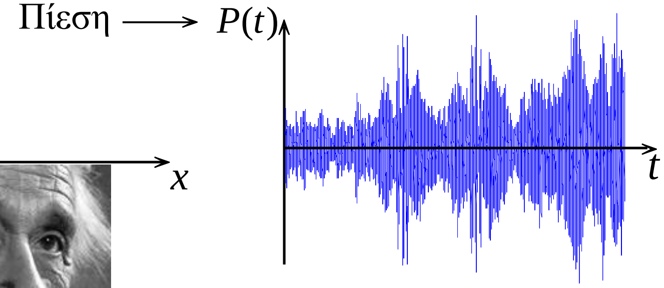
Τι είναι σήμα;

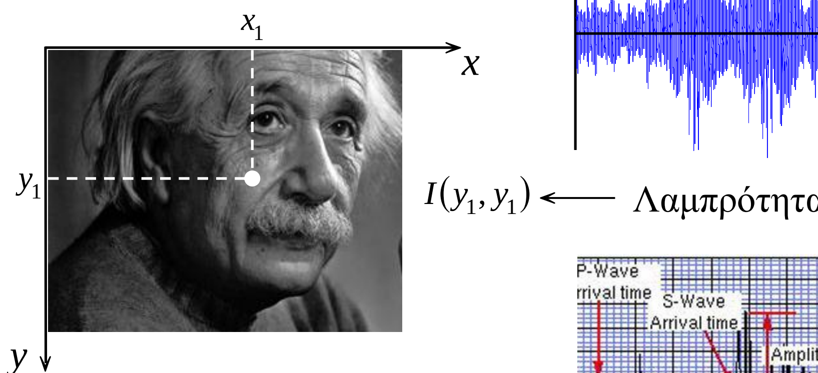
Ως ***σήμα*** ορίζεται ένα φυσικό μέγεθος το οποίο μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο ή το χώρο ή με οποιαδήποτε άλλη ανεξάρτητη μεταβλητή ή μεταβλητές.

Παραδείγματα:

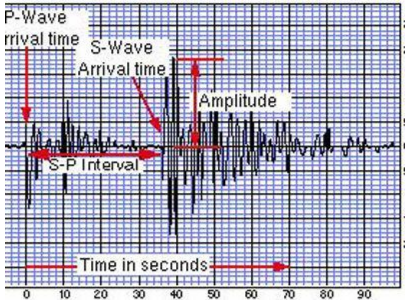
Σήμα ομιλίας



Σήμα εικόνας



Σεισμικά σήματα



Ιατρικά σήματα

...

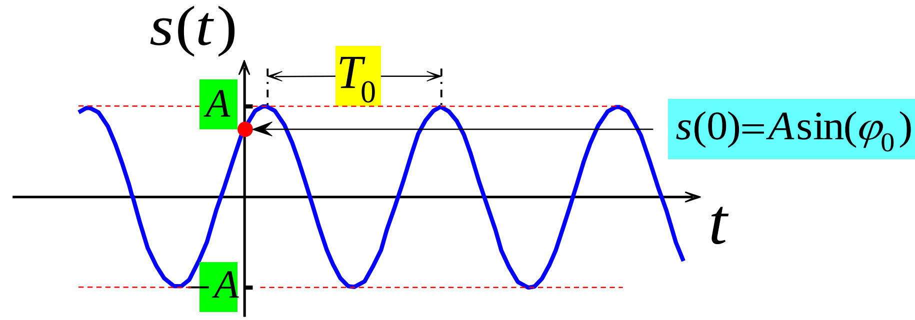
Ένα σήμα μεταφέρει ***ενέργεια – ισχύ*** και ***μηνύματα - πληροφορία***.

$$s(t) = A \sin\big(\overbrace{\omega_0 t + \varphi_0}^{\text{Φάση}}\big)$$

Πλάτος $\left(\text{Volts ή Ampers}\right)$

Κυκλική συχνότητα $\left(\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)$

Αρχική φάση $\left(\text{rad}\right)$



$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Συχνότητα $\left(\text{Hz}\right)$

Περίοδος $\left(\text{sec}\right)$

Από μαθηματική άποψη, ένα σήμα εκφράζεται ως συνάρτηση μιας η περισσοτέρων ανεξαρτήτων μεταβλητών. Με άλλα λόγια ένα σήμα είναι μία συνάρτηση.

$$t \rightarrow x(t)$$

Η ανεξάρτητη μεταβλητή t είναι συνήθως ο χρόνος, ή οποία μπορεί να έχει και άλλη φυσική σημασία.

Με $x(t)$ συμβολίζεται η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή t.

Σήμα - Πληροφορία

Πληροφορία δεν υπάρχει χωρίς ένα σήμα που την αντιπροσωπεύει.

Η πληροφορία κωδικοποιείται σε ένα σήμα τροποποιώντας τη δομή του σήματος.

Η διαδικασία με την οποία η πληροφορία κωδικοποιείται σε ένα σήμα λέγεται ***διαμόρφωση*** (*modulation*).

$$s(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \longrightarrow \textbf{\textit{Φέρον σήμα}}$$

Πλάτος $\Downarrow$ ***Διαμόρφωση πλάτους (AM)***

Συχνότητα $\Downarrow$ ***Διαμόρφωση συχνότητας (FM)***

Αρχική φάση $\Downarrow$ ***Διαμόρφωση φάσης (PM)***

Η διαμόρφωση χρησιμοποιεί το σήμα πληροφορίας $m(t)$, για ***να μεταβάλλει*** κατά τρόπο συστηματικό το ***πλάτος***, τη ***συχνότητα***, ή τη ***φάση*** ενός ημιτονοειδούς φέροντος.

Τι είναι σύστημα;

Ως ***σύστημα*** ορίζουμε την οντότητα εκείνη η οποία επενεργώντας σε ένα σήμα $x(t)$ έχει ως αποτέλεσμα ένα άλλο τροποποιημένο συνήθως σήμα $y(t)$.

Η δράση ενός συστήματος περιγράφεται σχηματικά

$$x(t)\ \xrightarrow{\text{Είσοδος}}\ \boxed{\begin{array}{c}\text{Σύστημα}\\ \text{S}\end{array}}\ \xrightarrow{\text{Έξοδος}}\ y(t)$$

Σχηματική περιγραφή του συστήματος S.

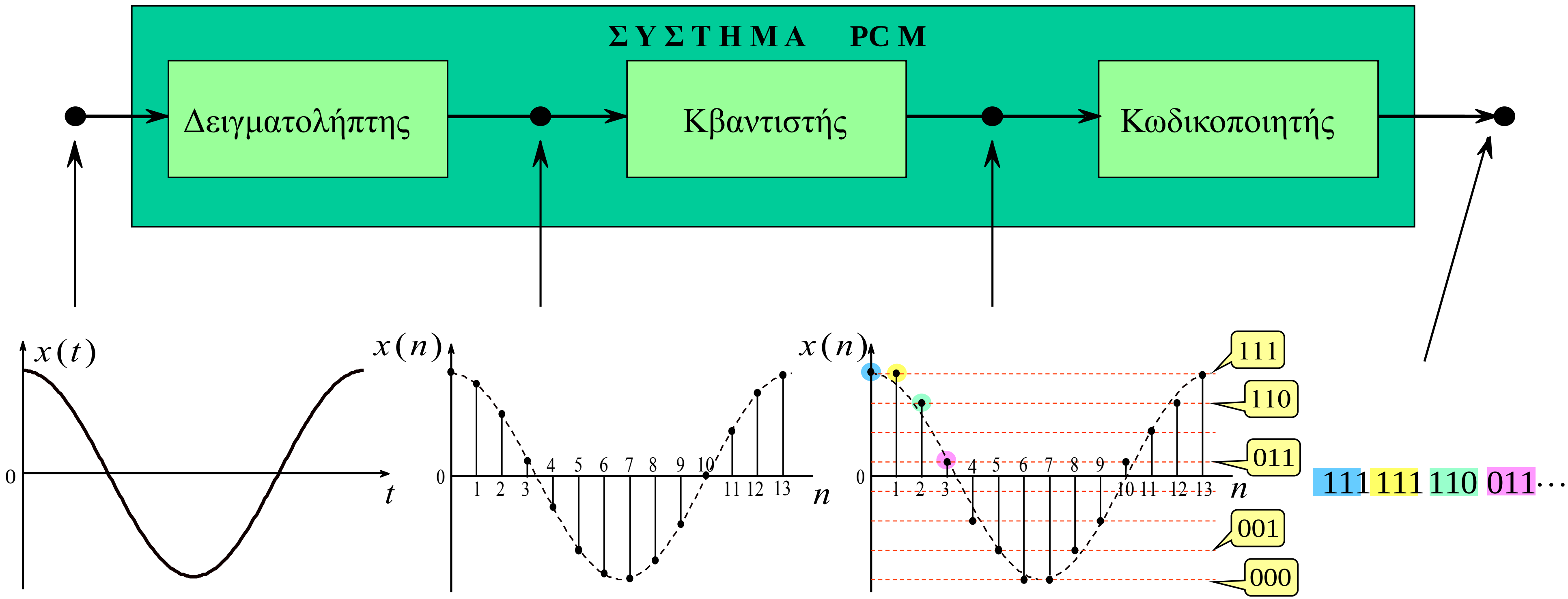
όπου $x(t)$ είναι το σήμα εισόδου ή απλά η ***είσοδος*** του συστήματος και $y(t)$ η ***έξοδος*** του συστήματος.

Ένα σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ***ως ένας μετασχηματισμός*** μεταξύ σημάτων

$$y(t) = S\left[x(t)\right]$$

Παλμοκωδική Διαμόρφωση (PCM)

Η παλμοκωδική διαμόρφωση (*Pulse Code Modulation* (PCM)) είναι το απλούστερο σχήμα κωδικοποιήσης κυματομορφής. Ένας παλμοκωδικός διαμορφωτής παλμών αποτελείται από τρία βασικά μέρη: ένα ***δειγματολήπτη***, έναν ***κβαντιστή*** και ένα ***κωδικοποιητή***.

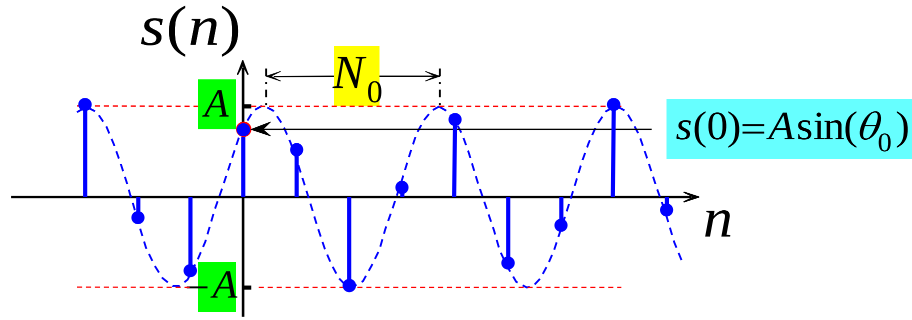


$$s(n) = A \sin(\overbrace{\Omega_0 t + \theta_0}^{\text{Φάση}})$$

Πλάτος (Volts ή Ampers)

Κυκλική συχνότητα (rad)

Αρχική φάση (rad)



$$\Omega_0 = 2\pi F_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

Συχνότητα $(\quad)$

Περίοδος $(\quad)$

Από μαθηματική άποψη, ένα σήμα εκφράζεται ως συνάρτηση μιας η περισσοτέρων ανεξαρτήτων μεταβλητών. Με άλλα λόγια ένα σήμα είναι μία συνάρτηση.

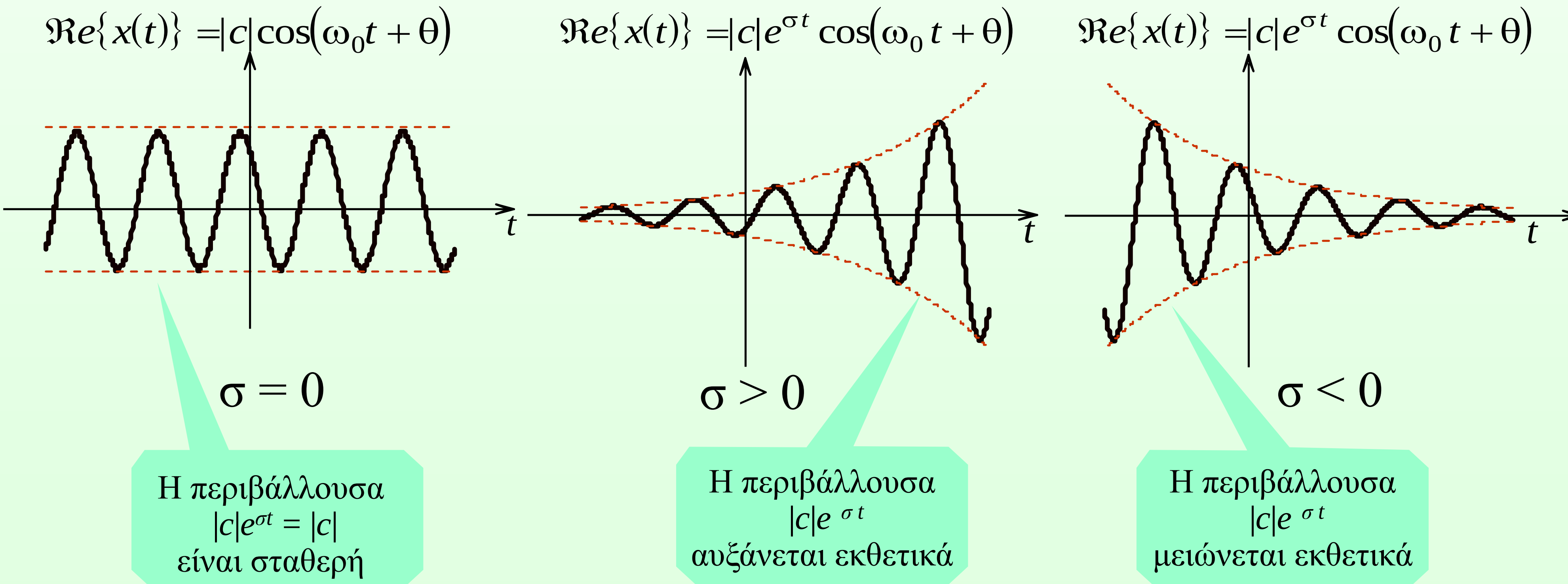
$$n \rightarrow x(n)$$

Με $x(n)$ συμβολίζεται η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή nT_0.

Το μιγαδικό εκθετικό σήμα

$$x(t) = c \cdot e^{st} \quad \text{όπου} \quad c = |c| \cdot e^{j\theta} \quad \text{και} \quad s = \sigma + j\omega$$

Οι γραφικές αναπαραστάσεις του πραγματικού μέρους του μιγαδικού εκθετικού σήματος για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου σ είναι

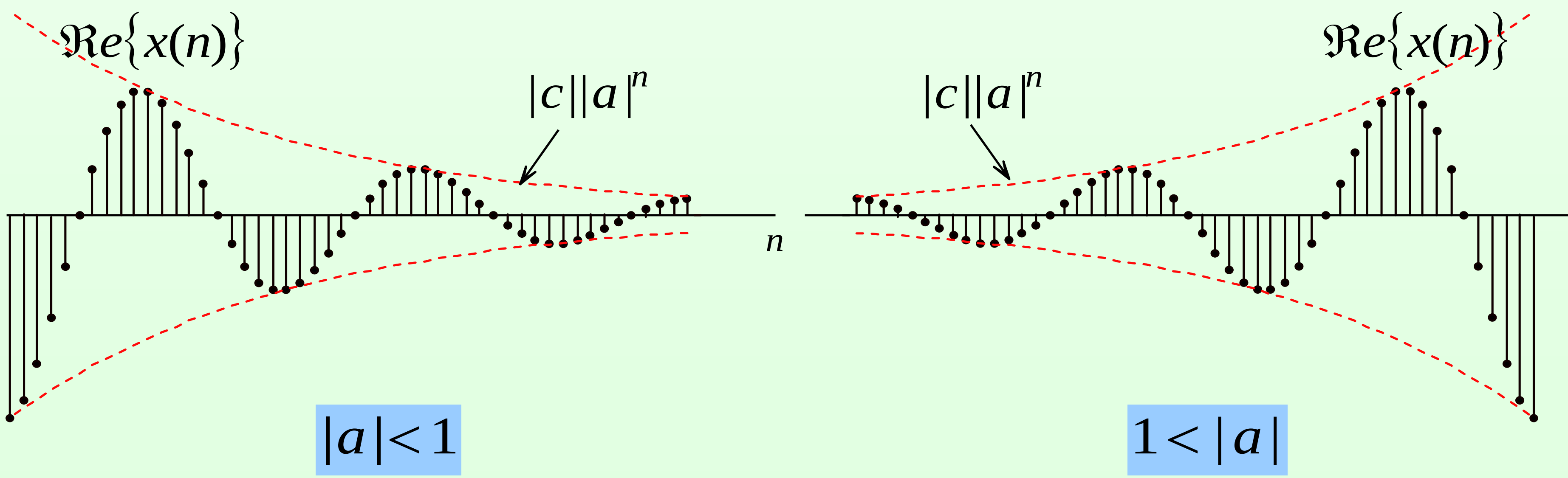


Το μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου

$$x(n) = c \cdot a^n$$

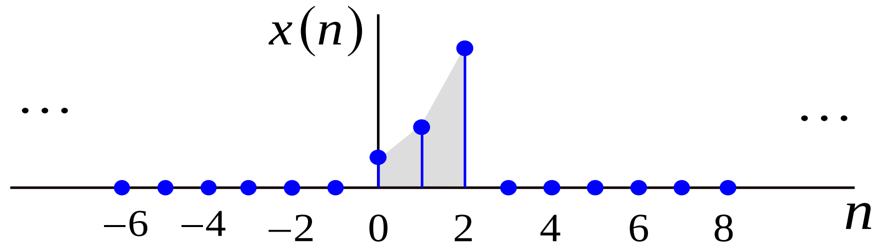
όπου $c = |c| \cdot e^{j\theta}$ και $a = |a| \cdot e^{j\Omega_0}$

Οι γραφικές αναπαραστάσεις του πραγματικού μέρους του μιγαδικού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α είναι



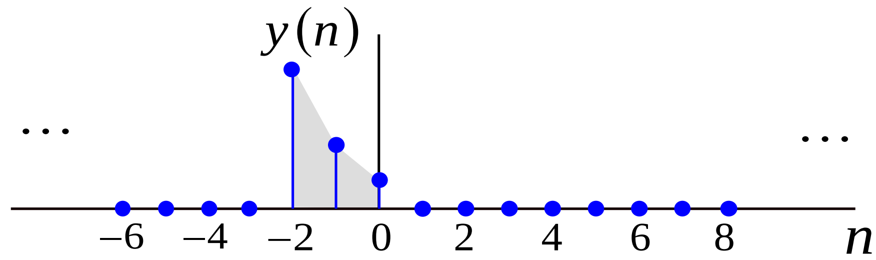
Μετατροπές σημάτων ως προς το χρόνο

$$x(n)=\begin{cases}2^{n}, & 0\le n\le 2\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$



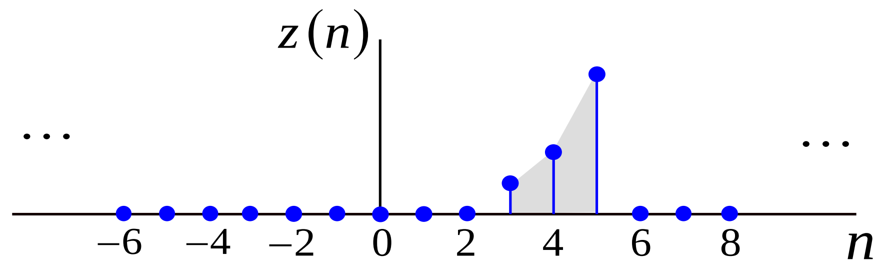
Ανάκλαση: $y(n) = x(-n)$

$$y(n)=\begin{cases}2^{-n}, & -2\le n\le 0\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$



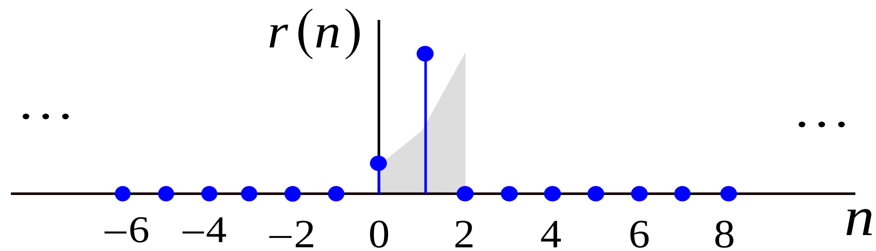
Χρονική μετατόπιση: $z(n) = x(n\text{-}3)$

$$z(n)=\begin{cases}2^{n-3}, & 3\le n\le 5\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$



Αποδεκάτιση στο χρόνο: $r(n) = x(2n)$

$$r(n)=\begin{cases}2^{2n}, & 0\le n\le 1\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$



Ενεργειακά σήματα - σήματα ισχύος

Η ***ενέργεια*** E_x του σήματος $x(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

Ένα σήμα χαρακτηρίζεται ως ***ενεργειακό σήμα*** αν

$$0 < E_x < \infty$$

Η ενέργεια διακριτού σήματος δίνεται από τη σχέση

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |x(n)|^2$$

Η ***μέση ισχύς*** P_x του σήματος $x(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

Ένα σήμα χαρακτηρίζεται ως ***σήμα ισχύος*** αν

$$0 < P_x < \infty$$

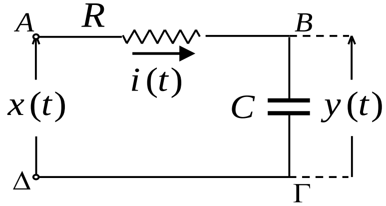
Αν το σήμα είναι περιοδικό τότε

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} |x(t)|^2 dt$$

Η ***μέση ισχύς*** διακριτού σήματος δίνεται από τη σχέση

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0 - 1} |x(n)|^2$$

Συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από διαφορικές εξισώσεις

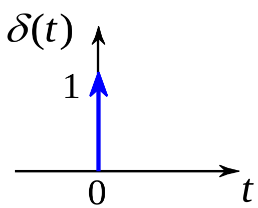


$$RC\,\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

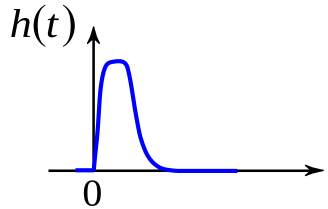
Η σχέση μεταξύ του σήματος εισόδου $x(t)$ και του σήματος εξόδου $y(t)$ ενός συστήματος περιγράφεται από ***μία διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές***.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Η κρουστική απόκριση $h(t)$ είναι η έξοδος του συστήματος, όταν αυτό διεγείρεται από τη συνάρτηση $\delta(t)$, δηλαδή $h(t) = \mathrm{S}[\,\delta(t)\,]$.



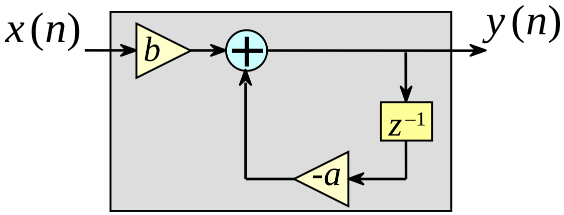
$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t)$$



Η σχέση μεταξύ του σήματος εισόδου $x(t)$ και του σήματος εξόδου $y(t)$ του συστήματος περιγράφεται με ***το ολοκλήρωμα της συνέλιξης***.

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau}$$

Συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών

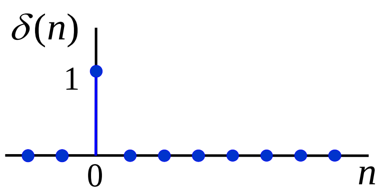


$$y(n) - a\,y(n-1) = b\,x(n)$$

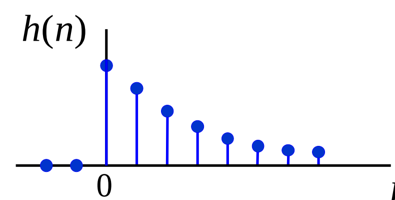
Η σχέση μεταξύ του σήματος εισόδου $x(n)$ και του σήματος εξόδου $y(n)$ ενός ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου περιγράφεται από ***μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές*** της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k) \quad \text{με} \quad a_0 = 1$$

Η κρουστική απόκριση $h(n)$ είναι η έξοδος του συστήματος, όταν αυτό διεγείρεται από τη συνάρτηση $\delta(n)$, δηλαδή $h(n) = \mathrm{S}[\,\delta(n)\,]$.



$$x(n) = \delta(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = h(n)$$

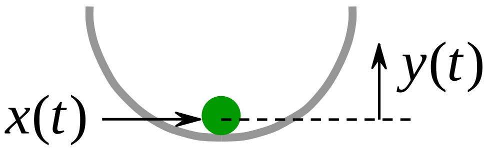


Η σχέση μεταξύ του σήματος εισόδου $x(n)$ και του σήματος εξόδου $y(n)$ του συστήματος περιγράφεται με ***το άθροισμα της συνέλιξης***.

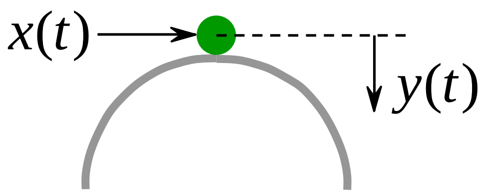
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)\, h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} h(k)\, x(n-k)$$

Ευστάθεια

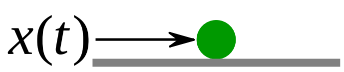
Μία από τις σημαντικότερες έννοιες στην θεωρία συστημάτων είναι αυτή της ευστάθειας.



Στο σύστημα το σφαιρίδιο ισορροπεί και αν εφαρμοστεί μία μικρή οριζόντια δύναμη για μικρό χρονικό διάστημα θα μετακινηθεί λίγο και θα επανέλθει στην αρχική του θέση μετά από κάποιες ταλαντώσεις (το σύστημα θεωρείται πραγματικό και παρουσιάζει τριβές). Πρόκειται για ένα ***ευσταθές σύστημα***.



Στο σύστημα το σφαιρίδιο ισορροπεί αλλά αν μετακινηθεί λίγο λόγω μικρής και περιορισμένης διάρκειας οριζόντιας δύναμης, θα κυλίσει προς τα κάτω και δεν πρόκειται ποτέ να επανέλθει στην αρχική του θέση, κατάσταση που εκφράζει ότι το ***σύστημα είναι ασταθές***. Παρατηρήστε ότι η απόκριση, η κατακόρυφη θέση, θα αυξάνει με το χρόνο χωρίς περιορισμό.



Στο σύστημα μία μικρή και περιορισμένης διάρκειας οριζόντια δύναμη θα μετακινήσει λίγο το σφαιρίδιο, το οποίο θα παραμείνει εκεί που θα πάει, όπου έχει την ίδια απόκριση (κατακόρυφη θέση). Η κατάσταση αυτή ***αδιάφορης ισορροπίας***, εκφράζει την ***οριακή ευστάθεια***.

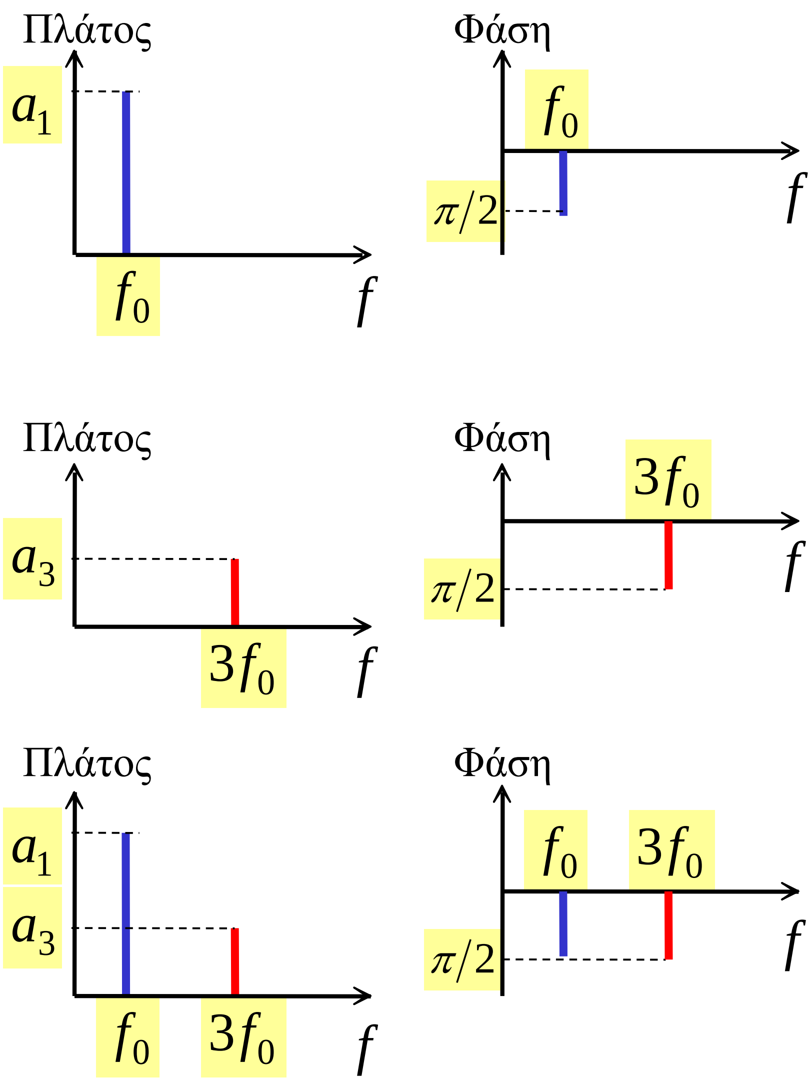
Ευστάθεια

Ένα σύστημα λέγετε ότι είναι ***ΦΕΦΕ ευσταθές*** (ευστάθεια *Φραγμένης Εισόδου Φραγμένης Εξόδου*) (*Bounded Input Bounded Output* (*BIBO*) *stable*) αν και μόνον αν για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδός του παραμένει φραγμένη.

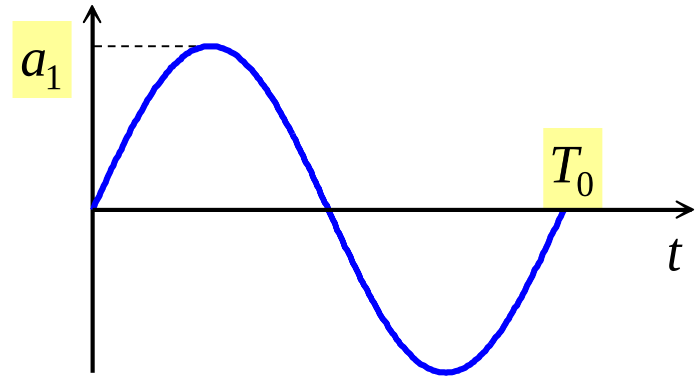
Σύστημα ευσταθές.

Σύστημα μη ευσταθές

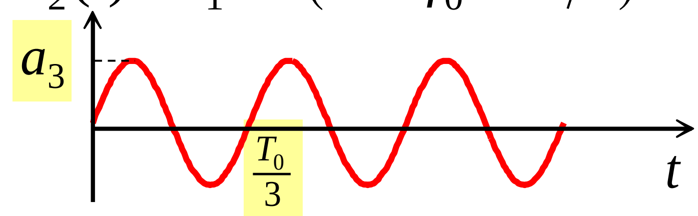
Περιγραφή σήματος στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας



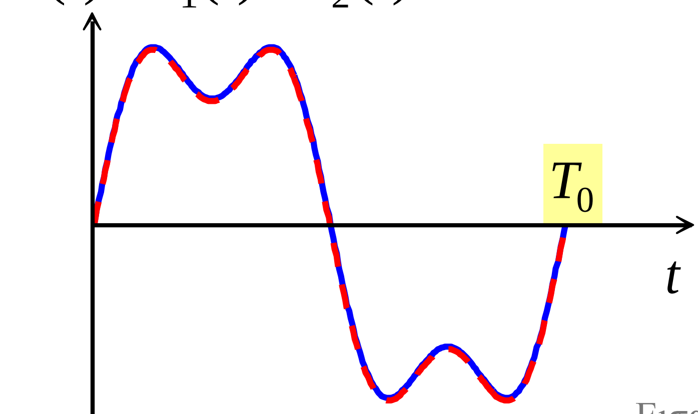
$$x_1(t) = a_1 \text{συν}\left(2\pi f_0 t - \pi/2\right)$$



$$x_2(t) = a_1 \text{συν}\left(2\pi 3 f_0 t - \pi/2\right)$$



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$



Περιγραφή συστήματος στο πεδίο συχνότητας

$$x(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow y(t) = H(\omega_0)\cdot Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}$$

Η συνάρτηση $H(\omega)$ είναι ο **Μετασχηματισμός Fourier** της $h(t)$ και αποτελεί την **Απόκριση συχνότητας του συστήματος**.

Η απόκρισης συχνότητας είναι μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας ω και γενικά έχει τη μορφή

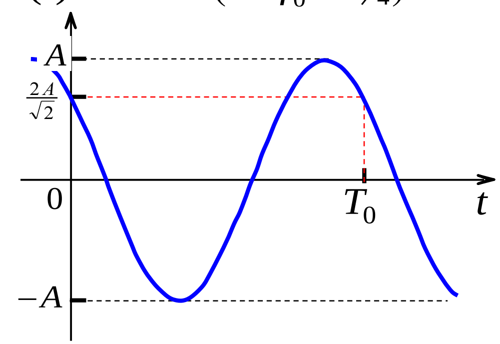
$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\arg H(\omega)}$$

Η φυσική σημασία της απόκρισης συχνότητας, $H(\omega)$, αναδεικνύεται από το σχήμα

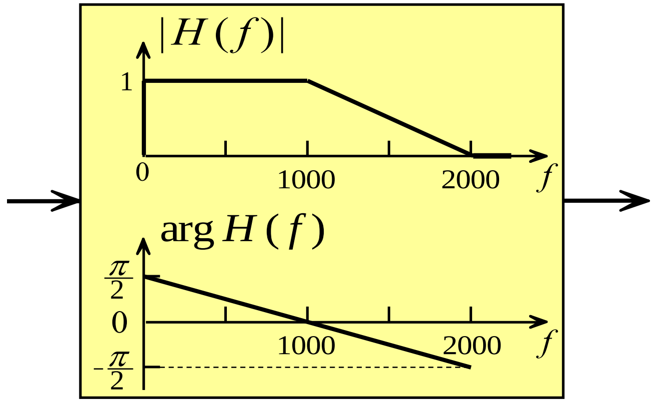
$$A\text{συν}(2\pi f_0 t+\theta_0) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow A\overbrace{|H(f_0)|}^{\text{Απόκριση πλάτους}}\text{συν}\left(2\pi f_0 t+\theta_0+\overbrace{\text{γων}\,H(f_0)}^{\text{Απόκριση φάσης}}\right)$$

Συχνά χρησιμοποιούμε λογαριθμική κλίμακα για τη συχνότητα, και ως μονάδα μέτρου το ***decibel*** (dB). Η κλίμακα των dB βασίζεται στην αντιστοιχία $dB = 20\log_{10}|H(\omega)|$

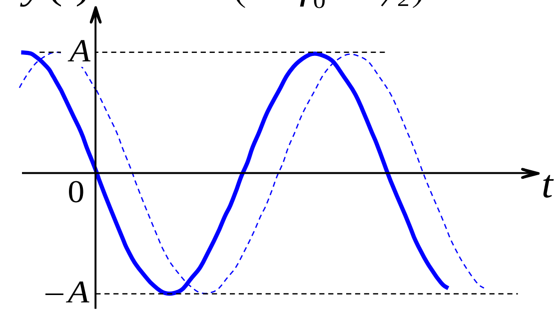
$x(t) = A\,\text{συν}\left(2\pi f_0 t + \pi/4\right)$



Το σήμα εισόδου x(t).

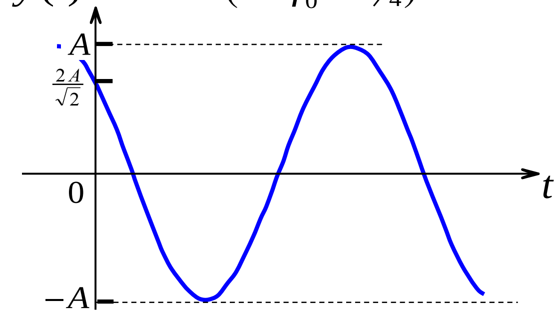


$y(t) = A\,\text{συν}\left(2\pi f_0 t + \pi/2\right)$



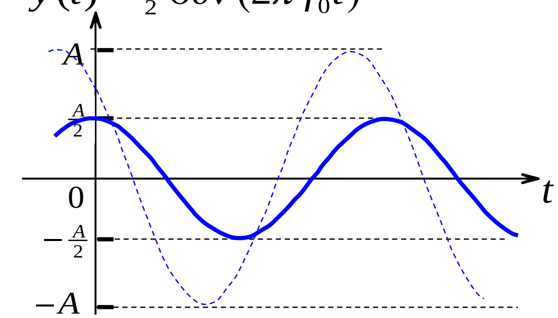
Η έξοδος του συστήματος όταν f_0 = 500 Hz.

$y(t) = A\,\text{συν}\left(2\pi f_0 t + \pi/4\right)$



Η έξοδος του συστήματος όταν f_0 = 1000 Hz.

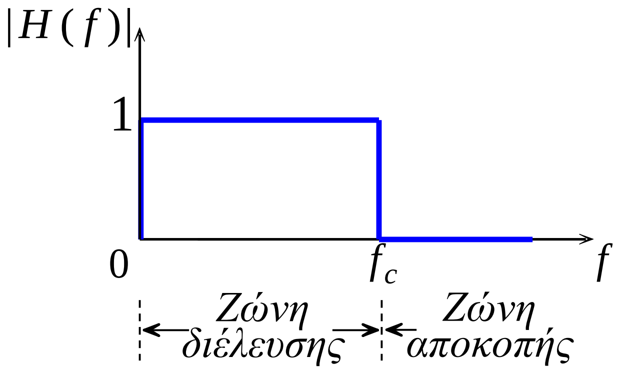
$y(t) = \frac{A}{2}\,\text{συν}\left(2\pi f_0 t\right)$



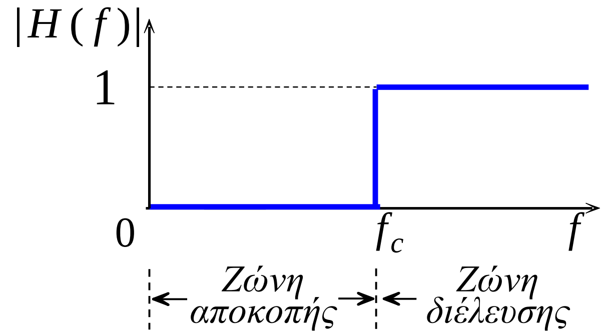
Η έξοδος του συστήματος όταν f_0 = 1500 Hz.

Ιδανικά φίλτρα

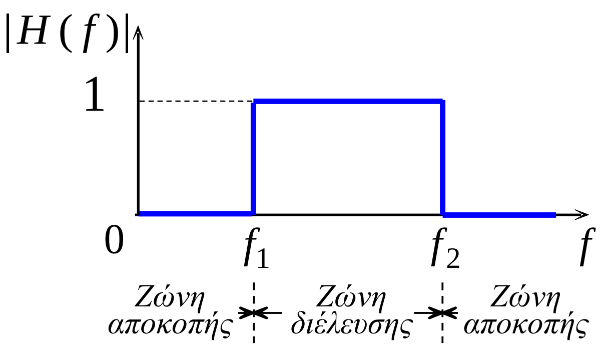
Ανάλογα με τη ζώνη διέλευσής τους, τα φίλτρα διακρίνονται σε:



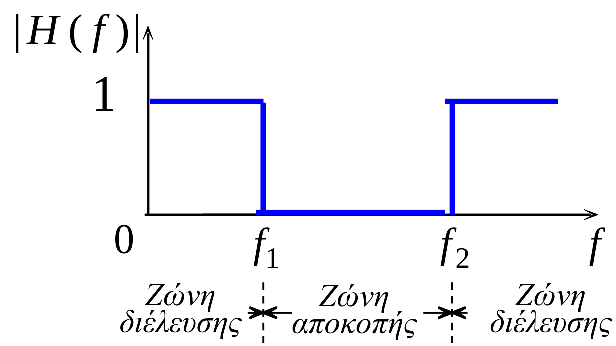
Ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο



Ιδανικό υψιπερατό φίλτρο

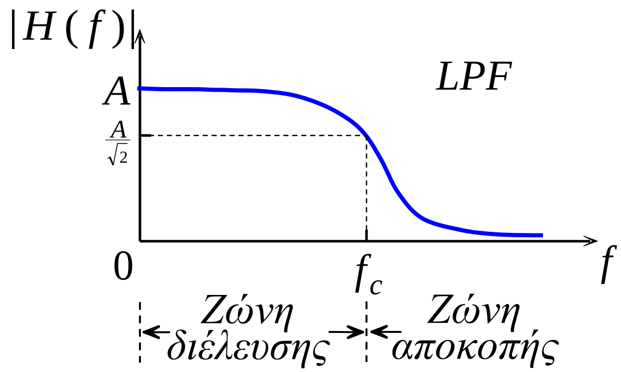


Ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο

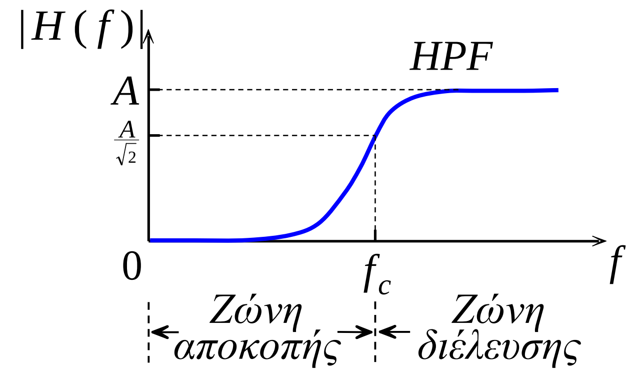


Ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο

Πραγματικά φίλτρα

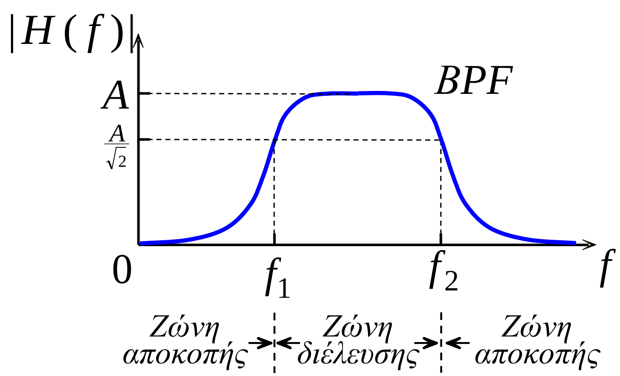


Πραγματικό βαθυπερατό φίλτρο

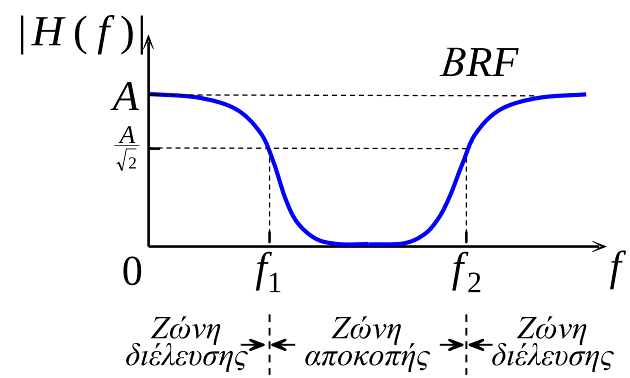


Πραγματικό υψιπερατό φίλτρο

Στη συχνότητα f_c η οποία χαρακτηρίζεται ως ***συχνότητα – 3dB*** η απόκριση πλάτους του συστήματος είναι ίση με το $1/\sqrt{2}$ της μεγίστης τιμής της.



Πραγματικό ζωνοπερατό φίλτρο



Πραγματικό ζωνοφρακτικό φίλτρο

Περιγραφή συστήματος διακριτού χρόνου στο πεδίο συχνότητας

$$x(n) = e^{j\Omega_0 n} \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow y(n) = H(\Omega_0) \cdot e^{j\Omega_0 n}$$

Η συνάρτηση $H(\Omega)$ είναι ο **Διακριτός μετασχηματισμός Fourier** της $h(n)$ και ονομάζεται **Απόκριση συχνότητας του συστήματος** διακριτού χρόνου.

Η απόκρισης συχνότητας είναι μιγαδική συνάρτηση της διακριτής συχνότητας Ω και γενικά έχει τη μορφή

$$H(\Omega) = |H(\Omega)|\, e^{j\arg H(\Omega)}$$

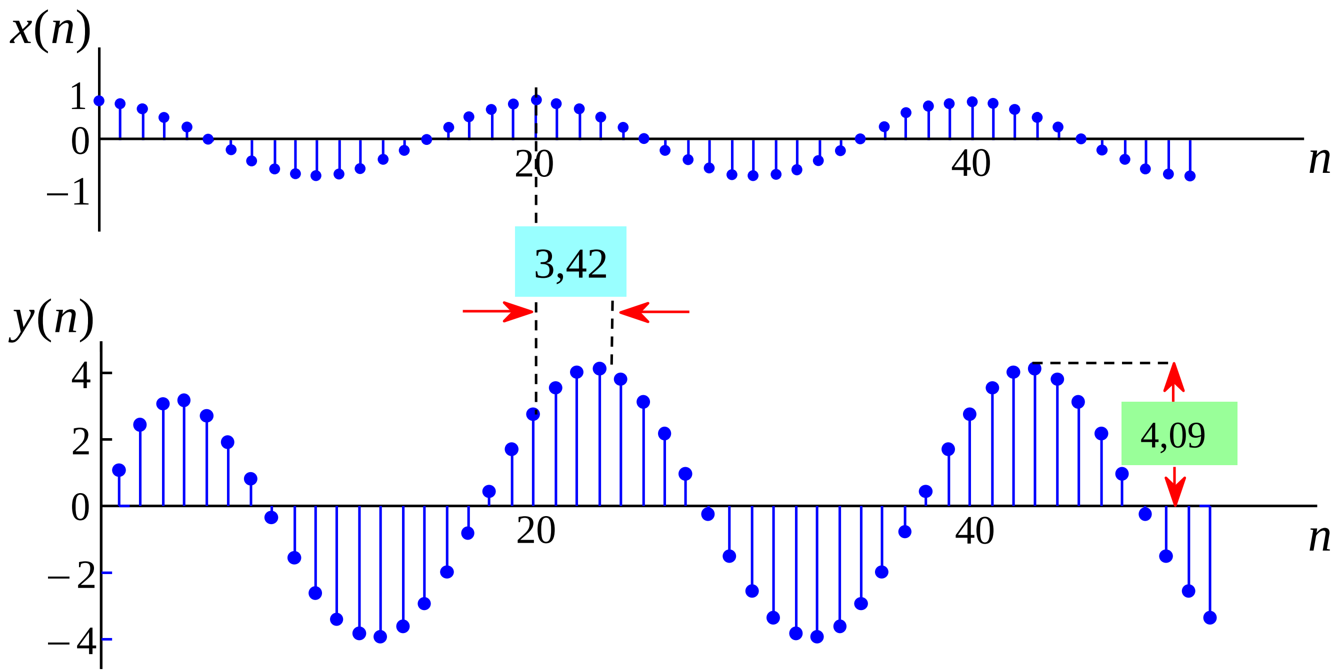
Η φυσική σημασία της απόκρισης συχνότητας, $H(\Omega)$, αναδεικνύεται από το σχήμα

$$x(n) = A\cos(\Omega_0 n + \phi) \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow \qquad y(n) = \underbrace{|H(\Omega_0)|}_{\text{Απόκριση πλάτους}} A\cos(\Omega_0 n + \phi + \underbrace{\arg H(\Omega_0)}_{\text{Απόκριση φάσης}})$$

$$x(n) = \cos(0{,}05\pi\, n) \longrightarrow \boxed{H(\Omega) = \frac{1}{1-0{,}8e^{-j\Omega}}} \longrightarrow y(n) = 4{,}09\, \cos[0{,}05\pi\, (n-3{,}42)]$$

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος για $\Omega = 0{,}05\pi$ είναι

$$H(\Omega) = \frac{1}{1-0{,}8e^{-j\Omega}} \Rightarrow H(0{,}05\pi) = \frac{1}{1-0{,}8e^{-j0{,}05\pi}} = 4{,}092e^{-j0{,}5377}$$



Σήμα εισόδου

Σήμα εξόδου

Τέλος

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.