Συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

Η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)-\sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k)$$

μπορεί να θεωρηθεί ως ένας αλγόριθμος υπολογισμού των διαδοχικών τιμών της ακολουθίας εξόδου $y(n)$ ως ένας γραμμικός συνδυασμός των προηγούμενων τιμών της και της παρούσας και των προηγούμενων τιμών της ακολουθίας εισόδου $x(n)$.

Η συνάρτηση μεταφοράς του ΓΧΑ συστήματος είναι

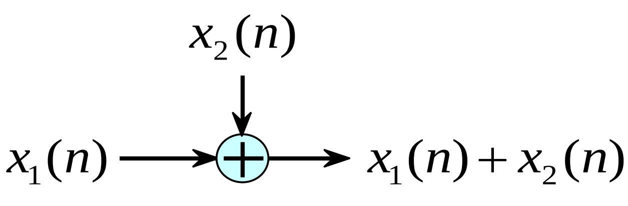
$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k}}$$

Για την υλοποίηση ενός τέτοιου ΓΧΑ συστήματος σε ένα ψηφιακό υπολογιστή χρειάζεται μία σαφής υλοποίηση του αλγορίθμου.

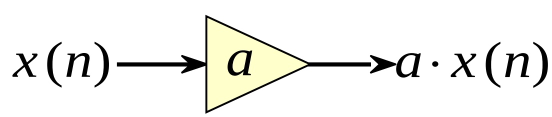
Δομές συστημάτων διακριτού χρόνου που περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές

Τα συστήματα διακριτού χρόνου που περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών παριστάνονται συχνά με τη μορφή διαγραμμάτων ροής, τα οποία αποτελούν έναν απλό και κατανοητό τρόπο αναπαράστασης των εξισώσεων διαφορών και των συναρτήσεων μεταφοράς.

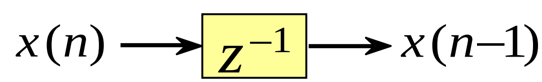
Για να ανεπτύχθη ένα διάγραμμα ροής ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου χρειάζονται τρεις βασικά συστήματα ***αθροιστές***, ***πολλαπλασιαστές με μία σταθερά*** και ***καθυστέρησης ενός δείγματος***.



Αθροιστής

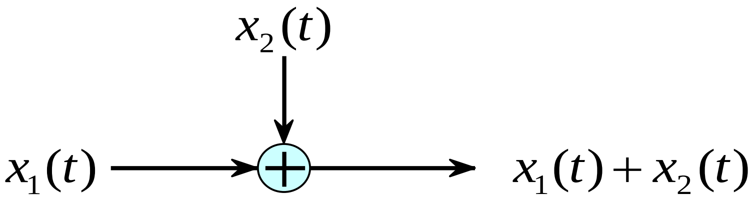


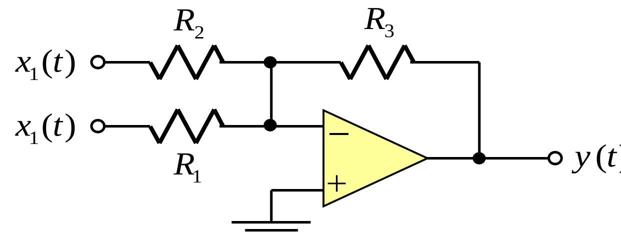
Πολλαπλασιαστής



Καθυστέρηση ενός δείγματος

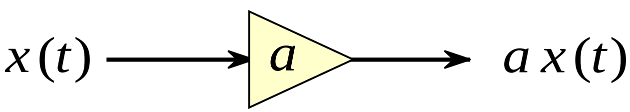
Βασικά στοιχεία υλοποίησης συστημάτων αναλογικού χρόνου

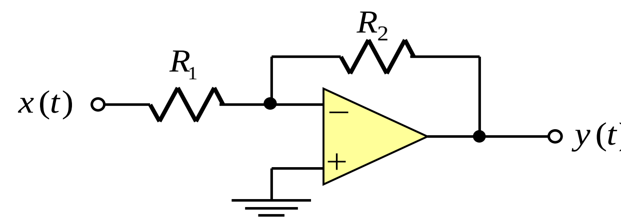




$R_3/R_1 = 1$ $\quad$ $R_3/R_2 = 1$

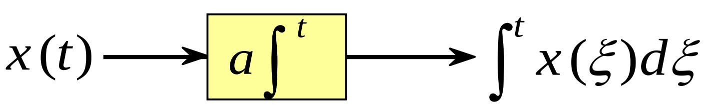
Αθροιστής

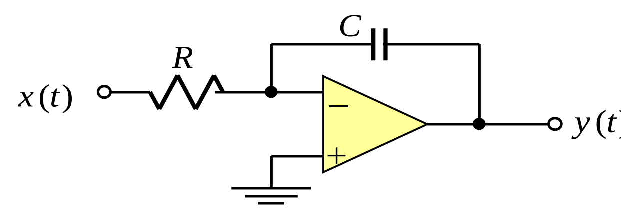




$-a = R_2/R_1$

Πολλαπλασιαστής





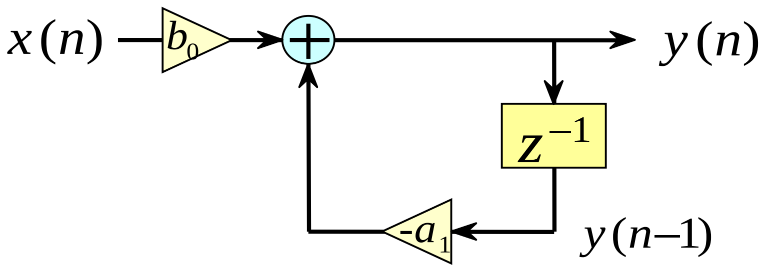
$-a = 1/RC$

Ολοκληρωτής

Παραδείγματα πραγματοποίησης

$$y(n) + a_1\, y(n-1) = b_0\, x(n)$$

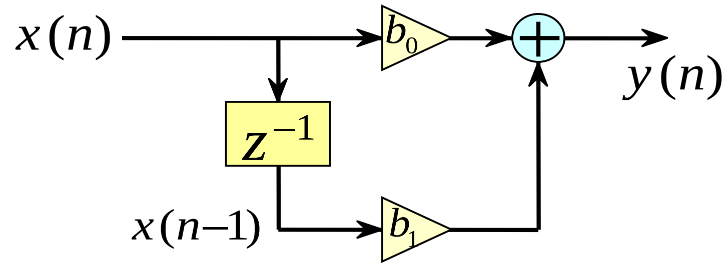
$$H_1(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}}$$



Σύστημα με μόνο πόλους

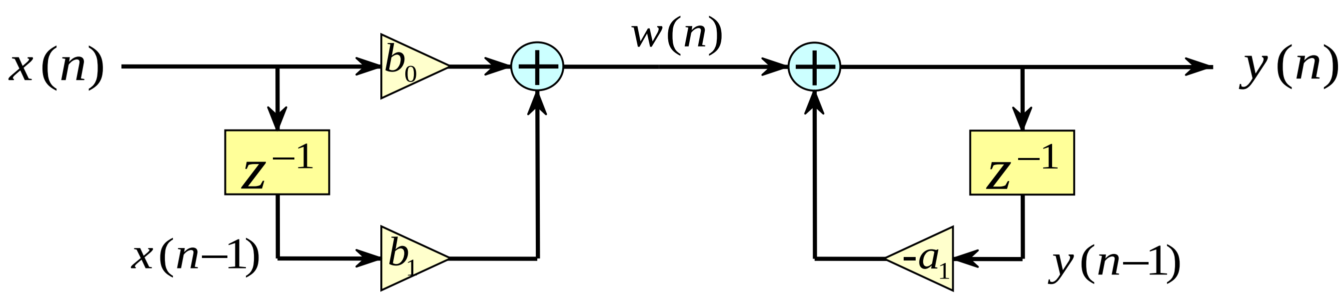
$$y(n) = b_0\, x(n) + b_1\, x(n-1)$$

$$H_2(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$$

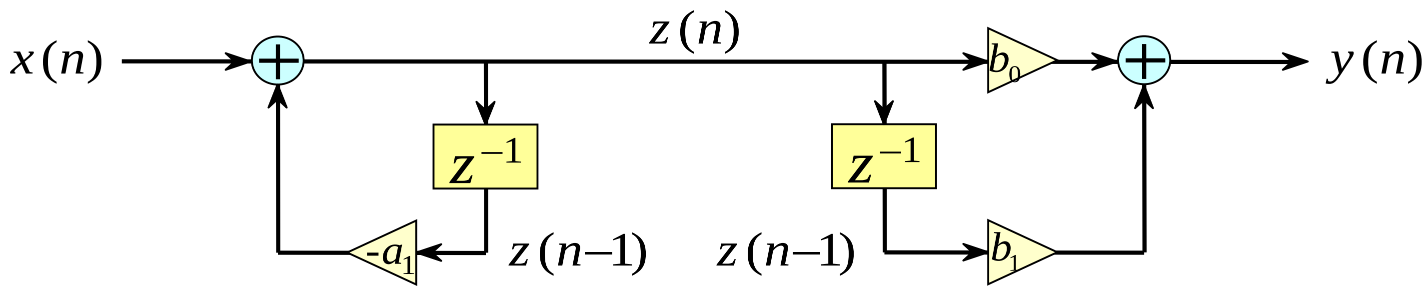


Σύστημα με μόνο μηδενικά

$$y(n) + a_1\, y(n-1) = b_0\, x(n) + b_1\, x(n-1) \qquad H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{1}{b_0} H_1(z) \cdot H_2(z)$$

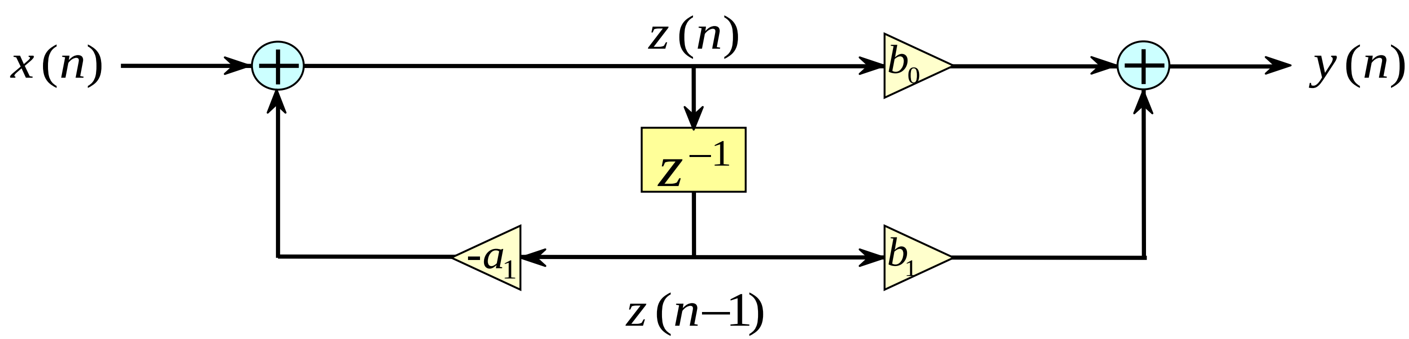


Σύστημα με πόλους και μηδενικά



$$z(n) = -a_1\, z(n-1) + x(n)$$

$$y(n) = b_0 z(n) + b_1\, z(n-1)$$

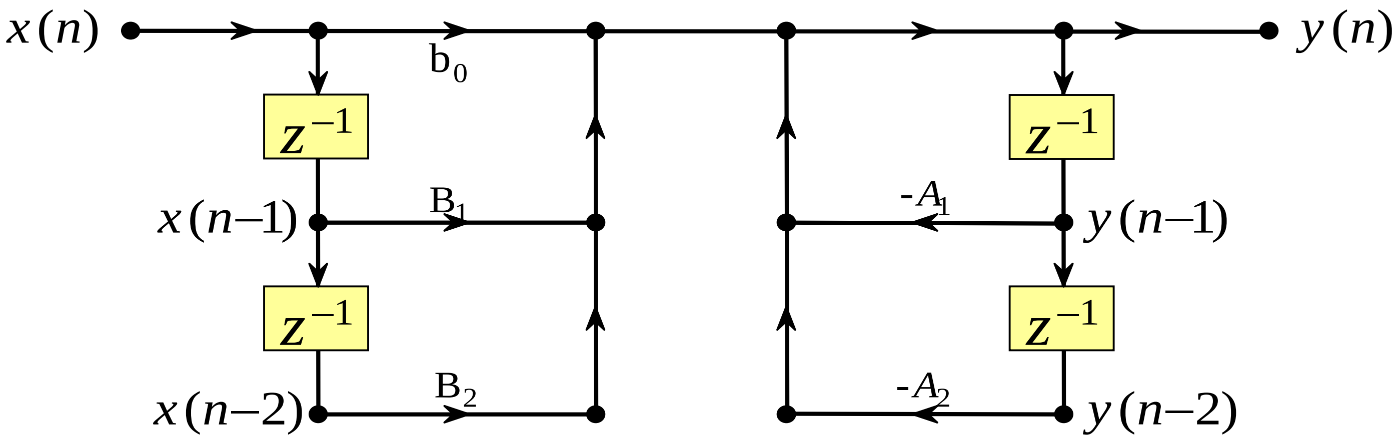


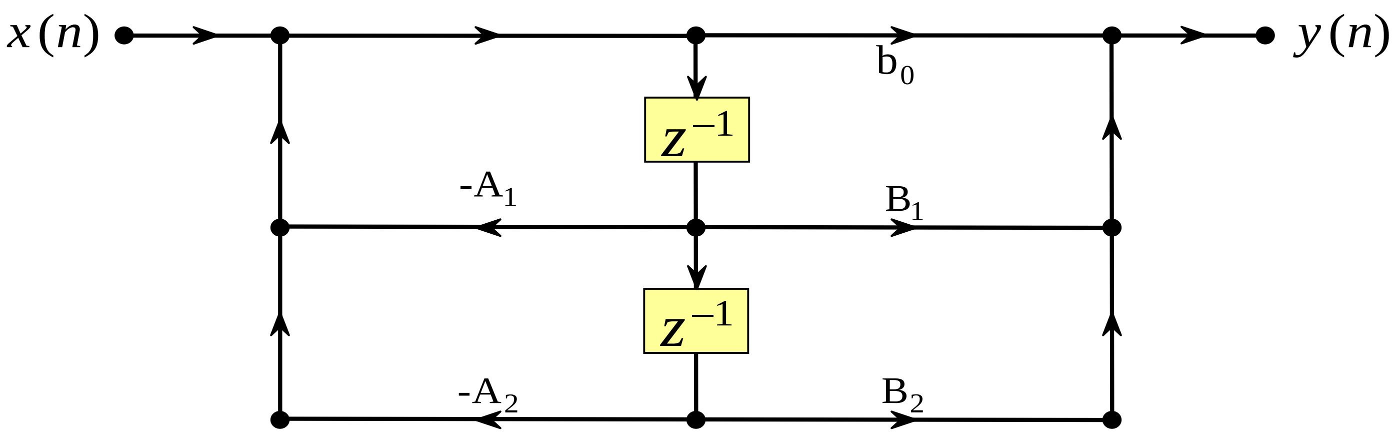
Τα παραπάνω γενικεύονται για εξισώσεις διαφορών της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k), \;\; a_0 = 1$$

$$y(n) + A_1\, y(n-1) + A_2\, y(n-2) = b_0\, x(n) + B_1\, x(n-1) + B_2\, x(n-2)$$

$$H(z) = \frac{b_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}}{1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2}}$$



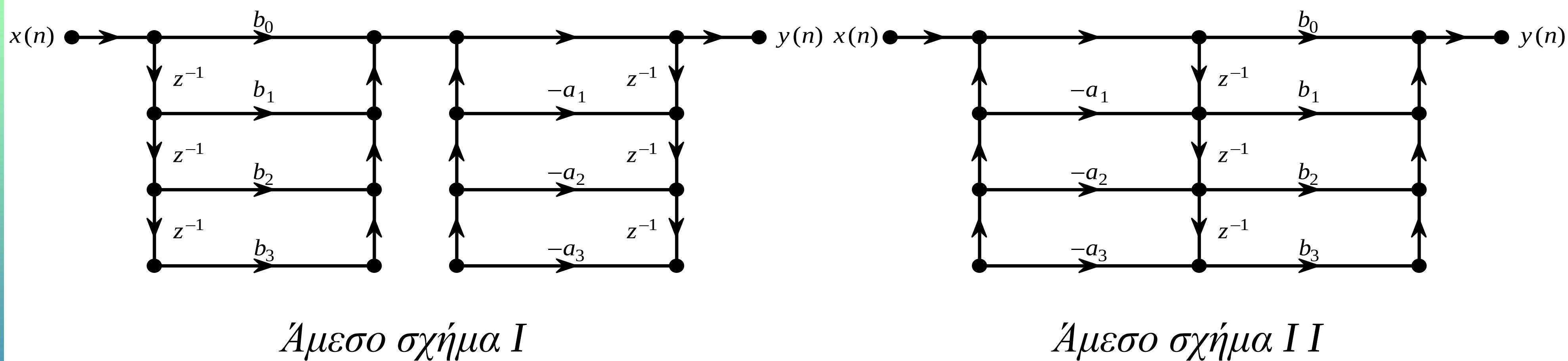


Ψηφιακά φίλτρα με κρουστική απόκριση απείρου μήκους (IIR *Infinite Impulse Response)*

- Άμεσο σχήμα (*direct form*)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k), \quad \text{υποθέτοντας } a_0 = 0$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}}$$



Οι μορφές αυτές υλοποιούνται με τη βοήθεια της συνάρτησης *filter*

Στην πράξη όμως οι υψηλής τάξεις εξισώσεις διαφορών πραγματοποιούνται ως συνδυασμοί δομών πρώτης και /ή δεύτερης τάξης ***σε σειρά*** (*cascade*) ή ***παράλληλα*** (*parallel*). Αυτό γίνεται για να μειωθούν τα σφάλματα των υπολογισμών κατά την υλοποίησή τους με ψηφιακά συστήματα τα οποία χρησιμοποιούν πεπερασμένη ακρίβεια για την αναπαράσταση των συντελεστών και τον υπολογισμό των πράξεων.

Σχήμα Σειριακής Υλοποίησης (*cascade form*)

Στη πραγματοποίηση σε σειρά, η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = b_0 \frac{1 + \frac{b_1}{b_0} z^{-1} + \cdots + \frac{b_N}{b_0} z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{K} \frac{1 + B_{k1} z^{-1} + B_{k2} z^{-2}}{1 + A_{k1} z^{-1} + A_{k2} z^{-2}} = b_0 \prod_{k=1}^{K} H_k(z)$$

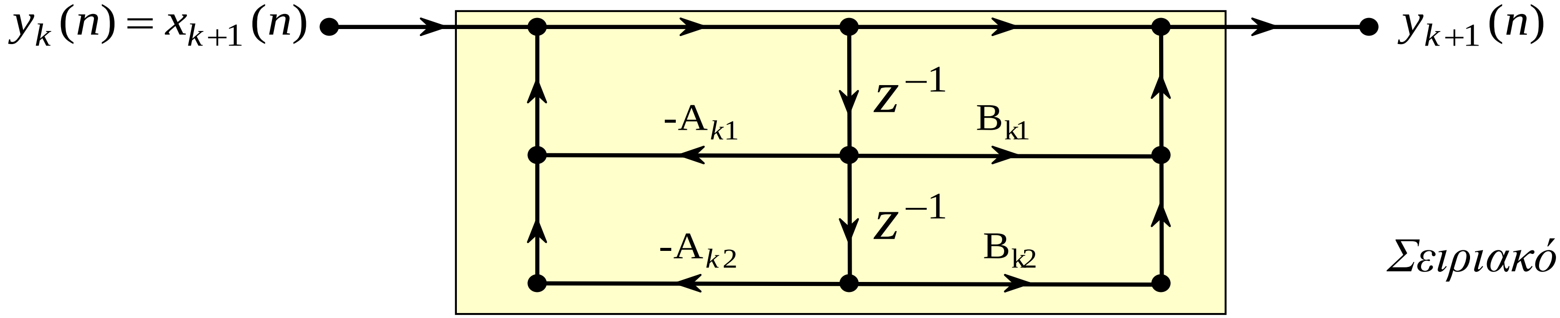
όπου K είναι το ακέραιο μέρος του $(N + 1)/2$ και $H_k(z)$ είναι δομή πρώτης ή δεύτερης τάξης.

δηλαδή,

$$H_k(z) = \frac{Y_{k+1}}{Y_k} = \frac{1 + B_{k1} z^{-1}}{1 + A_{k1} z^{-1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, M$$

$$H_k(z) = \frac{Y_{k+1}}{Y_k} = \frac{1 + B_{k1} z^{-1} + B_{k2} z^{-2}}{1 + A_{k1} z^{-1} + A_{k2} z^{-2}}, \quad k = 1, 2, \ldots, M$$

Για την περίπτωση όπου $H_k(z)$ είναι δεύτερης τάξης έχουμε την δομή



Σειριακό σχήμα

Η δομή σε σειρά ως συνδυασμός δομών πρώτης ή δεύτερης τάξης είναι

$$Y_1(z) = b_0 X(z) \rightarrow \boxed{H_1(z)} \rightarrow \boxed{H_2(z)} - - - \rightarrow \boxed{H_M(z)} \rightarrow Y_{M+1}(z) = Y(z)$$

Η συνάρτηση *dir2cas* δέχεται ως είσοδο τους συντελεστές του άμεσου σχήματος $\{b_n\}$ και $\{a_n\}$ και επιστρέφει τους συντελεστές του σειριακού σχήματος $\{B_{ki}\}$ και $\{A_{ki}\}$.

Το σειριακό σχήμα υλοποιείται από τη συνάρτηση *casfiltr*

Παράδειγμα

Να γίνει η σειριακή πραγματοποίηση του συστήματος διακριτού χρόνου του οποίου η εξίσωση διαφορών είναι

$$16y(n)+12y(n-1)+2y(n-2)-4y(n-3)-y(n-4)=$$
$$x(n)-3x(n-1)+12x(n-2)-27x(n-3)+18x(n-4)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(z)=\frac{1-3z^{-1}+11z^{-2}-27z^{-3}+18z^{-4}}{16+12z^{-1}+2z^{-2}-4z^{-3}-z^{-4}}$$

Η οποία αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως

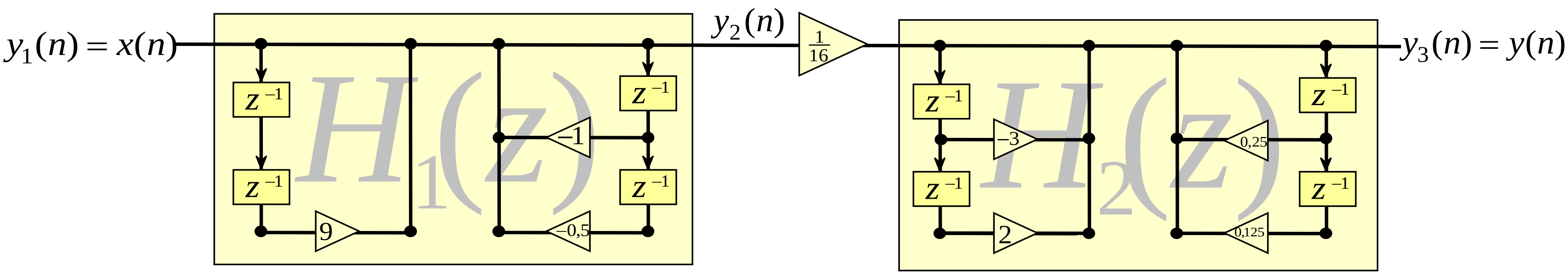
$$H(z)=\frac{1}{16}\cdot\frac{1+9z^{-2}}{1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}\cdot\frac{1-3z^{-1}+2z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$

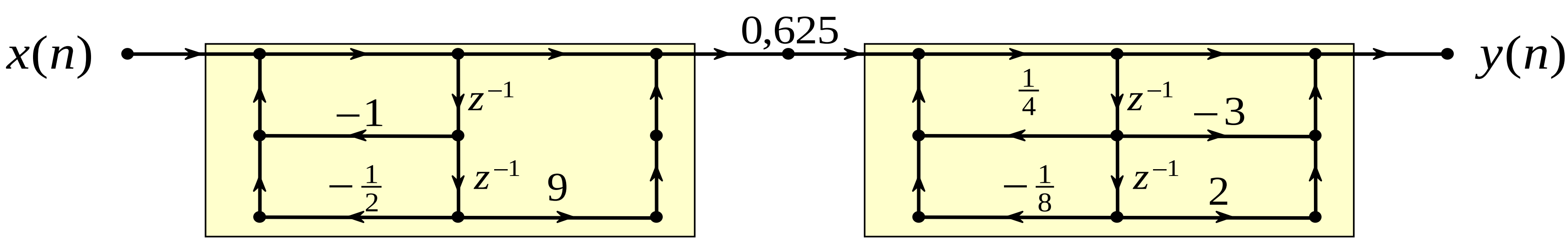
$$H(z)=\frac{1}{16}H_1(z)\cdot H_2(z)=\frac{1}{16}\cdot\frac{1+9z^{-2}}{1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}\cdot\frac{1-3z^{-1}+2z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$

$$H_1(z)=\frac{Y_2(z)}{Y_1(z)}=\frac{1+9z^{-2}}{1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}\qquad H_2(z)=\frac{Y_3(z)}{Y_2(z)}=\frac{1-3z^{-1}+2z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$

$$y_2(n)=-y_2(n-1)-\tfrac{1}{2}y_2(n-2)+y_1(n)+9y_1(n-2)$$

$$y_3(n)=\tfrac{1}{4}y_3(n-1)+\tfrac{1}{8}y_3(n-2)+y_2(n)-3y_2(n-1)+2y_2(n-2)$$





Στη σειριακή πραγματοποίηση πρέπει να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα

1) Με ποιο τρόπο θα πρέπει να συνδυαστούν οι παράγοντες (μονώνυμα ή τριώνυμα) του αριθμητή με του παράγοντες σου παρανομαστή ώστε να σχηματιστούν οι επιμέρους δομές.

2) Με ποια σειρά θα πρέπει να συνδεθούν οι επιμέρους δομές

3) Η ανάγκη κλιμάκωσης, δηλαδή, μείωσης του πλάτος του σήματος σε ενδιάμεσα σημεία της δομής, ώστε αυτό να μην είναι ούτε πολύ μεγάλο, ούτε πολύ μικρό.

Σχήμα Παράλληλης Υλοποίησης (*parallel form*)

Στην παράλληλη πραγματοποίηση η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ αναλύεται σε άθροισμα παραγόντων

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_N z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

$$H(z) = \frac{\hat{b}_0 + \hat{b}_1 z^{-1} + \cdots + \hat{b}_{N-1} z^{1-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{k=M-N} C_k z^{-k}}_{\text{μόνο αν } M \geq N}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^{K} \frac{B_{k0} + B_{k1} z^{-1}}{1 + A_{k1} z^{-1} + A_{k2} z^{-2}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{k=M-N} C_k z^{-k}}_{\text{μόνο αν } M \geq N}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^{K} H_k(z) + \underbrace{\sum_{k=0}^{k=M-N} C_k z^{-k}}_{\text{μόνο αν } M \geq N}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^{K} H_k(z) + \underbrace{\sum_{k=0}^{k=M-N} C_k \, z^{-k}}_{\text{μόνο αν } M \geq N}$$

όπου K το ακέραιο μέρος του $(N + 1)/2$ και

$$H_k(z) = \frac{Y_{k+1}(z)}{Y_k(z)} = \frac{B_{k0} + B_{k1} \, z^{-1}}{1 + A_{k1} \, z^{-1} + A_{k2} \, z^{-2}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, K$$

Επίσης ισχύει

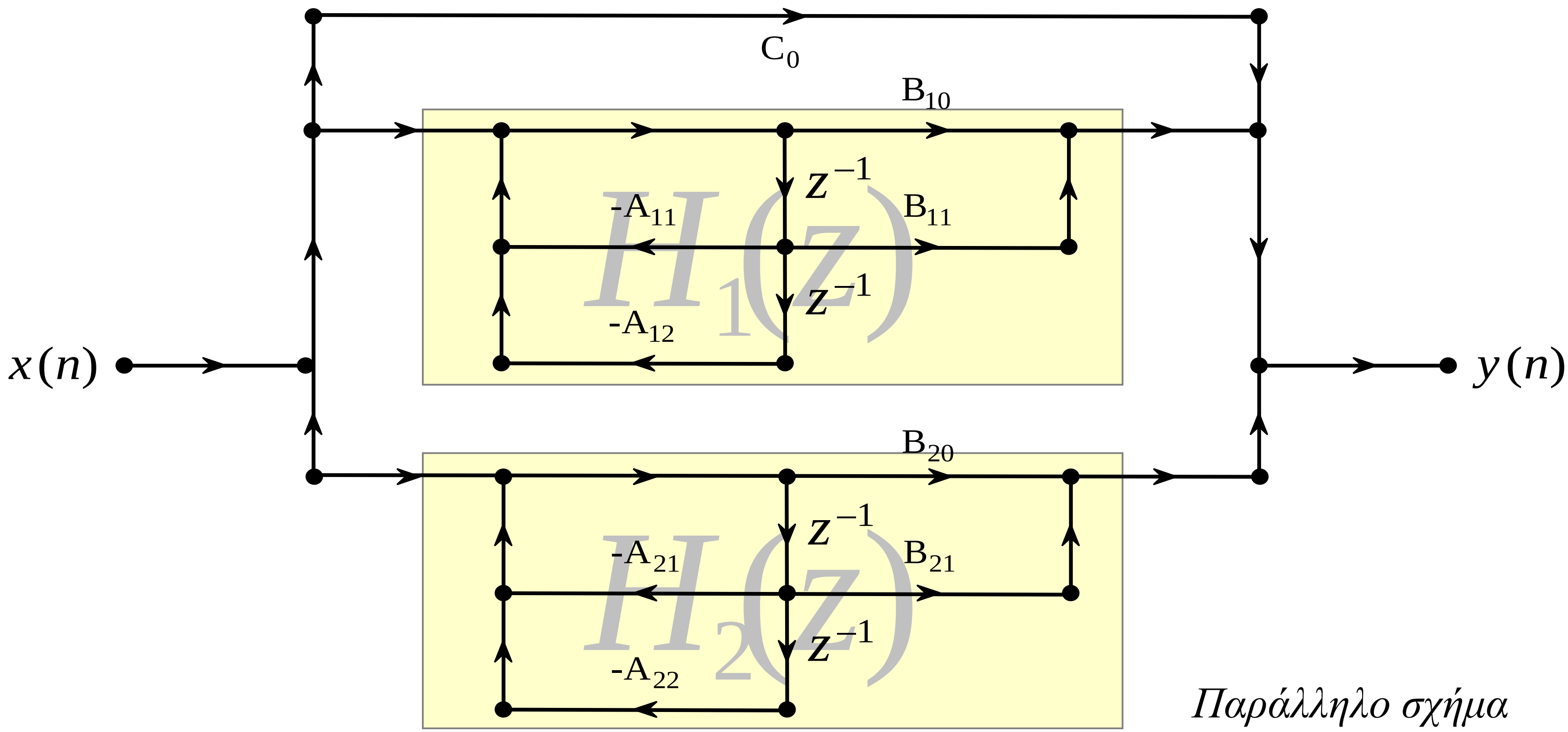
$$Y_k(z) = H_k(z) \, X(z),$$

και

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{K} Y_k(z) + \underbrace{\sum_{k=0}^{k=M-N} C_k \, z^{-k}}_{\text{μόνο αν } M \geq N}$$

Εφαρμογή

$$H(z) = \frac{B_{10} + B_{11} z^{-1}}{1 + A_{11} z^{-1} + A_{12} z^{-2}} + \frac{B_{20} + B_{21} z^{-1}}{1 + A_{21} z^{-1} + A_{22} z^{-2}} + C_0$$



Παράλληλο σχήμα

Η συνάρτηση *dir2par* δέχεται ως είσοδο τους συντελεστές του άμεσου σχήματος $\{b_n\}$ και $\{a_n\}$ και επιστρέφει τους συντελεστές του παράλληλου σχήματος $\{C_m\}$, $\{B_{ki}\}$ και $\{A_{ki}\}$.

Το σειριακό σχήμα υλοποιείται από τη συνάρτηση *parfiltr*

Ψηφιακά φίλτρα με κρουστική απόκριση πεπερασμένου μήκους (FIR *Finite Impulse Response)*

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός FIR φίλτρου είναι

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{M-1} z^{1-M} = \sum_{n=0}^{M-1} b_n z^{-n}$$

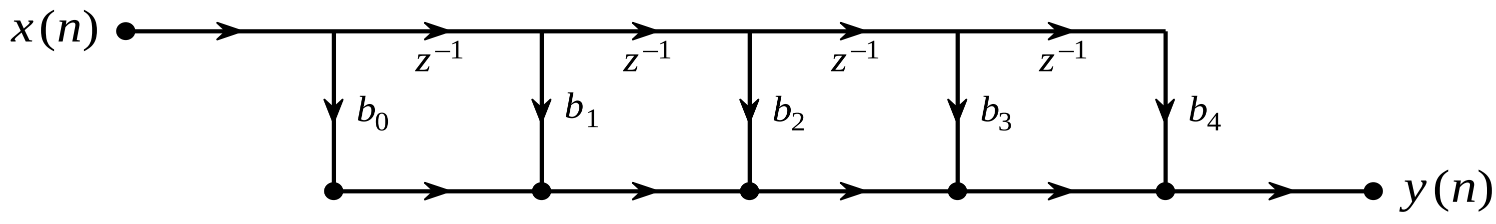
η κρουστική απόκριση είναι

$$h(n) = \begin{cases} b_n, & 0 \le n \le M-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και η εξίσωση διαφορών είναι

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_{M-1} x(n-M+1)$$

Άμεσο σχήμα

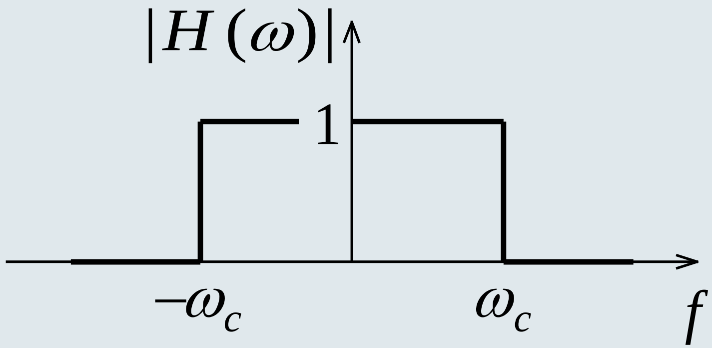


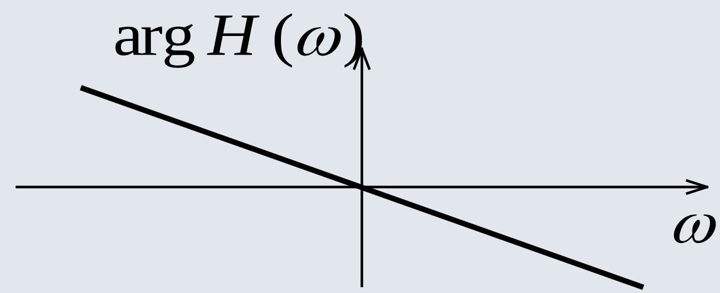
Άμεσο σχήμα, $M = 4$

Η μορφές αυτή υλοποιούνται με τη βοήθεια της συνάρτησης *filter*

ΙΔΑΝΙΚΟ ΦΙΛΤΡΟ ΒΑΣΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ - ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ

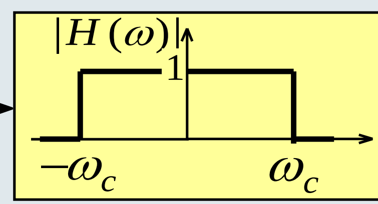
$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$





Η επίδραση του φίλτρου σε ένα σήμα εισόδου, με φασματικό περιεχόμενο εντοπισμένο στη ζώνη διέλευσης, είναι μια χρονική καθυστέρηση t_0.

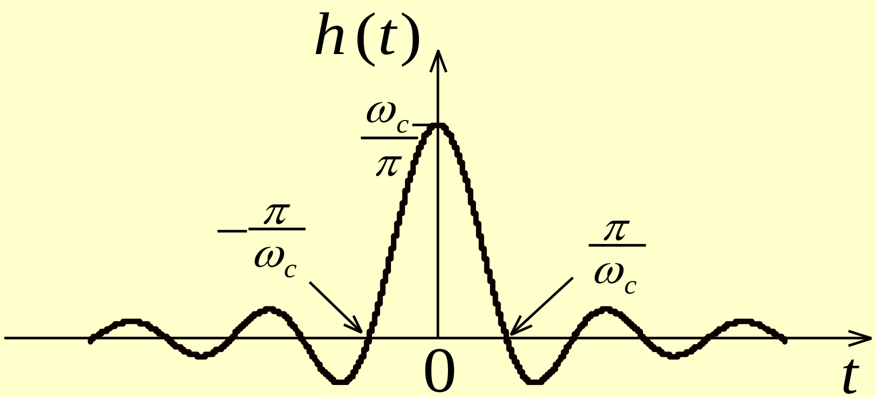
$x(t)$ →

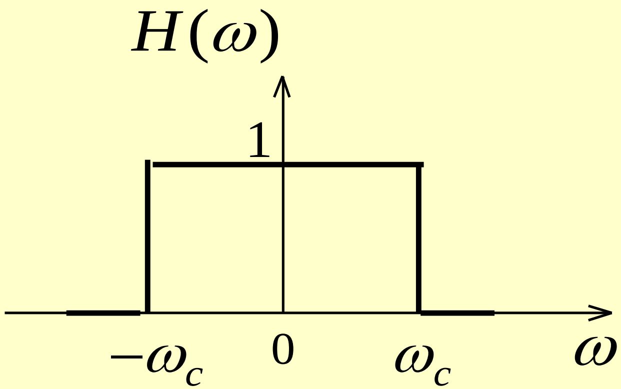


→ $y(t) = x(t - t_0)$

$$h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$





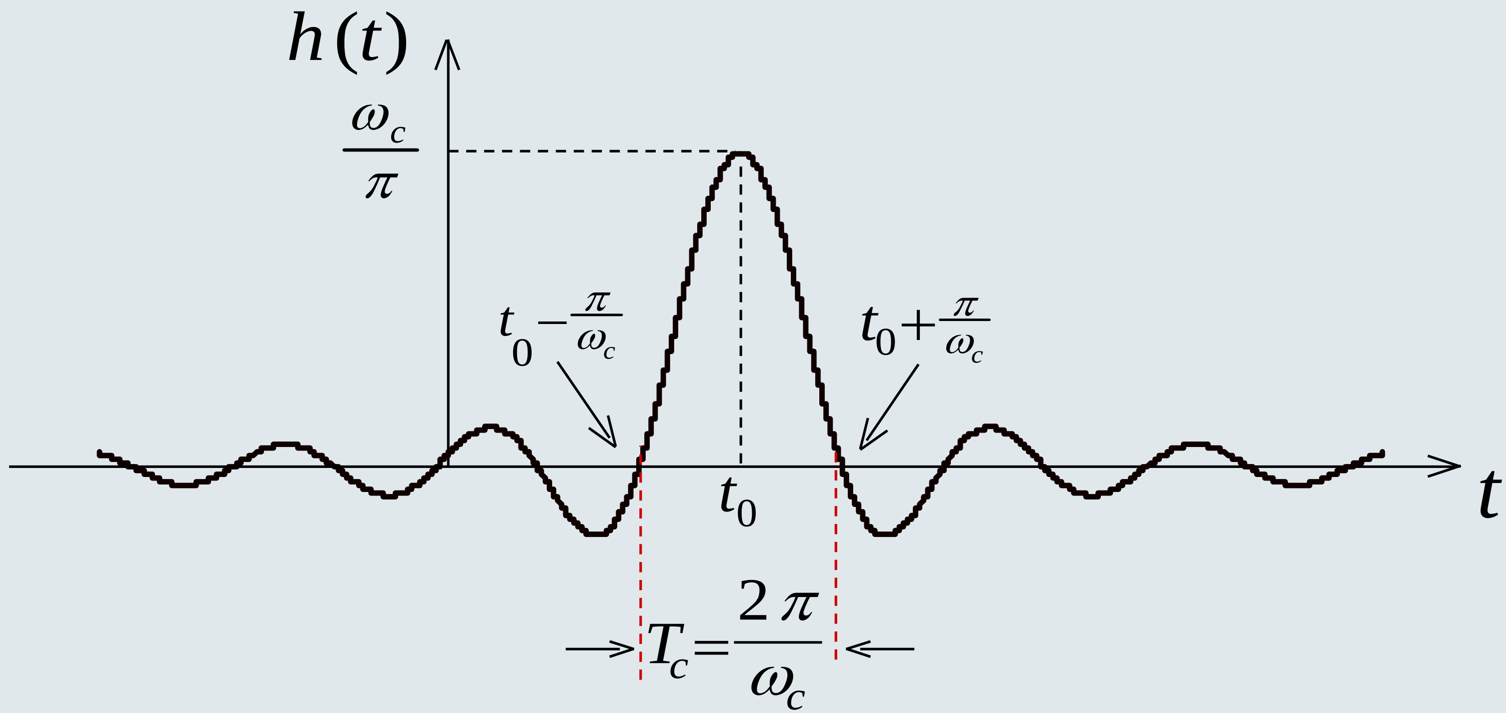
Ολίσθηση στο χρόνο

$$x(t-t_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega_0 t} X(\omega)$$

για κάθε πραγματικό αριθμό t_0.

Η κρουστική απόκριση του ιδανικού κατωπερατού φίλτρου

$$h(t) = \frac{\sin[\omega_c (t - t_0)]}{\pi (t - t_0)} = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\omega_c (t - t_0)}{\pi} \right]$$



Γραμμική Απόκριση Φάσης

Ένα φίλτρο έχει ***γραμμική απόκριση φάση*** (*linear phase response*) όταν η διαφορά φάσης $\theta(\omega)$ μεταξύ του σήματος εισόδου και εξόδου για σήμα γωνιακής συχνότητας ω, δίνεται από

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega \quad \text{ή} \quad \theta(\omega) = b - \alpha\omega$$

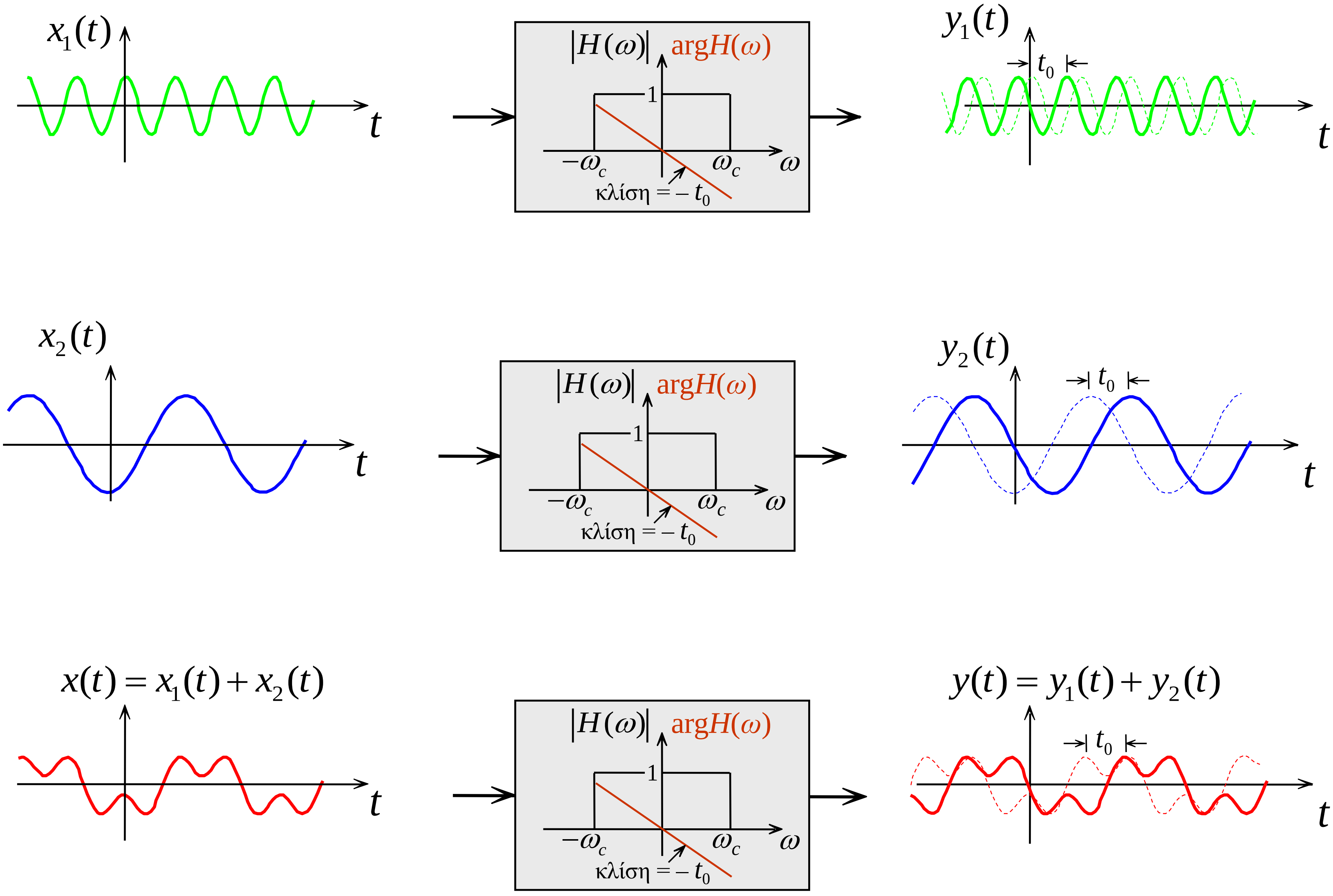
όπου α και b σταθερές που εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά του φίλτρου.

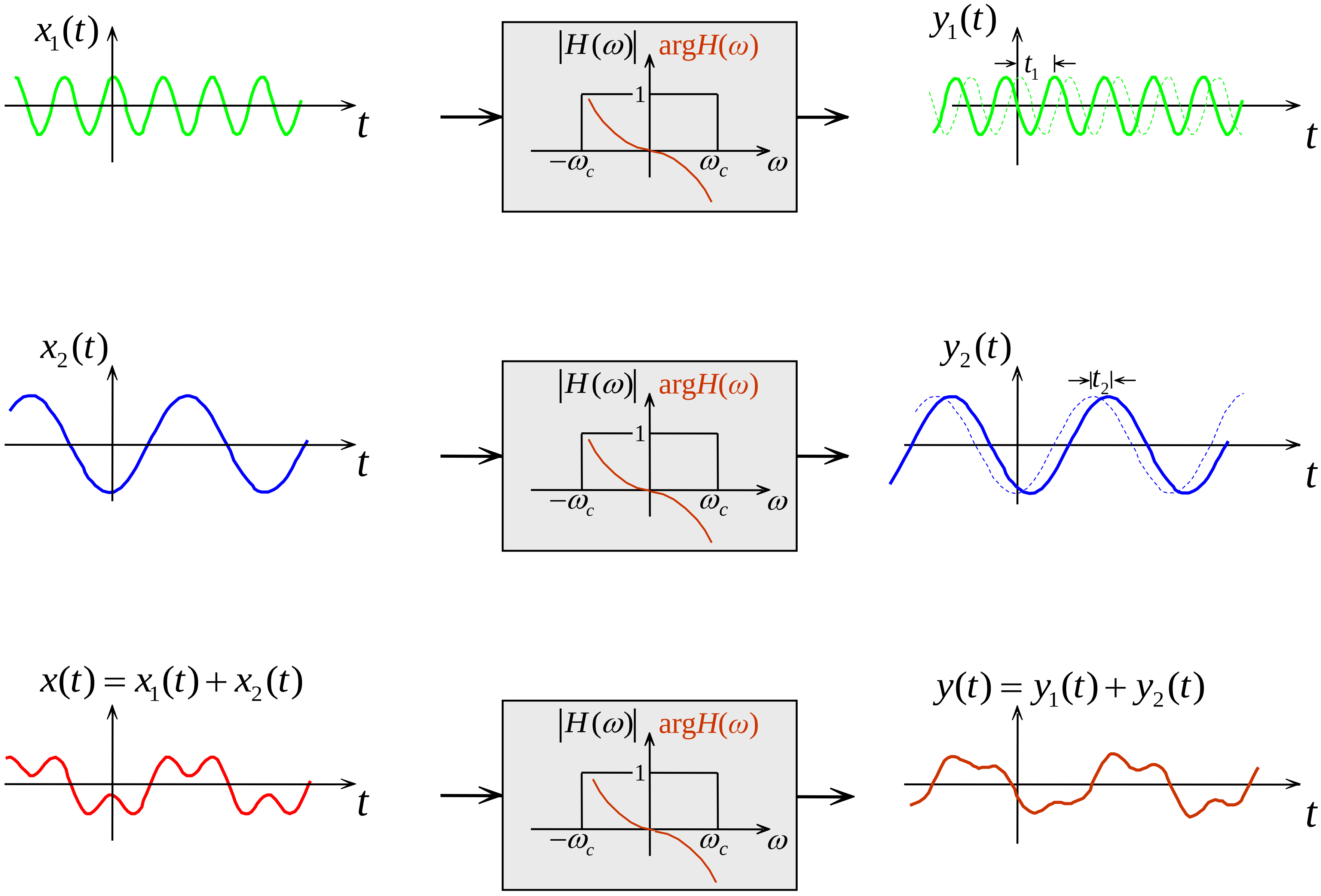
Όταν οι αρμονικές συνιστώσες ενός σήματος, διέλθουν από σύστημα που έχει γραμμική απόκριση φάσης σύμφωνα με τη παραπάνω σχέση υπόκεινται όλες στην ίδια χρονική καθυστέρηση ίση με α sec, με αποτέλεσμα να μην καταστρέφεται η μορφή του σήματος. Αυτό γίνεται φανερό αν σκεφτούμε ότι

$$\cos(\omega t + \theta) = \cos(\omega t - \alpha\omega) = \cos[\omega(t - \alpha)].$$

Το ανθρώπινο σύστημα ακοής δεν είναι ευαίσθητο στις φασικές μετατοπίσεις των αρμονικών ενός σήματος.

Οι φασματικές όμως μετατοπίσεις έχουν καταστρεπτικά αποτελέσματα σε περιπτώσεις που μας ενδιαφέρει η μορφή του σήματος π.χ. τηλεπικοινωνίες καρδιογράφημα εικόνα κ.τ.λ.


$x_1(t)$
t
$|H(\omega)|$
$\arg H(\omega)$
1
$-\omega_c$
ω_c
ω
κλίση = – t_0
$y_1(t)$
t_0
$x_2(t)$
$y_2(t)$
$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$
$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$


$x_1(t)$
t
$|H(\omega)|$
$\arg H(\omega)$
1
$-\omega_c$
ω_c
ω
$y_1(t)$
t_1
t
$x_2(t)$
t
$|H(\omega)|$
$\arg H(\omega)$
1
$-\omega_c$
ω_c
ω
$y_2(t)$
t_2
t
$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$
t
$|H(\omega)|$
$\arg H(\omega)$
1
$-\omega_c$
ω_c
ω
$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$
t

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η απόκριση συχνότητας γράφεται ως

$$H(\Omega) = H_r(\Omega)e^{j(\beta - a\Omega)}, \quad \beta = \pm\frac{\pi}{2},\ a = \frac{M-1}{2}$$

Όπου $H_r(\Omega)$ είναι το πλάτος της συνάρτησης απόκρισης και όχι το μέτρο της συνάρτησης απόκρισης. Το πλάτος της συνάρτησης απόκρισης είναι πραγματικός θετικός ή αρνητικός αριθμός σε αντίθεση με το μέτρο της συνάρτησης απόκρισης που είναι πάντα θετικό. Επίσης η φάση η οποία αντιστοιχεί στο πλάτος της συνάρτησης απόκρισης είναι συνεχής συνάρτηση ενώ η φάση που αντιστοιχεί στο μέτρο της συνάρτησης απόκρισης είναι ενγένει ασυνεχής συνάρτηση.

Παράδειγμα

Η κρουστική απόκριση είναι $h(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 1\}$ Η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{2} h(n)e^{-j\Omega n} = 1 + 1e^{-j\Omega} + 1e^{-j2\Omega} = \{1 + 2\cos\Omega\}e^{-j\Omega}$$

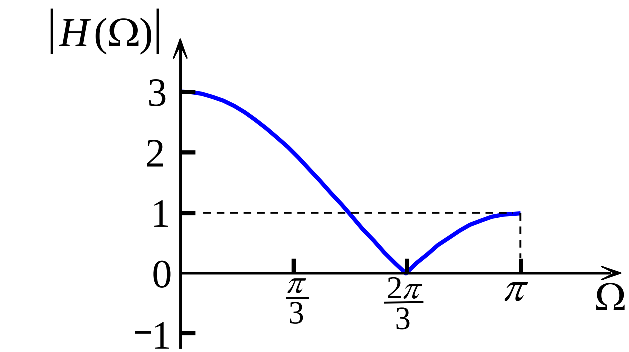
$$H(\Omega) = \{1 + 2\cos\Omega\} e^{-j\Omega}$$

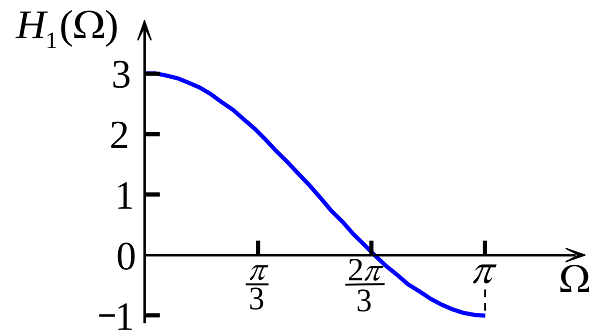
$$|H(e^{j\Omega})| = |1 + 2\cos\Omega|$$

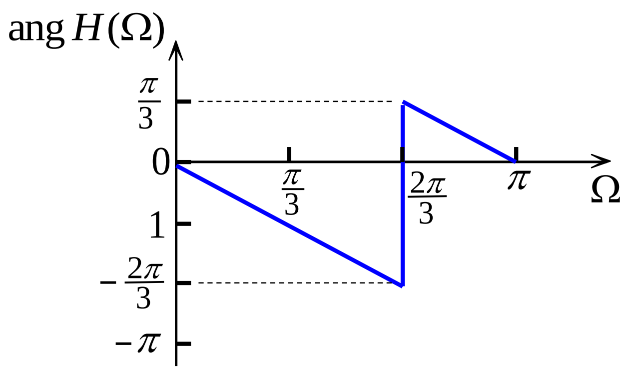
$$H_r(\Omega) = 1 + 2\cos\Omega$$

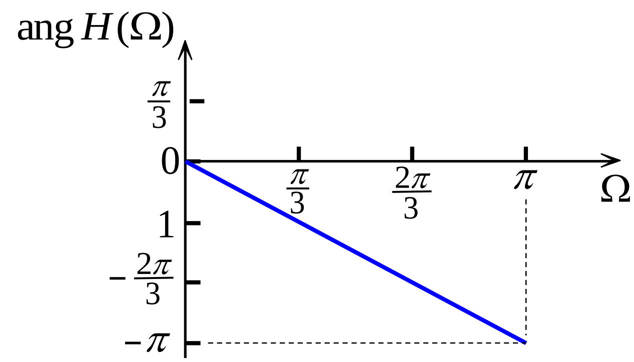
$$\angle H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} -\Omega, & 0 < \Omega \le 2\pi/3 \\ \pi - \Omega, & 2\pi/3 < \Omega < \pi \end{cases}$$

$$\angle H(e^{j\Omega}) = -\Omega$$







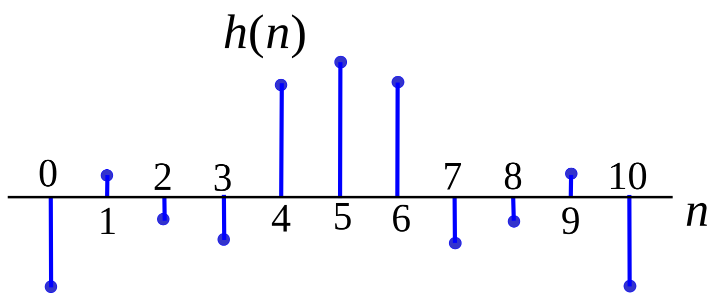


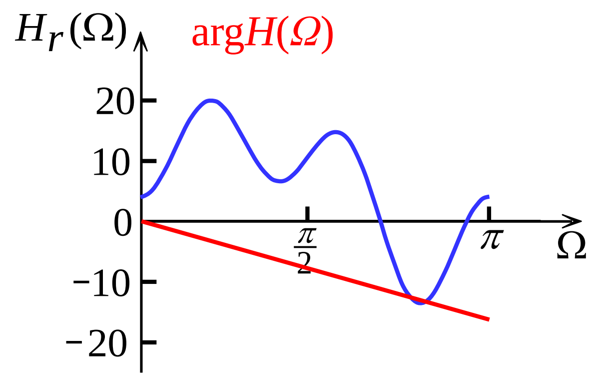
Παράδειγμα

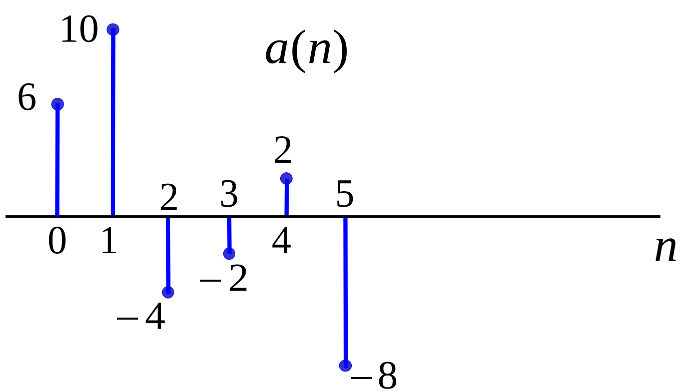
Η κρουστική απόκριση είναι $h(n)=\{\underset{\uparrow}{-4},\ 1,\ -1,\ -2,\ 5,\ 6,\ 5,\ -2,\ -1,\ 1,\ -4\}$

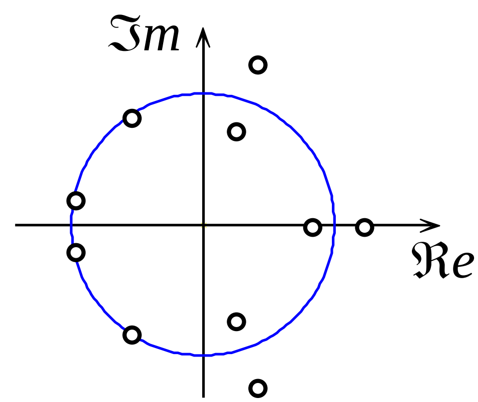
$$H_r(\Omega) = 6+10\cos(\Omega) - 4\cos(2\Omega) - 2\cos(3\Omega) + 2\cos(4\Omega) - 8\cos(5\Omega)$$

$$\arg H(\Omega) = -5\Omega$$









Ιδιότητες των FIR φίλτρων γραμμικής φάσης

Αν $h(n)$, $0 \le n \le M - 1$ είναι η κρουστική απόκριση μήκους M τότε η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) z^{-n} = z^{-(M-1)} \sum_{n=0}^{M-1} h(n) z^{M-1-n}$$

η οποία έχει $(M - 1)$ πόλους στην αρχή ($z = 0$) και $(M - 1)$ μηδενικά στο z-επίπεδο. Η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) e^{-j\Omega n}, \quad -\pi < \Omega \le \pi$$

- Αν οι όροι της κρουστικής απόκρισης $h(n)$ παρουσιάζουν τη συμμετρία

$$h(n) = h(M-1-n), \quad 0 \le n \le M-1$$

τότε το FIR φίλτρο έχει γραμμική φάση, δηλαδή,

$$\angle H\left(e^{j\Omega}\right) = -\alpha\Omega, \quad -\pi < \Omega \le \pi$$

όπου $a = \dfrac{M-1}{2}$ είναι η ***σταθερά καθυστέρησης φάσης*** (*phase delay*).

Ιδιότητες των FIR φίλτρων γραμμικής φάσης

Ένα FIR φίλτρο με συμμετρική κρουστική απόκριση και περιττό πλήθος όρων έχει γραμμική φάση, δηλαδή, όταν οι αρμονικές συνιστώσες ενός σήματος διέλθουν από το σύστημα αυτό υπόκεινται όλες την ίδια χρονική καθυστέρηση ίση με $\alpha = \frac{M-1}{2}$.

- Αν οι όροι της κρουστικής απόκρισης $h(n)$ παρουσιάζουν τη συμμετρία

$$h(n) = -h(M-1-n), \quad 0 \le n \le M-1$$

τότε η γραμμική φάση του FIR φίλτρο έχει τη μορφή

$$\angle H\left(e^{j\Omega}\right) = \beta - \alpha\Omega, \quad -\pi < \Omega \le \pi$$

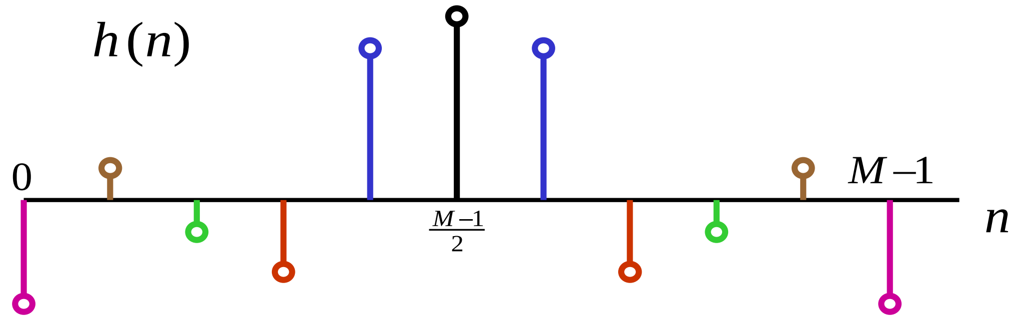
$$\frac{d\angle H\left(e^{j\Omega}\right)}{d\Omega} = -\alpha$$

όπου $a = \frac{M-1}{2}$ είναι ***σταθερά καθυστέρησης ομάδας*** (*group delay*) και $\beta = \frac{\pi}{2}$. Στην περίπτωση αυτή οι συχνότητες ως ομάδα καθυστερούν με σταθερό ρυθμό. Αλλά μερικές συχνότητες καθυστερούν περισσότερο και άλλες καθυστερούν λιγότερο.

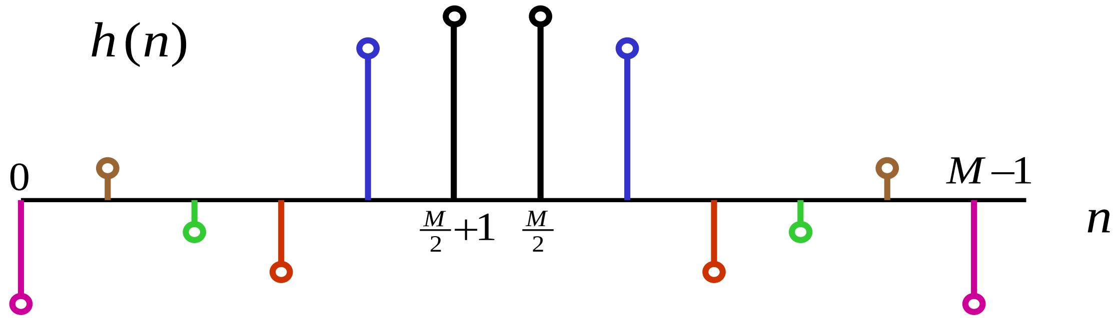
Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικοί τύποι FIR φίλτρων γραμμικής φάσης, ανάλογα με το αν το πλήθος M των όρων της $h(n)$ είναι ***άρτιο*** ή ***περιττό*** και αν η $h(n)$ είναι ***συμμετρική*** ή ***αντισυμμετρική***.

Ανάλογα με τις τιμές του *M* έχουμε τις περιπτώσεις

- Αν *M* είναι ***περιττός*** τότε $a = (M - 1)/2$ είναι ακέραιος και η κρουστική απόκριση είναι συμμετρική ως προς άξονα.

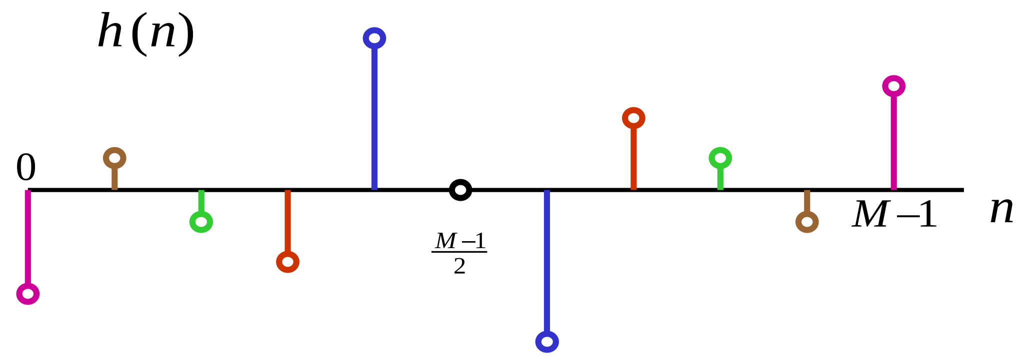


- Αν *M* είναι ***άρτιος*** τότε $a = (M - 1)/2$ δεν είναι ακέραιος και η κρουστική απόκρι-ση είναι επίσης συμμετρική ως προς άξονα.



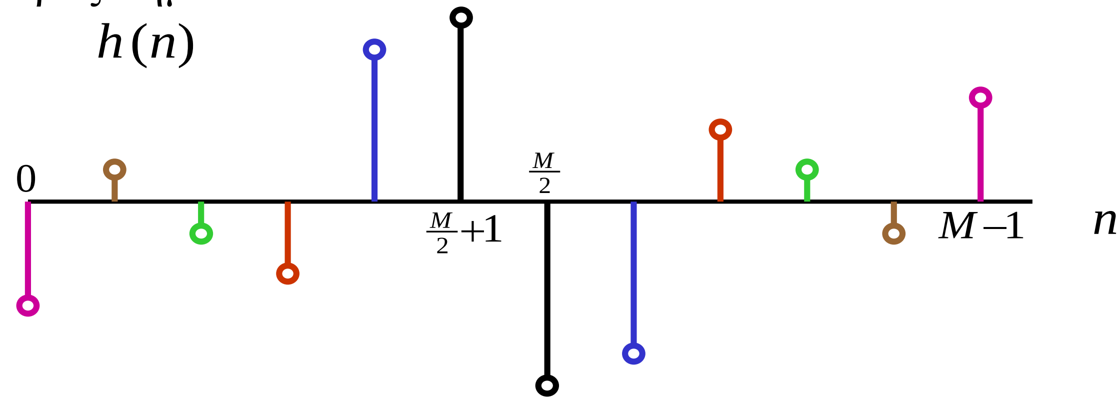
Ανάλογα με τις τιμές του M έχουμε τις περιπτώσεις

- Αν M είναι ***περιττός*** τότε a = (M – 1)/2 είναι ακέραιος και η κρουστική απόκριση είναι συμμετρική ως προς σημείο.



στην περίπτωση αυτή πρέπει να είναι $h\left(\frac{M-1}{2}\right)=0$

- Αν M είναι ***άρτιος*** τότε a = (M – 1)/2 δεν είναι ακέραιος και η κρουστική απόκριση είναι επίσης συμμετρική ως προς σημείο.

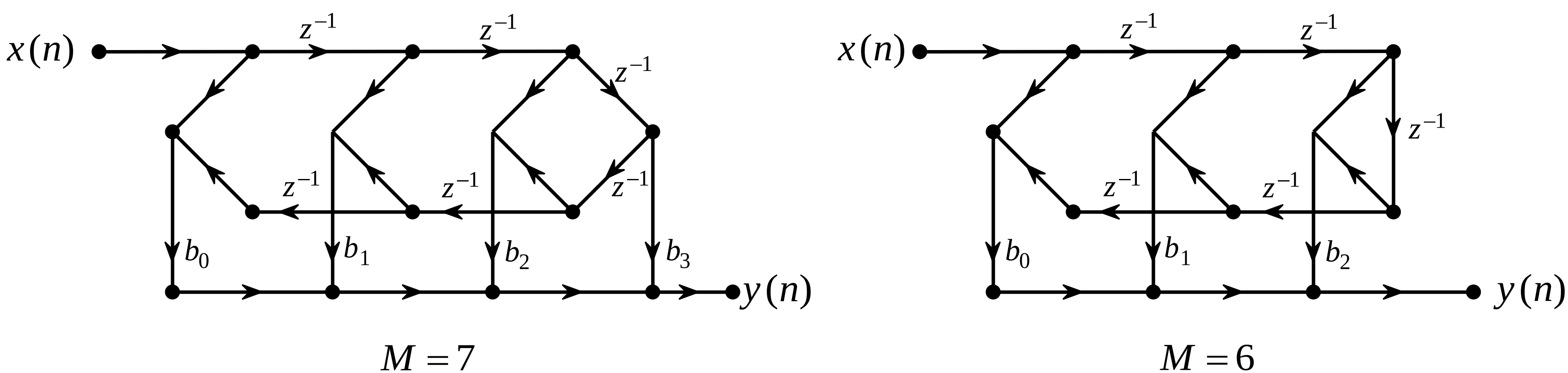


Υλοποίηση FIR φίλτρων γραμμικής φάσης

Η εξίσωση διαφορών ενός FIR φίλτρου γραμμικής φάσης έχει τη μορφή

$$y(n) = b_0\, x(n) + b_1\, x(n-1) + \cdots + b_1\, x(n-M+2) + b_0\, x(n-M+1)$$
$$= b_0 \left[x(n) + x(n-M+1) \right] + b_1 \left[x(n-1) + x(n-M+2) \right] + \cdots$$

ανάλογα με τις τιμές του M έχουμε τις υλοποιήσεις



- FIR φίλτρα γραμμική φάσης. ***Συμμετρική*** κρουστική απόκριση M ***περιττός***

$$H(e^{j\Omega}) = \left[\sum_{n=0}^{(M-1)/2} a(n)\cos(\Omega n)\right] e^{-j\Omega(M-1)/2}$$

$$a(0) = h\left(\tfrac{M-1}{2}\right)$$

$$a(n) = 2h\left(\tfrac{M-1}{2} - n\right),\ 1 \le n \le \tfrac{M-3}{2}$$

- FIR φίλτρα γραμμική φάσης. ***Συμμετρική*** κρουστική απόκριση M ***άρτιος***

$$H(e^{j\Omega}) = \left[\sum_{n=0}^{M/2} b(n)\cos\left\{\Omega\left(n - \tfrac{1}{2}\right)\right\}\right] e^{-j\Omega(M-1)/2}$$

$$b(n) = 2h\left(\tfrac{M}{2} - n\right),\ n = 1, 2, \ldots \tfrac{M}{2}$$

- FIR φίλτρα γραμμική φάσης. ***Αντισυμμετρική*** κρουστική απόκριση M ***περιττός***

$$H(e^{j\Omega}) = \left[\sum_{n=1}^{(M-1)/2} c(n)\sin(\Omega n)\right] e^{-j\left[\frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\Omega\right]}$$

$$c(n) = 2h\left(\tfrac{M-1}{2} - n\right),\ n = 1, 2, \ldots \tfrac{M-1}{2}$$

- FIR φίλτρα γραμμική φάσης. ***Αντισυμμετρική*** κρουστική απόκριση M ***περιττός***

$$H(e^{j\Omega}) = \left[\sum_{n=1}^{M/2} d(n)\sin\left\{\Omega\left(n - \tfrac{1}{2}\right)\right\}\right] e^{-j\left[\frac{\pi}{2} - \Omega\frac{M-1}{2}\right]}$$

$$d(n) = 2h\left(\tfrac{M}{2} - n\right),\ n = 1, 2, \ldots \tfrac{M}{2}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

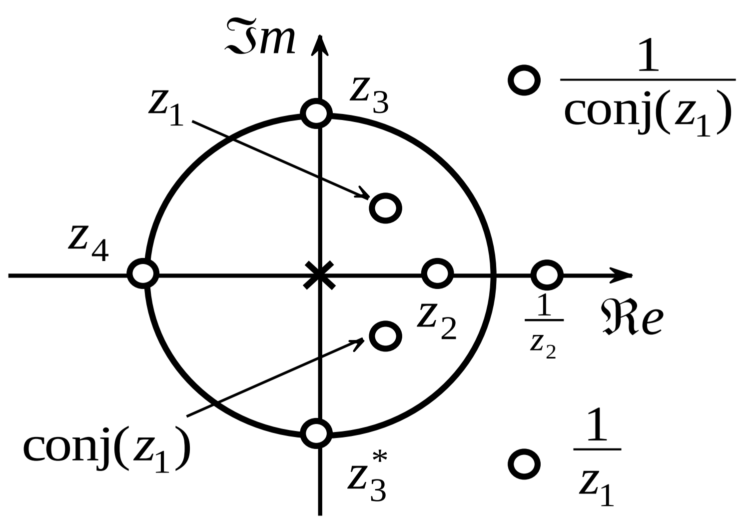
Ένα FIR φίλτρο έχει $(M-1)$ πόλους στην αρχή ($z = 0$) και $(M-1)$ μηδενικά στο z-επίπεδο. Για ένα φίλτρο ελάχιστης φάσης υπάρχουν συμμετρίες στις θέσεις των μηδενικών που προέρχονται από τις συμμετρίες της κρουστικής απόκρισης.

Αν η $H(z)$ έχει ένα μηδενικό $z = z_k = r\,e^{j\theta}$ τότε πρέπει να έχει και το μηδενικό

$$z = \frac{1}{z_k} = \frac{1}{r} e^{-j\theta}$$

Αν το φίλτρο είναι πραγματικό τότε αν η $H(z)$ έχει ένα μηδενικό $z = z_k = r\,e^{j\theta}$ τότε πρέπει να έχει και το συζυγές μηδενικό

$$z = z_k^* = r\,e^{-j\theta}$$



Γενικός αστερισμός μηδενικών FIR φίλτρου ελάχιστης φάσης

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.