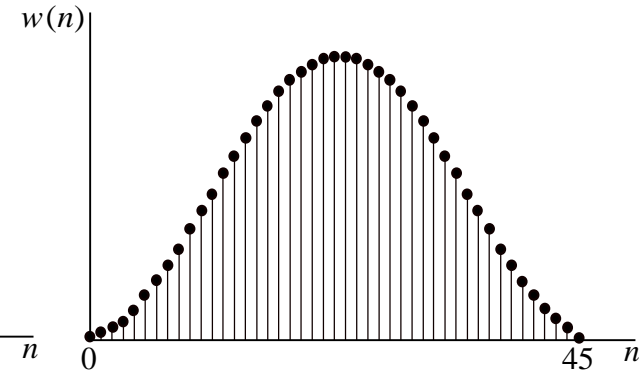
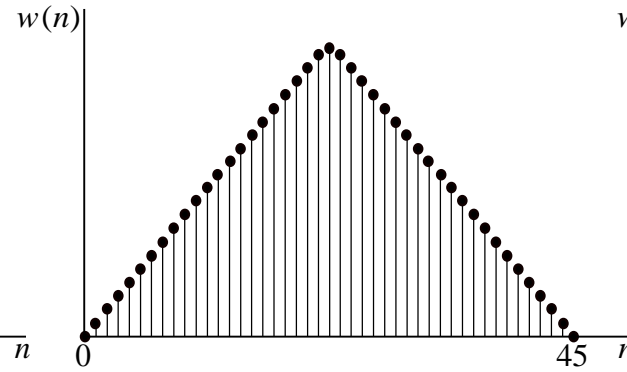
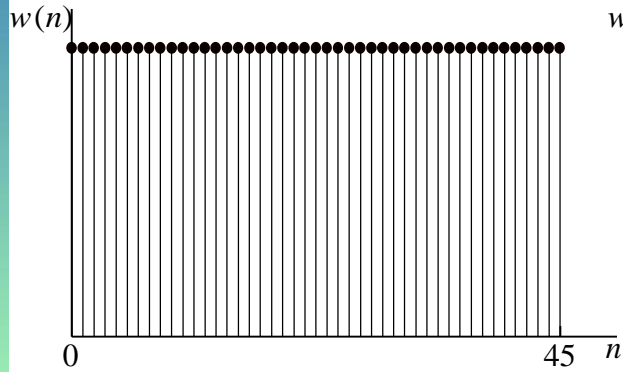
$$\Omega_s - \Omega_p = \frac{1,8\pi}{M}$$

το οποίο είναι το μισό του εύρους του  $4\pi / M$

Ορθογώνιο φίλτρο

Τριγωνικό φίλτρο

Φίλτρο Hamming



Παράθυρο		
Rectangular	$w=\text{boxcar}(M)$	$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
Bartlett	$w=\text{triang}(M)$	$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{M-1}, & 0 \leq n \leq \frac{M-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{M-1}, & \frac{M-1}{2} \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
Hanning	$w=\text{hanning}(M)$	$w(n) = \begin{cases} 0,5 \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right) \right], & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
Hamming	$w=\text{hamming}(M)$	$w(n) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right), & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
Blackman	$w=\text{blacman}(M)$	$w(n) = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M-1}\right), & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Όνομα παραθύρου	Εύρος μεταβατικής ζώνης $\Delta\Omega$ Προσέγγιση	Ακριβής τιμή	Ελάχιστη απόσβεση stopband
Rectangular	$\frac{4\pi}{M}$	$\frac{1,8\pi}{M}$	21 dB
Bartlett	$\frac{8\pi}{M}$	$\frac{6,1\pi}{M}$	25 dB
Hanning	$\frac{8\pi}{M}$	$\frac{6,2\pi}{M}$	44 dB
Hamming	$\frac{8\pi}{M}$	$\frac{6,6\pi}{M}$	54 dB
Blackman	$\frac{12\pi}{M}$	$\frac{11\pi}{M}$	74 dB

## Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί ένα χαμηλοπερατό FIR φίλτρο διακριτού χρόνου με χαρακτηριστικά

$$\Omega_p = 0,2\pi \quad \Omega_s = 0,3\pi \quad R_p = 0,25 \text{ dB} \quad A_s = 50 \text{ dB}$$

## Λύση

Μπορούμε να επιλέξουμε είτε παράθυρο Hamming είτε Blackman αφού και τα δύο δίνουν εξασθένιση μεγαλύτερη από 50 dB.

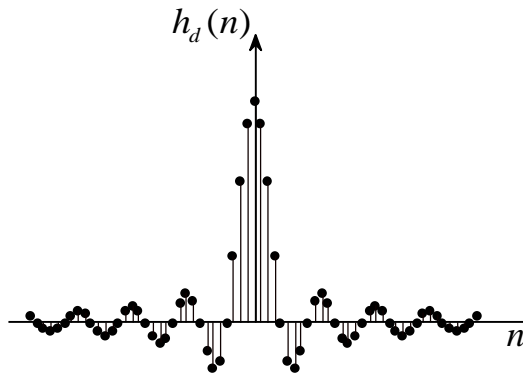
Επιλέγεται παράθυρο Hamming του οποίου η ακριβής τιμή του εύρους ζώνης είναι

$$\Omega_s - \Omega_p = \frac{6,6\pi}{M}$$

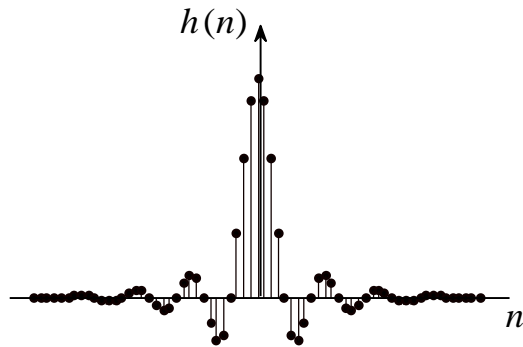
Έτσι η τάξη του φίλτρου είναι

$$M = \left\lfloor \frac{6,6\pi}{\Omega_s - \Omega_p} \right\rfloor + 1$$

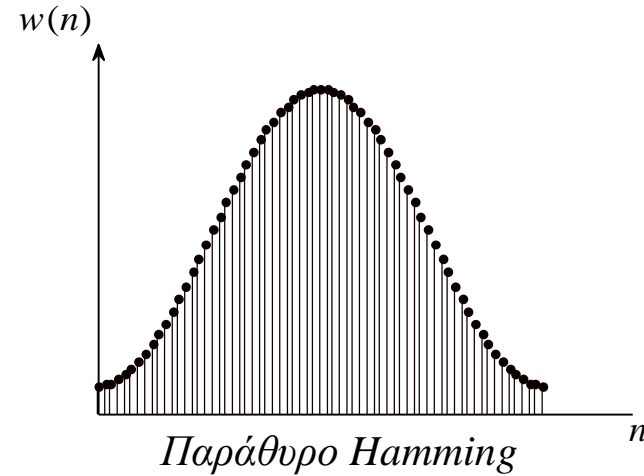
Με το πρόγραμμα που ακολουθεί προσδιορίζεται το φίλτρο η ταλάντωση της ζώνης διέλευσης,  $R_p$ , και η εξασθένιση ζώνης αποκοπής  $A_s$ .



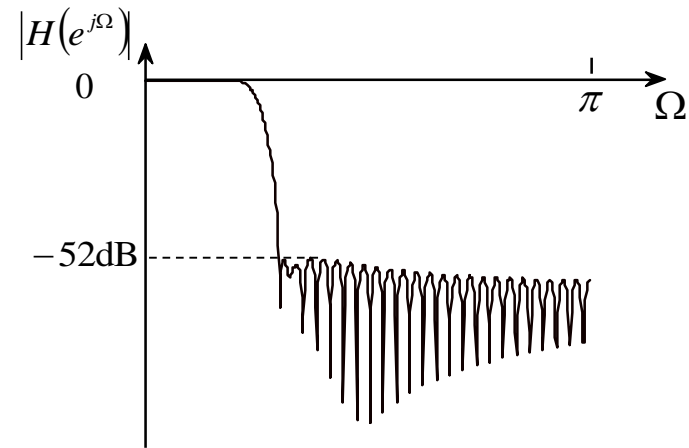
Ιδανική κρουστική απόκριση



Πραγματική κρουστική απόκριση



Παράθυρο Hamming



Μέτρο απόκρισης συχνότητας σε dB

εύρος μεταβατικής ζώνης = 0,3142     $M = 67$      $\Omega_c = 0,7854$      $R_p = 0,0394$      $A_s = 52$



```

wp = 0.2*pi;          ws = 0.3*pi;          tr_width = ws - wp
M = ceil(6.6*pi/tr_width) + 1;
n=[0:1:M-1];
wc = (ws+wp)/2          % Συχνότητα αποκοπής του ιδανικού φίλτρου
hd = ideal_lp(wc,M);    % Ιδανικό φίλτρο
w_ham = (hamming(M))';  % Παράθυρο Hamming
h = hd .* w_ham;        % Πραγματικό φίλτρο
[db,mag,pha,grd,w] = freqz_m(h,[1]);
delta_w = 2*pi/1000;
Rp = -(min(db(1:1:wp/delta_w+1)))          % Ταλάντωση ζώνης διέλευσης
As = -round(max(db(ws/delta_w+1:1:501)))    % Εξασθένηση ζώνης αποκοπής
% plots
subplot(2,2,1); stem(n,hd); title('Ιδανική κρουστική απόκριση')
axis([0 M-1 -0.1 0.3]); xlabel('n'); ylabel('hd(n)')
subplot(2,2,2); stem(n,w_ham); title('Παράθυρο Hamming')
axis([0 M-1 0 1.1]); xlabel('n'); ylabel('w(n)')
subplot(2,2,3); stem(n,h);title('Πραγματική κρουστική απόκριση')
axis([0 M-1 -0.1 0.3]); xlabel('n'); ylabel('h(n)')
subplot(2,2,4); plot(w/pi,db); title('Μέτρο απόκρισης συχνότητας σε dB'); grid
axis([0 1 -100 10]); xlabel('Συχνότητα σε μονάδες π'); ylabel('Decibels')
set(gca,'XTickMode','manual','XTick',[0,0.2,0.3,1])
set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[-50,0])
set(gca,'YTickLabelMode','manual','YTickLabels',['50;' '0'])

```

```

function hd = ideal_lp(wc,M);
% hd = κρουστική απόκριση ιδανικού φίλτρου 0 to M-1
% wc = συχνότητα αποκοπής σε radians
% M = μήκος του ιδανικού φίλτρου
alpha = (M-1)/2;
n = [0:1:(M-1)];
m = n - alpha + eps;
hd = sin(wc*m) ./ (pi*m);

```

```

function [db,mag,pha, w] = freqz_m(b,a);
% db = Σχετικό μέτρο σε dB στο διάστημα 0 έως π radians
% mag = απόλυτο μέτρο στο διάστημα 0 έως π radians
% pha = Απόκριση φάσης σε radians στο διάστημα 0 έως π radians
% w = 501 δείγματα συχνότητας στο διάστημα 0 έως π radians
% b = Πολυώνυμο αριθμητή του f H(z) (για FIR: b=h)
% a = Πολυώνυμο παρανομαστή του H(z) (για FIR: a=[1])
[H,w] = freqz(b,a,1000,'whole');
H = (H(1:1:501))';
w = (w(1:1:501))';
mag = abs(H);
db = 20*log10((mag+eps)/max(mag));
pha = angle(H);

```

Η απόκριση συχνότητας και για τα τέσσερα είδη φίλτρων γραμμικής φάσης είναι

$$H(e^{j\Omega}) = H_r(e^{j\Omega}) e^{j\beta} e^{-j\frac{M-1}{2}\Omega}$$

Στο πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι τιμές του  $\beta$  και του  $H_r(e^{j\Omega})$

Τύπος φίλτρου γραμμικής φάσης		$\beta$	$H_r(e^{j\Omega})$	Συντελεστές
<b>Τύπος-1</b>	$M$ περιττός, συμμετρική $h(n)$	0	$\sum_{n=0}^{(M-1)/2} a(n) \cos(\Omega n)$	$a(n) = 2h\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$ $1 \leq n \leq \frac{M-3}{2}$
<b>Τύπος-2</b>	$M$ άρτιος, συμμετρική $h(n)$	0	$\sum_{n=1}^{M/2} b(n) \cos\left[\Omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$	$b(n) = 2h\left(\frac{M}{2} - n\right)$ $n = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$
<b>Τύπος-3</b>	$M$ περιττός, αντισυμμετρική $h(n)$	$\frac{\pi}{2}$	$\sum_{n=0}^{(M-1)/2} c(n) \sin(\Omega n)$	$c(n) = 2h\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$ $n = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2}$
<b>Τύπος-4</b>	$M$ άρτιος, αντισυμμετρική $h(n)$	$\frac{\pi}{2}$	$\sum_{n=1}^{M/2} d(n) \sin\left[\Omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$	$d(n) = 2h\left(\frac{M}{2} - n\right)$ $n = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$

## Μέθοδος σχεδίασης φίλτρων βασισμένη στη δειγματοληψία στη συχνότητα.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος ανακτάται από τα δείγματά της με βοήθεια της σχέσης

$$H(z) = Z[h(n)] = Z[\text{IDFT}\{H(k)\}] \quad H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) z^{-n} = \frac{1-z^{-M}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k)}{1-z^{-1}e^{j2\pi k/M}}$$

όπου  $H(k)$  είναι ο DFT  $M$ -σημείων της  $H(f)$ .

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1-e^{-j\Omega M}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k)}{1-e^{-j\Omega}e^{j2\pi k/M}}$$

με

$$H(k) = H(e^{j2\pi k/M}) = \begin{cases} H(0), & k=0 \\ H^*(M-k), & k=1,2,\dots,M-1 \end{cases}$$

Για φίλτρα γραμμικής φάσης έχουμε

$$h(n) = \pm h(M-1-n), \quad n=0,1,\dots,M-1$$

όπου το “+” είναι για φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου-1 και τύπου-2 ενώ το “-” για τα φίλτρα γραμμικής φάσης τύπου-3 και τύπου-4.

- FIR φίλτρα γραμμική φάσης. **Συμμετρική** κρουστική απόκριση  $M$  **περιττός**

$$H\left(e^{j\frac{2\pi}{M}k}\right) = \left[ \sum_{n=0}^{M/2} b(n) \cos\left(\frac{2\pi}{M}kn\right) \right] e^{-j\frac{2\pi}{M}k\frac{M-1}{2}}$$

$$a(0) = h\left(\frac{M-1}{2}\right)$$

$$a(n) = 2h\left(\frac{M-1}{2} - n\right),$$

$$1 \leq n \leq \frac{M-3}{2}$$

- FIR φίλτρα γραμμική φάσης. **Συμμετρική** κρουστική απόκριση  $M$  **άρτιος**

$$H\left(e^{j\frac{2\pi}{M}k}\right) = \left[ \sum_{n=0}^{M/2} b(n) \cos\left(\frac{2\pi}{M}k\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right] e^{-j\frac{2\pi}{M}k\frac{M-1}{2}}$$

$$b(n) = 2h\left(\frac{M}{2} - n\right),$$

$$n = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

- FIR φίλτρα γραμμική φάσης. **Αντισυμμετρική** κρουστική απόκριση  $M$  **περιττός**

$$H\left(e^{j\frac{2\pi}{M}k}\right) = \left[ \sum_{n=1}^{(M-1)/2} c(n) \sin\left(\frac{2\pi}{M}kn\right) \right] e^{-j\left[\frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2} \frac{2\pi}{M}k\right]}$$

$$c(n) = 2h\left(\frac{M-1}{2} - n\right),$$

$$n = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2}$$

- FIR φίλτρα γραμμική φάσης. **Αντισυμμετρική** κρουστική απόκριση  $M$  **περιττός**

$$H\left(e^{j\frac{2\pi}{2}k}\right) = \left[ \sum_{n=1}^{M/2} d(n) \sin\left(\frac{2\pi}{2}k\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right] e^{-j\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{2}k\frac{M-1}{2}\right]}$$

$$d(n) = 2h\left(\frac{M}{2} - n\right),$$

$$n = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

τελικά

$$H(k) = H_r\left(\frac{2\pi}{M}k\right) e^{j\angle H(k)}$$

όπου

$$H_r\left(\frac{2\pi}{M}k\right) = \begin{cases} H_r(0), & k = 0 \\ H_r\left(\frac{2\pi}{M}(M-k)\right), & k = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases}$$

και

$$\angle H(k) = \begin{cases} -\frac{M-1}{2} \frac{2\pi}{M} k, & k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor \\ \frac{M-1}{2} \frac{2\pi}{M} (M-k), & k = \left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor + 1, \dots, M-1 \end{cases}, \quad \text{Τύπος 1 και 2}$$

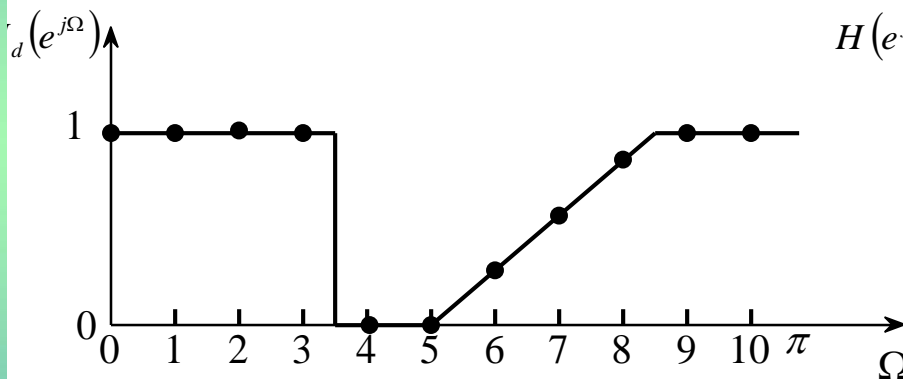
$$\angle H(k) = \begin{cases} \pm \frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2} \frac{2\pi}{M} k, & k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor \\ -\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \frac{M-1}{2} \frac{2\pi}{M} (M-k), & k = \left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor + 1, \dots, M-1 \end{cases}, \quad \text{Τύπος 3 και 4}$$

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι

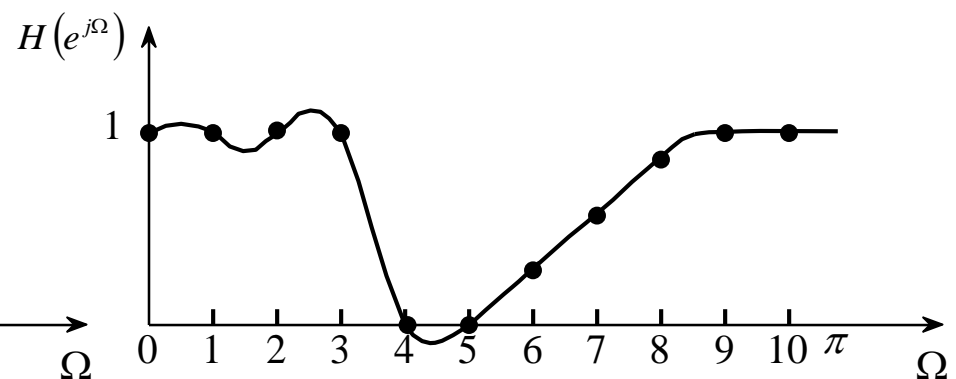
$$h(n) = \text{IDFT}[H(k)]$$

## Μέθοδος σχεδίασης φίλτρων βασισμένη στη δειγματοληψία στη συχνότητα.

Δίνεται ένα ιδανικό φίλτρο βασικής ζώνης  $H_d(\Omega)$ . Προσδιορίζεται το μήκος του φίλτρου  $M$ . Βρίσκονται  $M$  δείγματα της  $H_d(\Omega)$  σε  $M$  ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα 0 έως  $2\pi$ . Βρίσκεται η κρουστική απόκριση του φίλτρου  $h(n)$  και η απόκριση συχνότητας  $H(\Omega)$  του πραγματικού φίλτρου.



*Ιδανική απόκριση συχνότητας και τα δείγματά της*



*Τα δείγματα της ιδανικής απόκρισης και η πραγματική κρουστική απόκριση*

Υπάρχουν δύο τρόποι σχεδίασης κατά προσέγγιση

- Στον πρώτο δεχόμαστε όποιο σφάλμα παρουσιασθεί
- Στο δεύτερο προσθέτουμε σημεία στην μεταβατική ζώνη ώστε να ελαττώσουμε το σφάλμα

## Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί ένα χαμηλοπερατό FIR φίλτρο διακριτού χρόνου με χαρακτηριστικά

$$\Omega_p = 0,2\pi \quad \Omega_s = 0,3\pi \quad R_p = 0,25 \text{ dB} \quad A_s = 50 \text{ dB}$$

### Λύση

Επιλέγουμε  $M=20$  και έχουμε 3 δείγματα στη ζώνη διέλευσης ( $0 \leq \Omega \leq \Omega_p$ ) και 7 δείγματα στη ζώνη αποκοπής ( $\Omega_s \leq \Omega \leq \pi$ ). Έτσι έχουμε

$$H_r(k) = [1, 1, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{15 \text{ μηδενικά}}, 1, 1]$$

είναι επίσης  $M = 20$  και  $a = (20 - 1) / 2 = 9,5$  έτσι έχουμε το φίλτρο γραμμικής φάσης τύπου-2 και έχουμε για το όρισμα

$$\angle H(k) = \begin{cases} -\frac{M-1}{2} \frac{2\pi}{M} k, & k = 0, \dots, \lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor \\ \frac{M-1}{2} \frac{2\pi}{M} (M - k), & k = \lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor + 1, \dots, M - 1 \end{cases} \quad \angle H(k) = \begin{cases} -9,5 \frac{2\pi}{20} k, & 0 \leq k \leq 9 \\ +9,5\pi(20 - k), & 10 \leq k \leq 19 \end{cases}$$

και βρίσκουμε τα δείγματα της συνάρτησης μεταφοράς από την

$$H(k) = H_r\left(\frac{2\pi}{M} k\right) e^{j\angle H(k)}$$

και την κρουστική απόκριση από την

$$h(n) = \text{IDFT}[H(k)]$$



Να σχεδιαστεί ένα χαμηλοπερατό FIR φίλτρο διακριτού χρόνου με χαρακτηριστικά

$$\Omega_p = 0,2\pi$$

$$\Omega_s = 0,3\pi$$

$$R_p = 0,25 \text{ dB}$$

$$A_s = 50 \text{ dB}$$

$$M = 20;$$

$$\alpha = (M - 1) / 2;$$

$$l = 0 : M - 1 ;$$

$$w_l = (2 * \pi / M) * l;$$

$$\text{Hrs} = [1, 1, 1, \text{zeros}(1,15), 1, 1];$$

$$k_1 = 0 : \text{floor}((M - 1)/2);$$

$$k_2 = \text{floor}((M - 1) / 2) + 1 : M - 1;$$

$$\text{angH} = [-\alpha * (2 * \pi) / M * k_1, \alpha * (2 * \pi) / M * (M - k_2)];$$

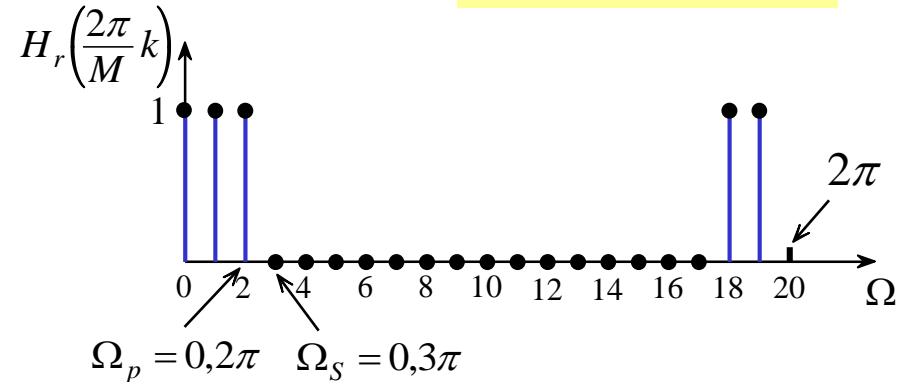
$$H = \text{Hrs} * \exp(j * \text{angH});$$

$$h = \text{real}(\text{ifft}(H, M));$$

$$[\text{db}, \text{mag}, \text{pha}, w] = \text{freqz}_m(h, 1);$$

$$M = 20$$

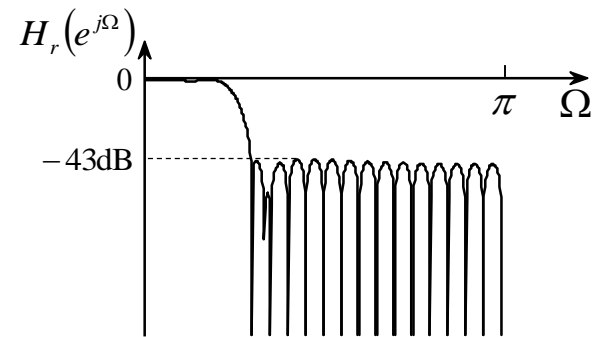
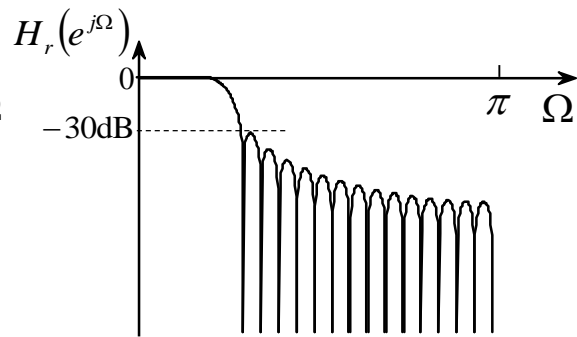
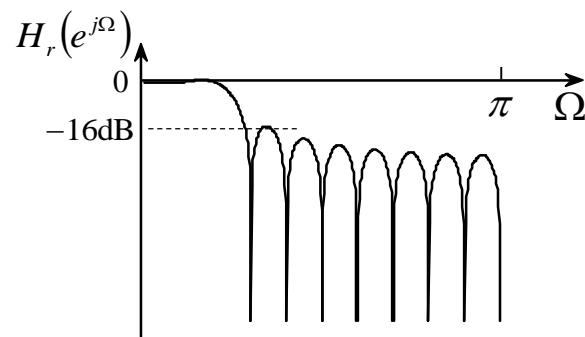
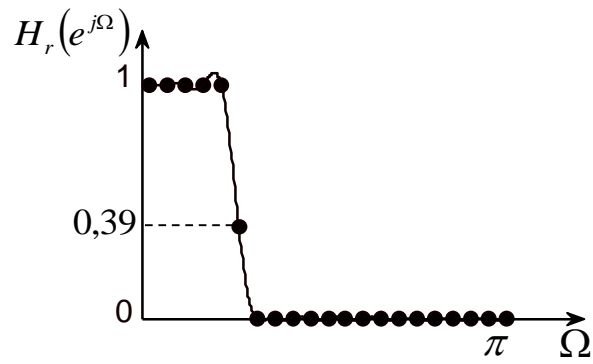
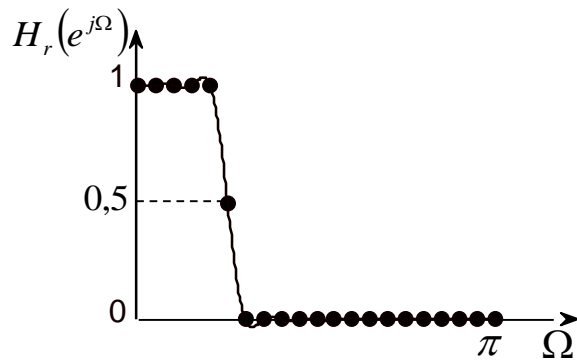
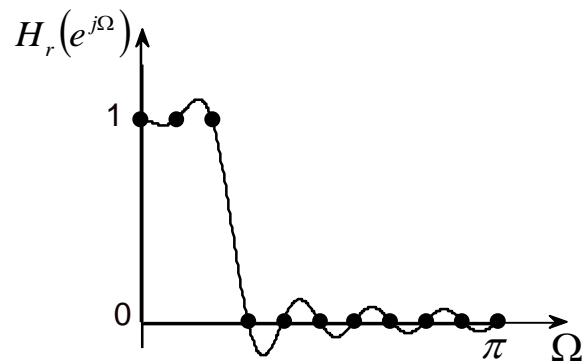
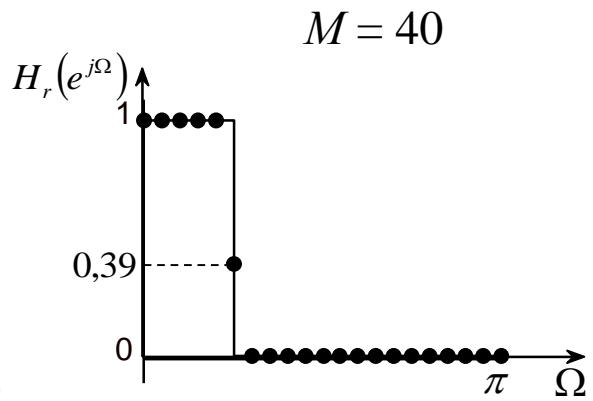
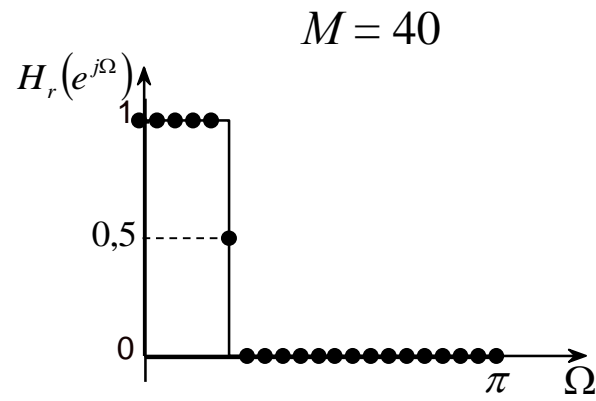
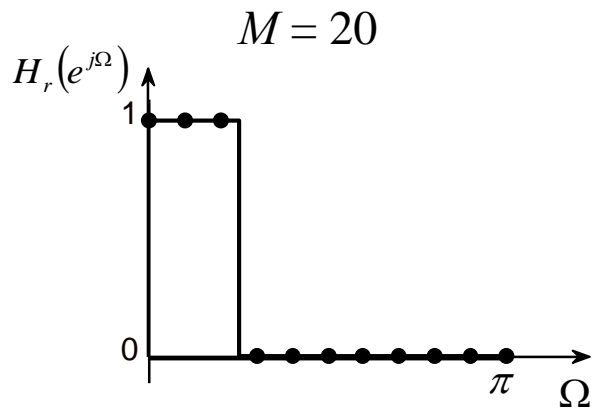
$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{20} = 0,1\pi$$



$$\angle H(k) = \begin{cases} -9,5 \frac{2\pi}{20} k_1, & 0 \leq k_1 \leq 9 \\ +9,5\pi(20 - k_2), & 10 \leq k_2 \leq 19 \end{cases}$$

$$H(k) = H_r\left(\frac{2\pi}{M}k\right) e^{j\angle H(k)}$$

$$h(n) = \text{IDFT}[H(k)]$$



Η  $H_r(e^{j\Omega})$  μπορεί να γραφεί, για όλες τις περιπτώσεις, ως γινόμενο μίας συνάρτησης του  $\Omega$  της  $Q(\Omega)$  και ενός αθροίσματος συνημίτονων  $P(\Omega)$ , δηλαδή,

$$H(e^{j\Omega}) = Q(\Omega)P(\Omega)$$

Τύπος φίλτρου γραμμικής φάσης		$Q(\Omega)$	$L$	$P(\Omega)$
Τύπος-1	$M$ περιττός, συμμετρική $h(n)$	1	$\frac{M-1}{2}$	$\sum_{n=0}^L a(n) \cos(\Omega n)$
Τύπος-2	$M$ άρτιος, συμμετρική $h(n)$	$\cos \frac{\Omega}{2}$	$\frac{M}{2} - 1$	$\sum_{n=0}^L \tilde{b}(n) \cos(\Omega n)$
Τύπος-3	$M$ περιττός, αντισυμμετρική $h(n)$	$\sin \Omega$	$\frac{M-3}{2}$	$\sum_{n=0}^L \tilde{c}(n) \cos(\Omega n)$
Τύπος-4	$M$ άρτιος, αντισυμμετρική $h(n)$	$\sin \frac{\Omega}{2}$	$\frac{M}{2} - 1$	$\sum_{n=0}^L \tilde{d}(n) \cos(\Omega n)$

# Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Σημειώματα

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστήμιον Αθηνών, Σεραφείμ Καραμπογιάς 2015. Σεραφείμ Καραμπογιάς. «Προχωρημένα θέματα επεξεργασίας σήματος. Ψηφιακά φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/DI42/>

# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.