ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Αναλογικές και Ψηφιακές Επικοινωνίες

Ενότητα 2: Βέλτιστος δέκτης για ψηφιακά διαμορφωμένα σήματα

Σεραφείμ Καραμπογιάς
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Βασικά αξιώματα και ιδιότητες της πιθανότητας

Η ***αθροιστική συνάρτηση κατανομής*** *(cumulative distribution function (CDF))* μίας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Η ***συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*** (*probability density function* (PDF)) μίας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως η παράγωγος της $F_X(x)$,

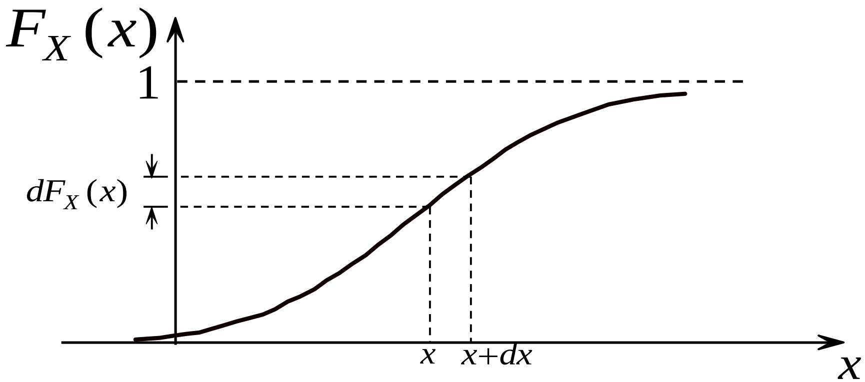
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Για διακριτές τυχαίες μεταβλητές, συνηθίζεται να ορίζουμε τη ***συνάρτηση πιθανότητας μάζας*** (*probability mass function (PMF))*, η οποία ορίζεται ως $\{p_i\}$ όπου $p_i = P(X = x_i)$.

Ιδιότητες της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής

$$0 \le F_X(x) \le 1$$

Η $F_X(x)$ είναι μη φθίνουσα



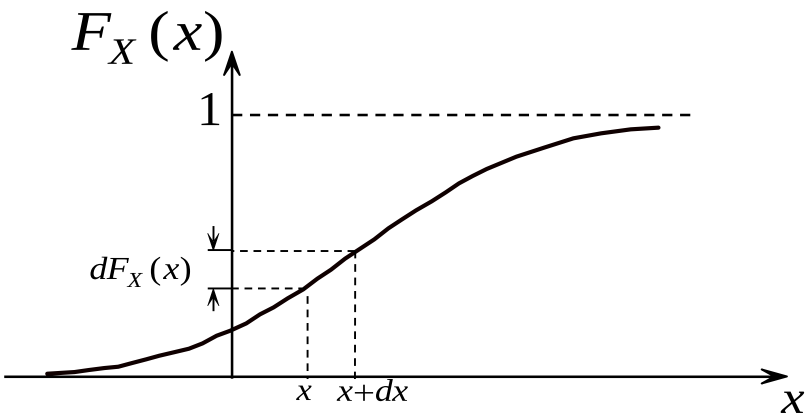
$$dF_X(x) = P[x \le X < x + dx]$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

$$F_X(x_1) \le F_X(x_2) \quad \text{αν} \quad x_1 < x_2$$

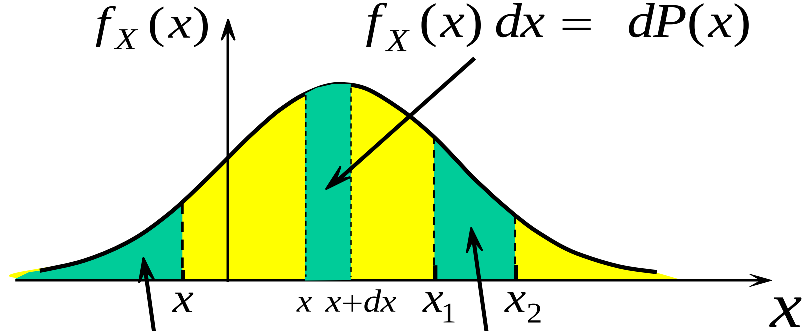
$$P(x_1 < X \le x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

Ιδιότητες της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας



$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$f_X(x)\,dx = dP(x)$



$F_X(x) = P(X \leq x)$

$P[x_1 < X \leq x_2] = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

$0 \leq f_X(x)$ για κάθε x

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\,d\xi$$

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx$$

$$dF_X(x) = P[x \leq X < x + dx]$$

$$f_X(x)\,dx = dP(x)$$

$$f_X(x) = \frac{dP(x)}{dx}$$

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Η ***αναμενόμενη τιμή*** ή ***μαθηματική ελπίδα*** μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως

$$E[X] = m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

Η $E[(X\text{-}E[X])^2]$ καλείται ***διακύμανση*** (*variance*) της τυχαίας μεταβλητής X.

Η διακύμανση είναι ένα μέτρο της **διασποράς** της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της X περί τη μέση τιμή.

Η διακύμανση δηλώνεται ως σ_X^2 και η τετραγωνική της ρίζα, σ_X ονομάζεται ***τυπική απόκλιση*** (*standard deviation*).

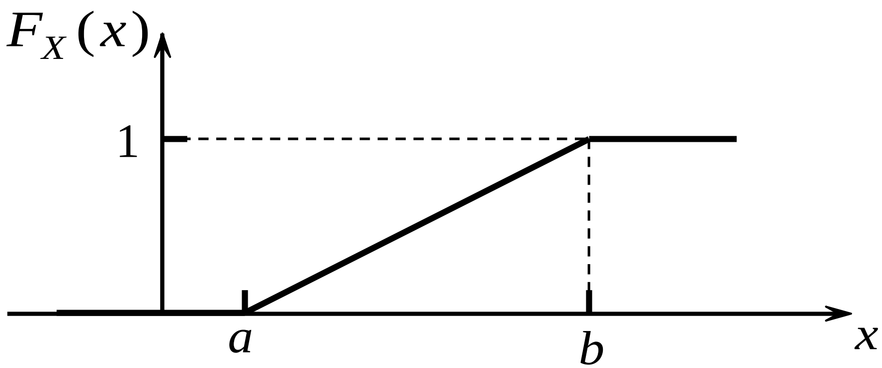
Αν X και Y είναι δύο τυχαίες μεταβλητές τότε η $E[X \cdot Y]$ ονομάζεται ***συσχέτιση*** (*correlation*) των X και Y.

Η $E[(X - m_X) \cdot (Y - m_Y)]$ καλείται ***συμμεταβολή*** (*covariance*) των X και Y.

Σημαντικές Τυχαίες Μεταβλητές

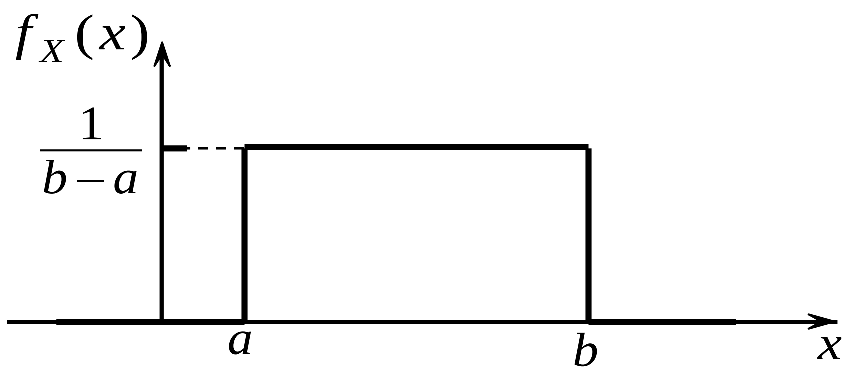
Ομοιόμορφη Τυχαία Μεταβλητή

Η συνάρτηση κατανομής της ομοιόμορφης τυχαίας μεταβλητής είναι



$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}x - \frac{a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & b < x \end{cases}$$

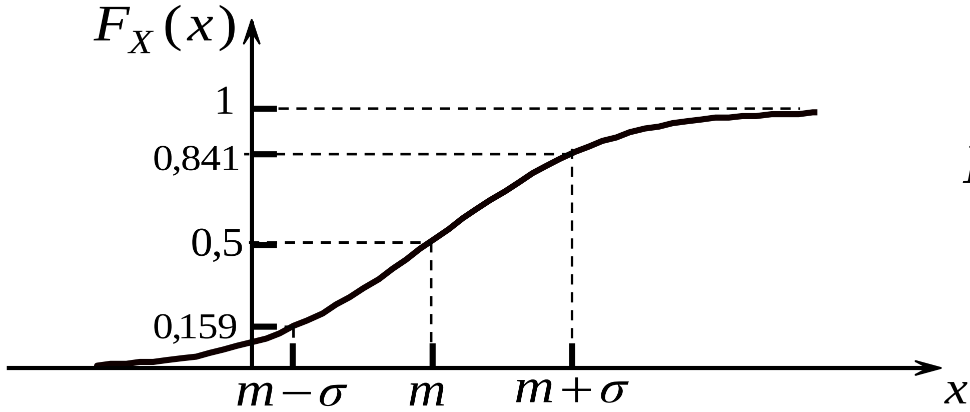
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ομοιόμορφης τυχαίας μεταβλητής είναι



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

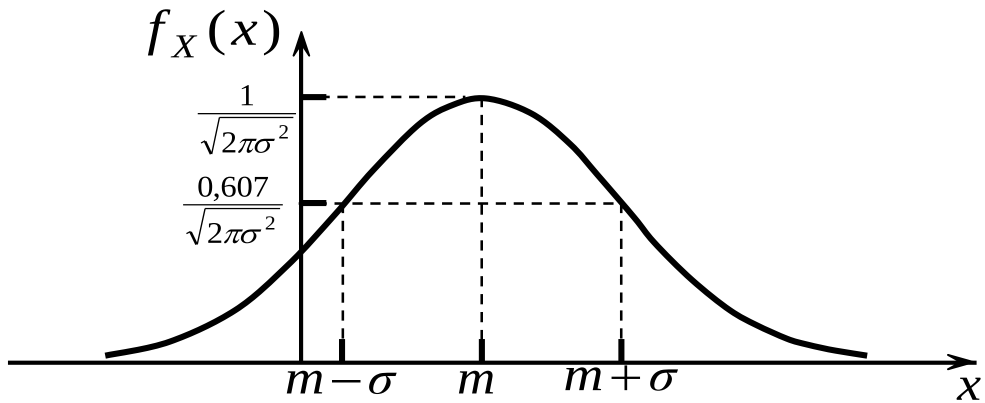
Η Gaussian Τυχαία Μεταβλητή

Η συνάρτηση κατανομής της Gaussian τυχαίας μεταβλητής $N(m, \sigma^2)$ είναι



$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}} d\xi$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Gaussian τυχαίας μεταβλητής είναι



$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

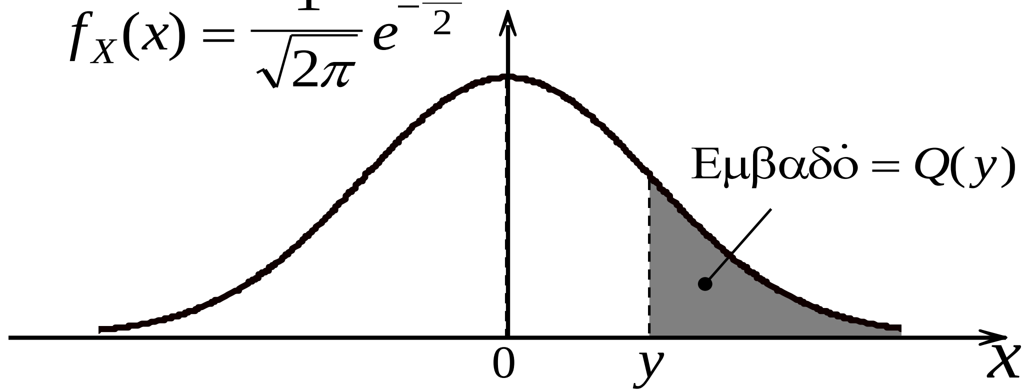
Η συνάρτηση κατανομής της Gaussian τυχαίας μεταβλητής για $m = 0$ και $\sigma = 1$, $N(0, 1)$, δηλώνεται με $\Phi(x)$ και δίνεται από τη σχέση

$$\Phi(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

Η συνάρτηση Q του Marcum ορίζεται ως

$$Q(y) = P(X > y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



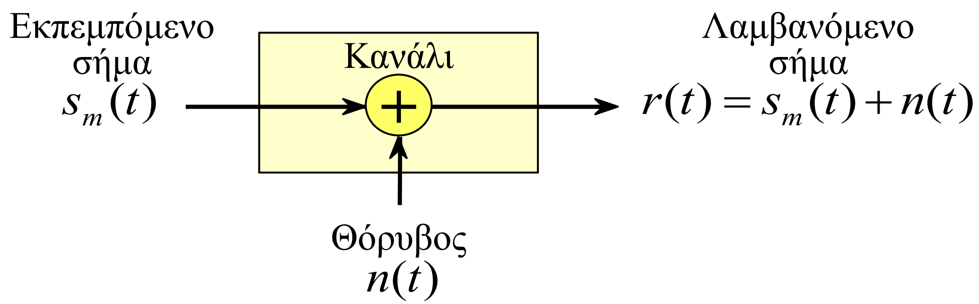
Παρατηρούμε ότι $Q(x) = 1 - \Phi(x)$ και για μία Gaussian μεταβλητή με μέση τιμή m και διακύμανση σ^2, $N(m\ \sigma^2)$ ισχύει

$$P(X > x) = Q\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

Διάφορες παρουσιάσεις της συνάρτησης Q δίνονται σε μορφή εύχρηστων πινάκων ή διαγραμμάτων.

y	$Q(y)$	y	$Q(y)$	y	$Q(y)$
0,0	5,0000e-01	2,4	8,1975e-03	4,8	7,9332e-07
0,1	4,6017e-01	2,5	6,2096e-03	4,9	4,7918e-07
0,2	4,2074e-01	2,6	4,6611e-03	5,0	2,8665e-07
0,3	3,8208e-01	2,7	3,4669e-03	5,1	1,6982e-07
0,4	3,4458e-01	2,8	2,5551e-03	5,2	9,9644e-08
0,5	3,0853e-01	2,9	1,8658e-03	5,3	5,7901e-08
0,6	2,7425e-01	3,0	1,3498e-03	5,4	3,3320e-08
0,7	2,4196e-01	3,1	9,6760e-04	5,5	1,8989e-08
0,8	2,1185e-01	3,2	6,8713e-04	5,6	1,0717e-08
0,9	1,8406e-01	3,3	4,8342e-04	5,7	5,9903e-09
1,0	1,5865e-01	3,4	3,3692e-04	5,8	3,3157e-09
1,1	1,3566e-01	3,5	2,3262e-04	5,9	1,8175e-09
1,2	1,1506e-01	3,6	1,5910e-04	6,0	9,8658e-10
1,3	9,6800e-02	3,7	1,0779e-04	6,1	5,3034e-10
1,4	8,0756e-02	3,8	7,2348e-05	6,2	2,8231e-10
1,5	6,6807e-02	3,9	4,8096e-05	6,3	1,4882e-10
1,6	5,4799e-02	4,0	3,1671e-05	6,4	7,7688e-11
1,7	4,4565e-02	4,1	2,0657e-05	6,5	4,0160e-11
1,8	3,5930e-02	4,2	1,3345e-05	6,6	2,0557e-11
1,9	2,8716e-02	4,3	8,5398e-06	6,7	1,0420e-11
2,0	2,2750e02	4,4	5,4125e-06	6,8	5,2309e-12
2,1	1,7864e-02	4,5	3,3976e-06	6,9	2,6001e-12
2,2	1,3903e-02	4,6	2,1124e-06	7,0	1,2798e-12
2,3	1,0724e-02	4,7	1,3008e-06		

Βέλτιστος Δέκτης για Ψηφιακά Διαμορφωμένα Σήματα παρουσία Προσθετικού Λευκού Gaussian Θορύβου



Μοντέλο για τη λήψη σήματος μέσα από AWGN κανάλι.

Το λαμβανόμενο σήμα στο διάστημα $0 \leq t \leq T$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$r(t) = s_m(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

Ο ***Δέκτης*** βασίζεται στην παρατήρηση του $r(t)$ και αποφασίζει ποια από τις M δυνατές κυματομορφές μεταδόθηκε.

Ο Δέκτης επιθυμούμε να είναι ***βέλτιστος*** υπό την έννοια ότι ελαχιστοποιεί την πιθανότητα σφάλματος.

Ο Δέκτης αποτελείται από δύο τμήματα τον ***Αποδιαμορφωτή σήματος*** και τον ***Φωρατή***.

Ο Αποδιαμορφωτής σήματος μετατρέπει την λαμβανόμενη κυματομορφή $r(t)$ σε ένα N-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_N)$.

Ο φωρατής βασιζόμενος στην παρατήρηση του διανύσματος $\mathbf{r}$ αποφασίζει ποια από τις M δυνατές κυματομορφές μεταδόθηκε.

Η υλοποίηση του αποδιαμορφωτή σήματος βασίζεται

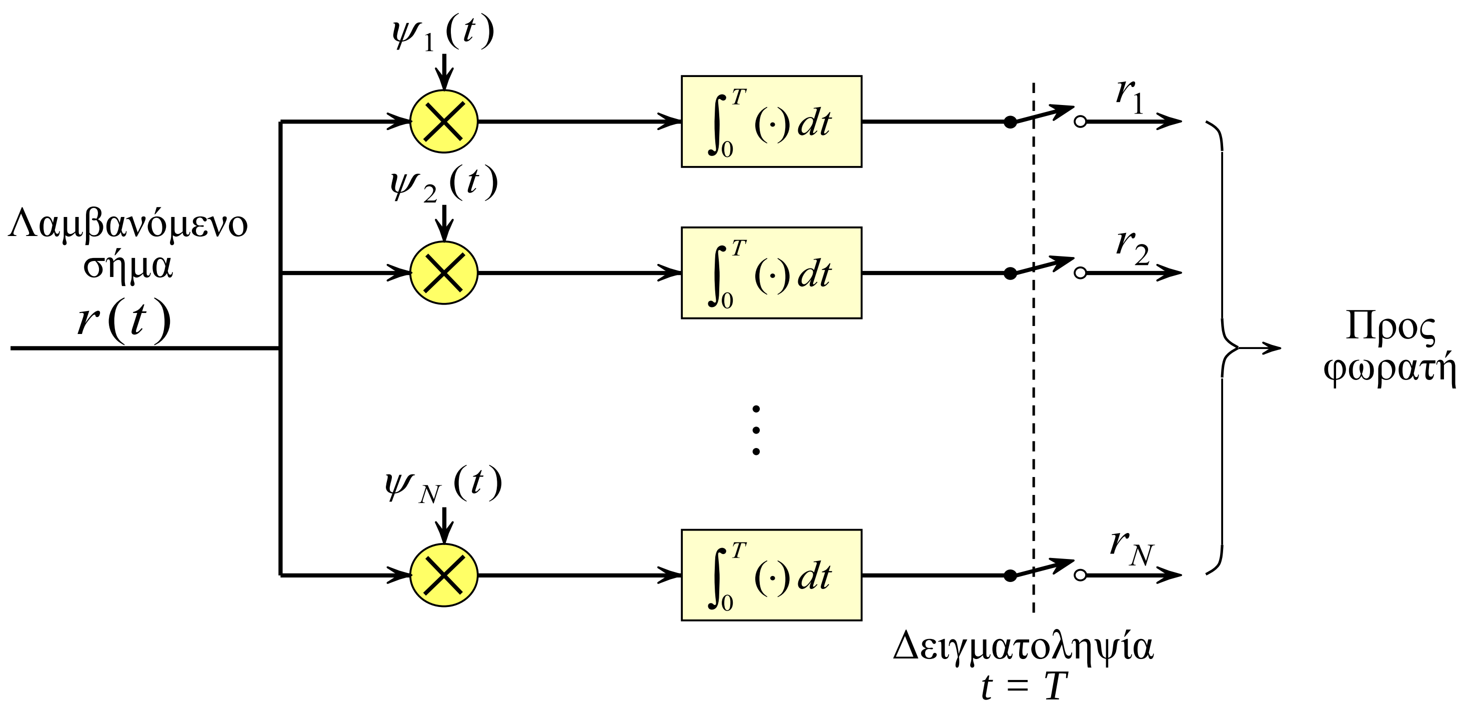
α) στην χρήση ***συσχετιστών***

β) στη χρήση ***προσαρμοστικών φίλτρων***.

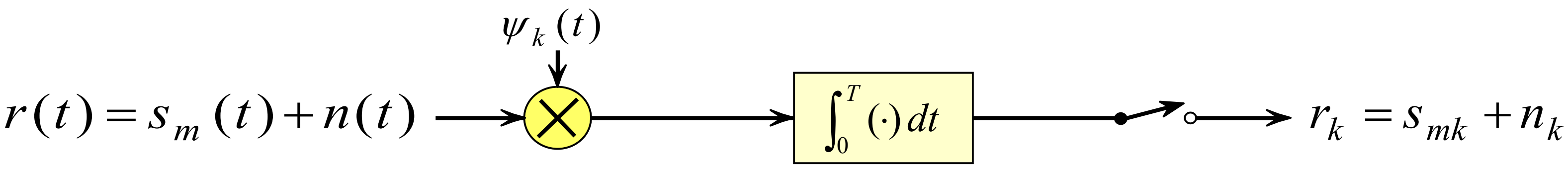
Αποδιαμορφωτής Συσχέτισης

Ο αποδιαμορφωτής συσχέτισης αναλύει το σήμα και το θόρυβο σε μια σειρά γραμμικά σταθμισμένων ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης $\{\psi_n(t)\}$.

Οι N συναρτήσεις βάσης $\{\psi_n(t)\}$ καλύπτουν το χώρο σημάτων. Αντίθετα δεν καλύπτουν το χώρο θορύβου.



Αποδιαμορφωτής συσχέτισης



Κάθε συσχετιστής, από την συστοιχία των N συσχετιστών, υπολογίζει την προβολή του $r(t)$ στις N συναρτήσεις βάσης $\{\psi_n(t)\}$.

$$\int_0^T r(t)\psi_k(t)\,dt = \int_0^T [s_m(t)+n(t)]\psi_k(t)\,dt$$

$$\underbrace{\int_0^T r(t)\psi_k(t)\,dt}_{r_k} = \underbrace{\int_0^T s_m(t)\psi_k(t)\,dt}_{s_{mk}} + \underbrace{\int_0^T n(t)\psi_k(t)\,dt}_{n_k}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για $k = 1, 2, \ldots, N$, δηλαδή,

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} s_{m1} \\ s_{m2} \\ \vdots \\ s_{mN} \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ \\ + \end{matrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix}$$

ή με τη μορφή διανυσμάτων $\quad \mathbf{r} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}$

Όπου το σήμα αναπαρίσταται από το διάνυσμα $\mathbf{s}_\mathrm{m}$ με συνιστώσες s_{mk}, $k = 1, 2, \ldots, N$. Οι τιμές των συνιστωσών αυτών εξαρτώνται από το ποιο σήμα, από τα M δυνατά σήματα μεταδόθηκε. Οι συνιστώσες του $\mathbf{n}$, δηλαδή, $\{n_k\}$, είναι τυχαίες μεταβλητές που προκύπτουν από την παρουσία προσθετικού θορύβου.

Το λαμβανόμενο σήμα $r(t)$ μπορεί να εκφραστεί στο χρονικό διάστημα $0 \le t \le T$ ως

$$r(t) = \sum_{k=1}^{N} s_{mk}\psi_k(t) + \sum_{k=1}^{N} n_k\psi_k(t) + n'(t) = \sum_{k=1}^{N} r_k\psi_k(t) + n'(t)$$

Ο όρος $n'(t)$, ο οποίος ορίζεται ως

$$n'(t) = n(t) - \sum_{k=1}^{N} n_k\psi_k(t)$$

Είναι μία Gaussian τυχαία διαδικασία θορύβου μηδενικής μέσης τιμής, που αντιπροσωπεύει τη διαφορά της αρχικής διαδικασίας θορύβου $n(t)$ και της προβολής της στις συναρτήσεις βάσεις $\{\psi_k(t)\}$.

Το $n'(t)$ όπως θα δούμε δεν επηρεάζει την απόφαση για το ποιο σήμα μεταδόθηκε έτσι η απόφαση βασίζεται εξ' ολοκλήρου στις συνιστώσες σήματος και θορύβου των συσχετιστών $r_k = s_{mh} + n_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Επειδή τα σήματα $\{s_m(t)\}$ είναι νομοτελειακά, οι συνιστώσες του διανύσματος s_m είναι επίσης νομοτελειακές.

Οι συνιστώσες θορύβου $\{n_k\}$ είναι Gaussian τυχαίες μεταβλητές με μέσες τιμές

$$E[n_k] = \int_0^T E[n(t)]\psi_k(t)\,dt = 0$$

για όλα τα k.

Οι συμμεταβολές των συνιστωσών θορύβου είναι

$$\begin{aligned} E[n_k n_m] &= \int_0^T \int_0^T E[n(t)n(\tau)]\psi_k(t)\psi_m(\tau)\,dt\,d\tau \\ &= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)\psi_k(t)\psi_m(\tau)\,dt\,d\tau \\ &= \frac{N_0}{2}\int_0^T \psi_k(t)\psi_m(t)\,dt = \frac{N_0}{2}\delta_{mk} \end{aligned}$$

Τελικά

$$E[n_k n_m] = \frac{N_0}{2}\delta_{mk}$$

Οι N συνιστώσες θορύβου $\{n_k\}$ είναι ασυσχέτιστες Gaussian τυχαίες μεταβλητές μηδενικής μέσης τιμής με την ίδια διακύμανση $\sigma_n^2 = N_0/2$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας Gaussian τυχαίας μεταβλητής με μέση τιμή m και διακύμανση σ^2 είναι

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Οι N προβολές του σήματος λήψης, $r(t)$ στις N συναρτήσεις βάσης, δηλαδή, το N-διάστατο διάνυσμα λήψης $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \ldots, r_N]$, η διανυσματική αναπαράσταση του μεταδιδόμενου σήματος $\mathbf{s}_m = [s_{m1}, s_{m2}, \ldots, s_{mN}]$ και οι N προβολές του θορύβου λήψης, $n(t)$ στις N συναρτήσεις βάσης $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \ldots n_N]$ συνδέονται με τη

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} s_{m1} \\ s_{m2} \\ \vdots \\ s_{mN} \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ \\ + \end{matrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix}$$

ή με τη μορφή διανυσμάτων $\mathbf{r} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}$

Οι N συνιστώσες θορύβου $\{n_k\}$ είναι ασυσχέτιστες Gaussian τυχαίες μεταβλητές μηδενικής μέσης τιμής με την ίδια διακύμανση $\sigma_n^2 = N_0/2$, επομένως η συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \ldots, n_N]$, $f(\mathbf{n})$, είναι

$$f(\mathbf{n}) = \prod_{i=1}^{N} f(n_i) \quad = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\sum_{i=1}^{N} \frac{n_i^2}{N_0}}$$

Αν μεταδόθηκε το m-στο σήμα, οι έξοδοι των συσχετιστών $\{r_k\} = \{s_{mk}\} + \{n_k\}$ είναι Gaussian τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή

$$E[r_k] = E[s_{mk} + n_k] = E[s_{mk}] + E[n_k] = E[s_{mk}] = s_{mk}$$

και με την ίδια διακύμανση

$$\sigma_r^2 = \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}$$

επομένως οι υποσυνθήκη συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών (r_1, r_2, ... ,r_N) είναι

$$f(r_k \mid s_{mk}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(r_k - s_{mk})^2}{N_0}}, \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, \ldots, M \\ k = 1, 2, \ldots, N \end{array}$$

Επειδή οι N συνιστώσες θορύβου $\{n_k\}$ είναι ασυσχέτιστες Gaussian τυχαίες μεταβλητές και στατιστικά ανεξάρτητες και οι N συνιστώσες του διανύσματος λήψης $\{r_k\}$ θα είναι στατιστικά ανεξάρτητες. Επομένως η ***συνδυασμένη υποσυνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*** $f(\mathbf{r} \mid \mathbf{s}_m)$ του διανύσματος λήψης $\mathbf{r}$ είναι

$$f(\mathbf{r} \mid \mathbf{s}_m) = \prod_{k=1}^{N} f(r_k \mid s_{mk}), \quad m = 1, 2, \ldots, M$$

όπου

$$f(r_k \mid s_{mk}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(r_k - s_{mk})^2}{N_0}}, \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, \ldots, M \\ k = 1, 2, \ldots, N \end{array}$$

επομένως

$$f(\mathbf{r} \mid \mathbf{s}_m) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left[-\sum_{k=1}^{N} \frac{(r_k - s_{mk})^2}{N_0} \right]$$

$$= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left[-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2}{N_0} \right], \quad m = 1, 2, \ldots, M$$

Για την τυχαία διαδικασία $n(t)'$ και τις N εξόδους των συσχετιστών $\{r_k\}$ παρατηρούμε

$$E[n'(t)r_k] = E[n'(t)]s_{mk} + E[n'(t)n_k] \; = E[n'(t)n_k]$$

$$= E\left[\left(n(t) - \sum_{j=1}^{N} n_j \psi_j(t)\right) n_k\right]$$

$$= E[n(t)n_k] - E\left[n_k \sum_{j=1}^{N} n_j \psi_j(t)\right]$$

$$n_k = \int_0^T n(\tau)\psi_k(\tau)\,d\tau$$

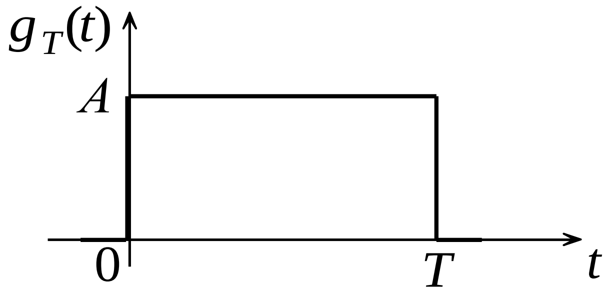
$$= \int_0^T E[n(t)n(\tau)]\psi_k(t)\,d\tau - \sum_{j=1}^{N} E[n_j n_k]\psi_j(t)$$

$$= \frac{N_0}{2}\psi_k(t) - \frac{N_0}{2}\psi_k(t) = 0$$

είναι ασυσχέτιστες. Επειδή η τυχαία διαδικασία $n(t)'$ και οι τυχαίες μεταβλητές $\{r_k\}$ είναι Gaussian τυχαίες μεταβλητές είναι και στατιστικά ανεξάρτητες. Συνεπώς η τυχαία διαδικασία $n(t)$ δεν περιέχέι πληροφορία που να είναι σχετική με την απόφαση για το ποια κυματομορφή σήματος μεταδόθηκε. Με άλλα λόγια όλη η σχετική πληροφορία περιέχεται στις εξόδους $\{r_k\}$ των συσχετιστών.

Παράδειγμα

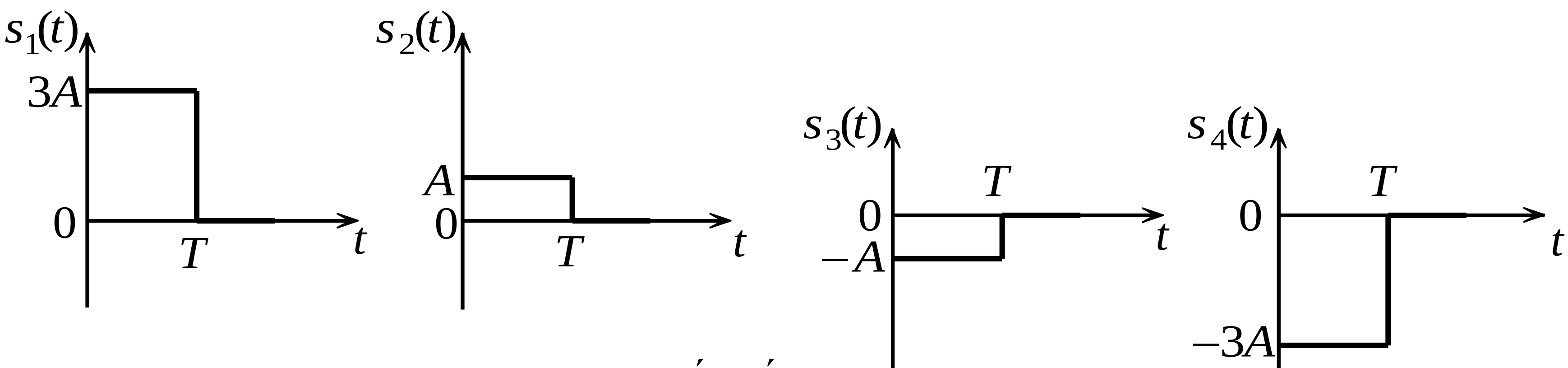
Δίνεται ένα 4-αδικό PAM σύστημα, όπου ο βασικός παλμός είναι $g_T(t)$. Ο προσθετικός θόρυβος είναι λευκός Gaussian μηδενικής μέσης τιμής.



Ο παλμός σήματος

οι 4-δικές κυματομορφές σήματος PAM είναι

$$s_m(t) = A_m\, g_T(t), \qquad m = 1,2,3,4 \qquad 0 \le t \le T$$



M= 4 κυματομορφές σήματος PAM.

Η ενέργεια του ορθογώνιου παλμού $g_T(t)$ είναι

$$\mathcal{E}_g = \int_0^T g_T^2(t)\,dt = A^2 \int_0^T dt = A^2 T$$

Η συνάρτηση βάσης $\psi(t)$ είναι

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{A^2 T}} g_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & 0 \le t \le T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η έξοδος του αποδιαμορφωτή συσχέτισης είναι

$$r = \int_0^T r(t)\psi(t)\,dt = \tfrac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T r(t)\,dt$$

Υποθέτοντας ότι μεταδόθηκε η $s_m(t)$, αντικαθιστώντας το $r(t) = s_m(t) + n(t)$ έχουμε

$$r = \tfrac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T [s_m(t) + n(t)]\,dt = \tfrac{1}{\sqrt{T}} \left[\int_0^T s_m(t)\,dt + \int_0^T n(t)\,dt \right] = s_m + n$$

ο όρος θορύβου έχει μέση τιμή $E[n] = 0$ και διακύμανση

$$\sigma_n^2 = E\left[\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T n(t)\, n(\tau)\, dt\, d\tau \right]$$

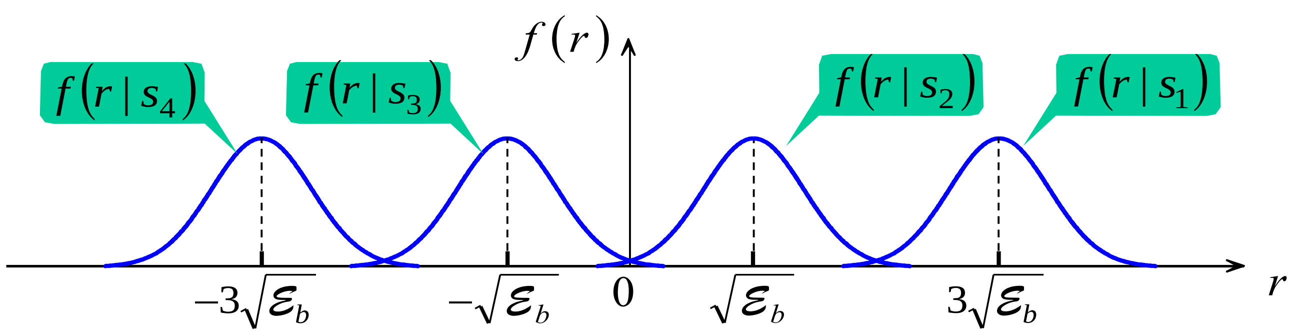
$$\sigma_n^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T E[n(t)\, n(\tau)]\, dt\, d\tau$$

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2T} \int_0^T \int_0^T \delta(t-\tau)\, dt\, d\tau$$

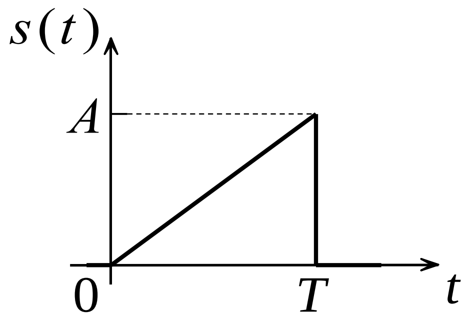
$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2T} \int_0^T d\tau = \frac{N_0}{2}$$

Η υποσυνθήκη συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητα της δειγματοληπτημένης εξόδου είναι

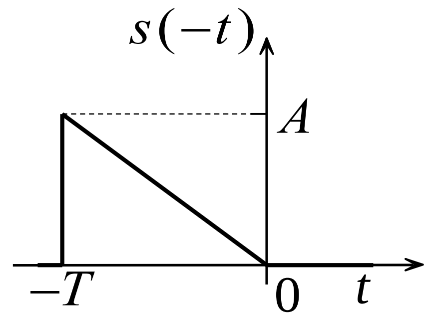
$$f(r \mid s_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(r-s_m)^2}{N_0}}$$



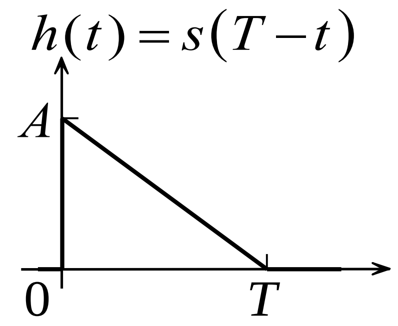
Ένα φίλτρο του οποίου η κρουστική απόκριση είναι $h(t) = s(T-t)$, όπου το σήμα $s(t)$ είναι περιορισμένο στο διάστημα $0 \le t \le T$, καλείται ***προσαρμοσμένο φίλτρο*** στο σήμα $s(t)$.



Σήμα s(t)

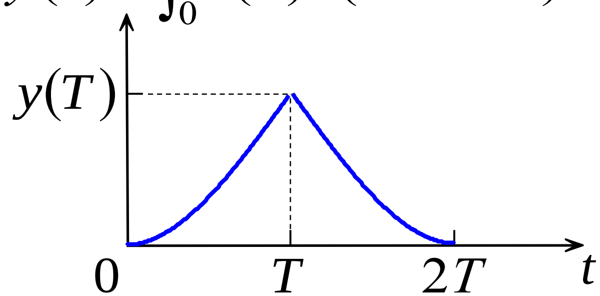


Το σήμα s(– t)



Κρουστική απόκριση φίλτρου προσαρμοσμένου στο s(t)

$$y(t) = \int_0^t s(\tau)\, s(T - t + \tau)\, d\tau$$

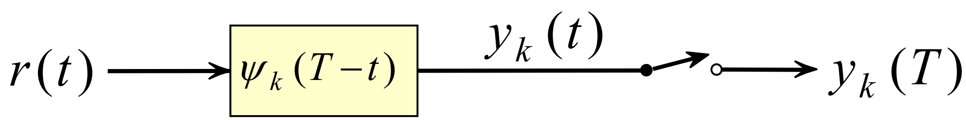


Η απόκριση του προσαρμοσμένου φίλτρου στο σήμα $s(t)$ είναι η ***συνάρτηση αυτόσυσχέτισης*** του σήματος $s(t)$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $y(t)$ είναι άρτια συνάρτηση ως προς t, η οποία μεγιστοποιείται για $t = T$.

Αποδεικνύεται ότι $\quad y(T) = \mathcal{E}_s = \frac{1}{3} A^2 T$

Οι δειγματοληπτημένες, τη χρονική στιγμή $t = T$, έξοδοι των προσαρμοσμένων φίλτρων είναι ίδιες με τις τιμές $\{r_k\}$ που λαμβάνονται από τους N συσχετιστές του αποδιαμορφωτή συσχέτισης, πράγματι,



Η έξοδος του k-στου προσαρμοσμένου φίλτρου είναι

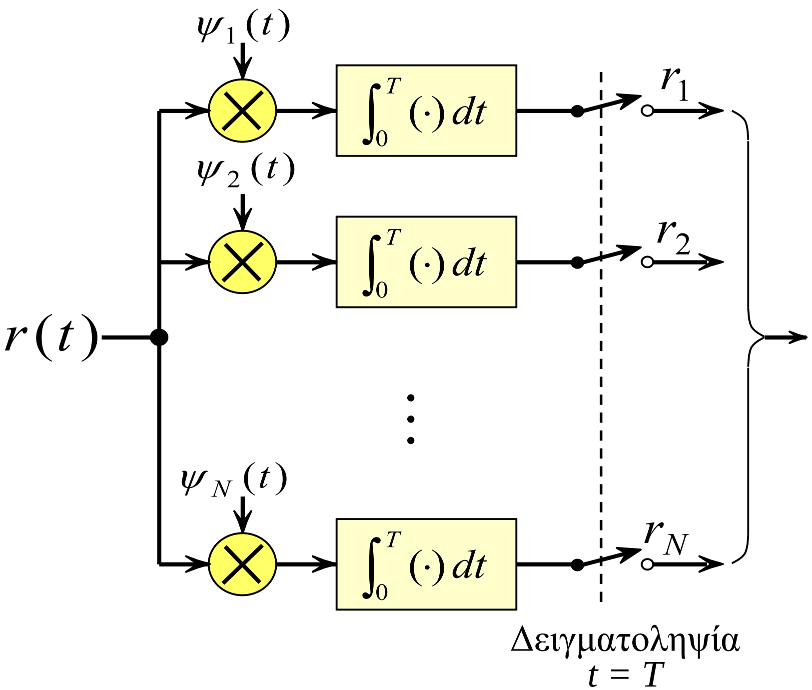
$$y_k(t) = \int_0^t r(\tau)\, h_k(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t r(\tau)\, \psi_k(T-t+\tau)\, d\tau$$

και η δειγματοληπτημένη τιμή της τη χρονική στιγμή $t = T$ είναι

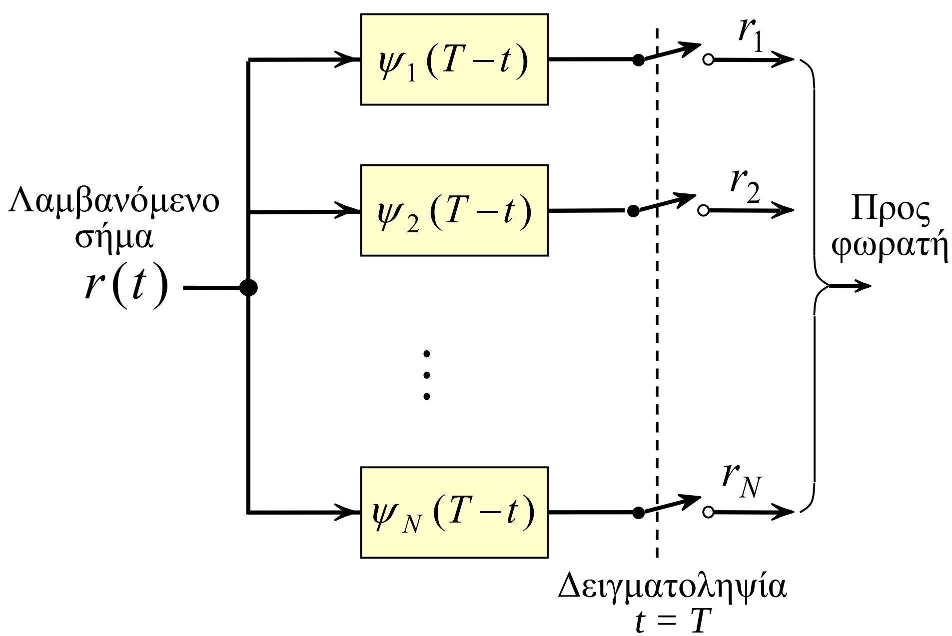
$$y_k(T) = \int_0^T r(\tau)\, \psi_k(\tau)\, d\tau = r_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots, N$$

Αποδιαμορφωτής Προσαρμοσμένων Φίλτρων

Αντί της συστοιχίας των N συσχετιστών χρησιμοποιούμε συστοιχία από N κατάλληλα γραμμικά φίλτρα



Αποδιαμορφωτής συσχέτισης



Αποδιαμορφωτής πρασαρμοσμένων φίλτρων

Οι κρουστικές αποκρίσεις των N φίλτρων επιλέγονται ως

$$\boxed{h_k(t) = \psi_k(T-t), \quad 0 \le t \le T}$$

Ιδιότητες των Προσαρμοσμένων Φίλτρων

Εάν ένα σήμα διαβρώνεται από AWGN, το φίλτρο με κρουστική απόκριση προσαρμοσμένη στο σήμα $s(t)$ μεγιστοποιεί το SNR εξόδου τη χρονική στιγμή $t = T$.

$$y(t) = \int_0^t r(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t s(\tau)h(t-\tau)\,d\tau + \int_0^t n(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

Τη χρονική στιγμή δειγματολήπτησης $t = T$, έχουμε

$$y(T) = \underbrace{\int_0^T s(t)h(T-\tau)\,d\tau}_{y_s(T)} + \underbrace{\int_0^T n(t)h(T-\tau)\,d\tau}_{y_n(T)}$$

συνιστώσα σήματος

συνιστώσα θορύβου

Ο λόγος SNR εξόδου ορίζεται ως

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{y_s^2(T)}{E\left[y_n^2(T)\right]}$$

Η συνιστώσα του σήματος τη χρονική στιγμή δειγματοληπτησης $t = T$, είναι

$$y_s(T) = \int_0^T s(t)h(T-\tau)\,d\tau$$

Η διακύμανση του θορύβου στην έξοδο του φίλτρου (ο παρονομαστής του λόγου) είναι

$$E\left[y_n^2(T)\right] = \int_0^T \int_0^T E[n(\tau)n(t)]h(T-\tau)h(T-t)\,dt\,d\tau$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^T \int_0^T \delta(t-\tau)h(T-\tau)h(T-t)\,dt\,d\tau$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^T h^2(T-t)\,dt$$

φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου

ενέργεια της κρουστικής απόκρισης h(t)

Έτσι ο λόγος SNR εξόδου γράφεται ως

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{y_s^2(T)}{E\left[y_n^2(T)\right]} = \frac{\left[\int_0^T s(\tau)h(T-\tau)\,d\tau\right]^2}{\frac{N_0}{2}\int_0^T h^2(T-t)\,dt} = \frac{\left[\int_0^T h(\tau)s(T-\tau)\,d\tau\right]^2}{\frac{N_0}{2}\int_0^T h^2(T-t)\,dt}$$

Η ανισότητα *Cauchy-Schwarz* για δύο σήματα $g_1(t)$ και $g_2(t)$, πεπερασμένης ενέργειας, είναι

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)\, g_2(t)\, dt\right]^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} g_1^2(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} g_2^2(t)\, dt$$

όπου η ισότητα ισχύει όταν $g_1(t) = C\, g_2(t)$ για οποιαδήποτε αυθαίρετη σταθερά C.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{\left[\int_0^T s(\tau)\, h(T-\tau)\, d\tau\right]^2}{\frac{N_0}{2}\int_0^T h^2(T-t)\,dt} \le \frac{\int_0^T s^2(\tau)\, d\tau \cancel{\int_0^T h^2(T-\tau)\, d\tau}}{\frac{N_0}{2}\cancel{\int_0^T h^2(T-t)\,dt}}$$

Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}}$ μεγιστοποιείται όταν $h(t) = C\, s(T-t)$, δηλαδή, όταν το $h(t)$ είναι προσαρμοσμένο στο σήμα $s(t)$.

Το μέγιστο SNR εξόδου που επιτυγχάνεται με το προσαρμοσμένο φίλτρο είναι

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{2}{N_0}\int_0^T s^2(t)\, dt = \frac{2\mathcal{E}_s}{N_0}$$

Το μέγιστο SNR εξόδου που επιτυγχάνεται με το προσαρμοσμένο φίλτρο είναι λοιπόν

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{2\mathcal{E}_s}{N_0}$$

Παρατηρούμε ότι το SNR εξόδου εξαρτάται από την ενέργεια της κυματομορφής $s(t)$ και όχι από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της.

Μελέτη του Προσαρμοσμένου Φίλτρου στο Πεδίο Συχνότητας

Η απόκριση συχνότητας του προσαρμοσμένου φίλτρου είναι

$$
\begin{aligned}
H(f) &= \int_0^T h(t)e^{-j2\pi f t}\,dt \\
&\overset{h(t)=s(T-t)}{=} \int_0^T s(T-t)e^{-j2\pi f t}\,dt \\
&\overset{T-t=\tau}{=} \left[\int_0^T s(\tau)e^{+j2\pi f \tau}\,d\tau\right]e^{-j2\pi f T}
\end{aligned}
$$

Τελικά

$$H(f)=S^*(f)e^{-j2\pi f T}$$

Το προσαρμοσμένο φίλτρο έχει απόκριση συχνοτήτων (φασματική απόκριση) που είναι ίση με το συζυγές μιγαδικό του φάσματος του μεταδιδόμενου σήματος πολλαπλασιασμένο επί τον παράγοντα φάσης $e^{-j2\pi f T}$, ο οποίος αντιπροσωπεύει την καθυστέρηση δειγματολήπτησης κατά T.

$$S(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow Y(f)$$

Το φάσμα της εξόδου του προσαρμοσμένου φίλτρου είναι

$$Y(f) = S(f)H(f) \overset{H(f)=S^*(f)e^{-j2\pi fT}}{=} S(f)S^*(f)e^{-j2\pi fT}$$

$$= |S(f)|^2 e^{-j2\pi fT}$$

και η έξοδος του προσαρμοσμένου φίλτρου είναι

$$y_s(t) = F^{-1}[H(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f)\, e^{j2\pi ft}\, df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 e^{-j2\pi fT} e^{j2\pi ft}\, df$$

Δειγματοληπτώντας την έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου τη χρονική στιγμή $t = T$, παίρνουμε

$$y_s(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2\, df \overset{Parseval}{=} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt \quad \Longrightarrow \quad y_s(T) = \mathcal{E}_s$$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου είναι

$$S_{out}(f) = |H(f)|^2 S_{in\,n}(f) = |H(f)|^2 \frac{N_0}{2}$$

και η συνολική ισχύς του θορύβου είναι

$$\begin{aligned} P_n &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{out}(f)\,df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \frac{N_0}{2}\,df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\,df \\ &\overset{H(f)=S^*(f)e^{-j2\pi f T}}{=} \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2\,df \\ &\overset{Parseval}{=} \frac{\mathcal{E}_s N_0}{2} \end{aligned}$$

τελικά η συνολική ισχύς του θορύβου είναι

$$P_n = \frac{\mathcal{E}_s N_0}{2}$$

Η ισχύς του σήματος στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου είναι

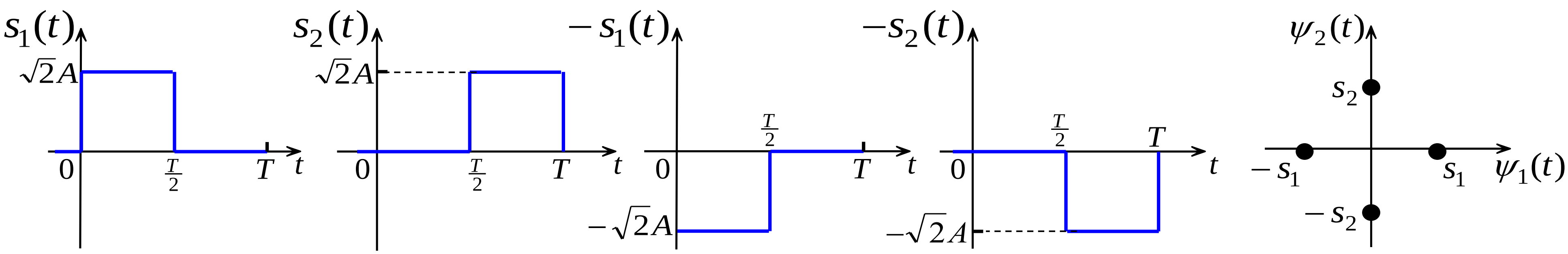
$$P_s = y_s^2(T) = \mathcal{E}_s^2$$

Ο λόγος SNR στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου είναι

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{P_s}{P_n} = \frac{\mathcal{E}_s^2}{\mathcal{E}_s N_0/2} = \frac{2\mathcal{E}_s}{N_0}$$

Παράδειγμα

Για την μετάδοση πληροφορίας μέσα από ένα AWGN χρησιμοποιούνται τα $M = 4$ διορθογώνια σήματα

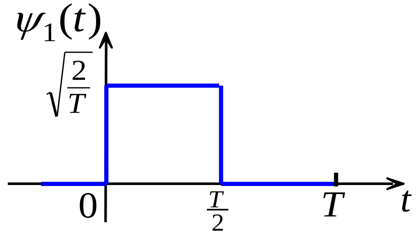


Επιλέγουμε τις συναρτήσεις βάσεις

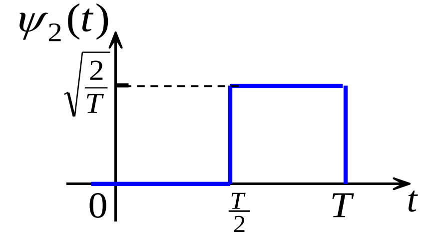
$$\psi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}}, & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \qquad \psi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}}, & \frac{T}{2} \le t \le T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η συναρτήσεις βάσης είναι

$$\psi_1(t)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{T}}, & 0\le t\le \frac{T}{2}\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$



$$\psi_2(t)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{T}}, & \frac{T}{2}\le t\le T\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

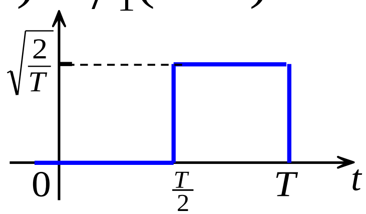


Οι κυματομορφές των δύο προσαρμοσμένων φίλτρων είναι

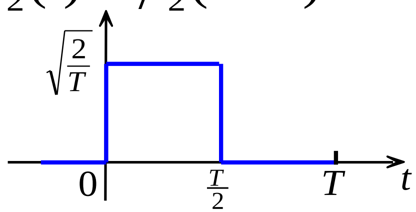
$$h_1(t)=\psi_1(T-t)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{T}}, & \frac{T}{2}\le t\le T\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

$$h_2(t)=\psi_2(T-t)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{T}}, & 0\le t\le \frac{T}{2}\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

$h_1(t)=\psi_1(T-t)$

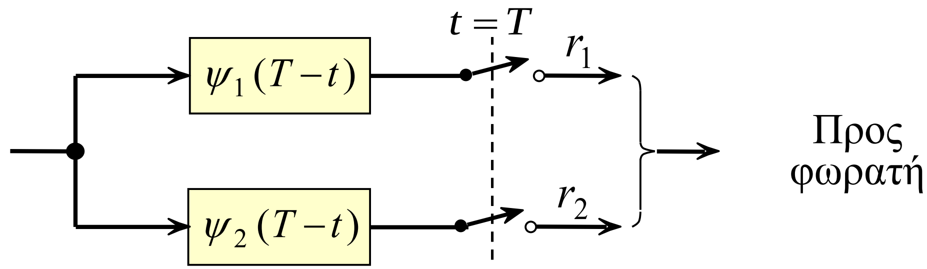


$h_2(t)=\psi_2(T-t)$

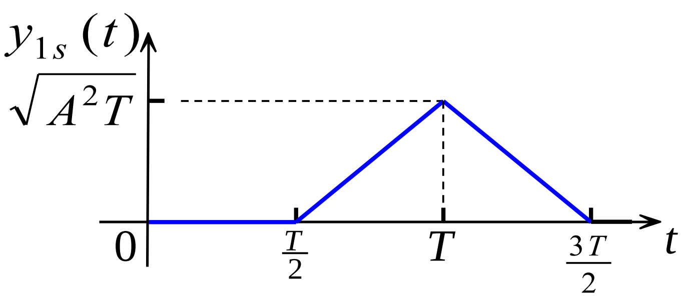


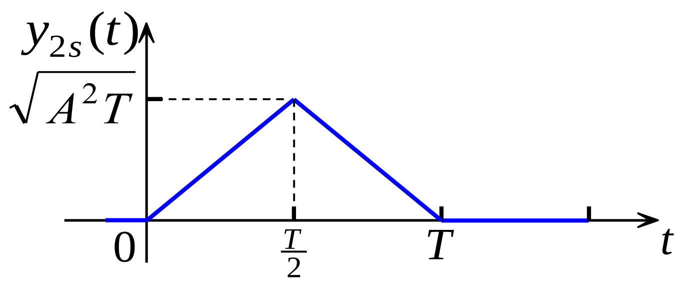
Λαμβανόμενο σήμα

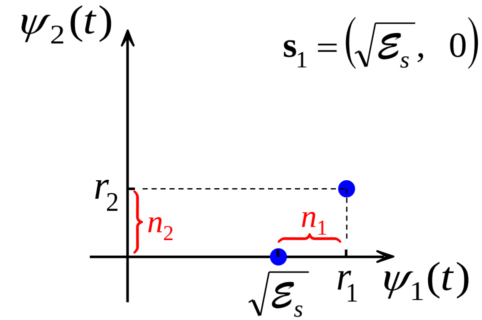
$$r(t) = s_1(t) + n(t)$$



Αν μεταδοθεί το $s_1(t)$, οι αποκρίσεις των δύο προσαρμοσμένων φίλτρων (απουσία θορύβου) είναι







Οι κυματομορφές δειγματοληπτούνται τη χρονική στιγμή $t = T$, και έχουμε

$$y_{1s}(T) = \sqrt{A^2T} \quad \text{και} \quad y_{2s}(T) = 0$$

Το διάνυσμα που σχηματίζεται από τις εξόδους των προσαρμοσμένων φίλτρων τη χρονική στιγμή δειγματολήπτησης (παρουσία θορύβου) είναι

$$\mathbf{r} = (r_1,\ r_2) = \left(\sqrt{A^2T} + n_1,\ \ n_2\right) = \left(\sqrt{\mathcal{E}_s} + n_1,\ \ n_2\right)$$

Το διάνυσμα που σχηματίζεται από τις εξόδους των προσαρμοσμένων φίλτρων τη χρονική στιγμή δειγματολήπτησης (παρουσία θορύβου) είναι

$$\mathbf{r} = (r_1,\ r_2) = \left(\sqrt{A^2T} + n_1,\ n_2\right) = \left(\sqrt{\mathcal{E}_s} + n_1,\ n_2\right)$$

όπου $n_1 = y_{1n}(T)$ και $n_2 = y_{2n}(T)$ είναι οι συνιστώσες θορύβου στις εξόδους των προσαρμοσμένων φίλτρων,

$$y_{1n}(T) = \int_0^T n(t)\psi_1(t)\,dt \quad \text{και} \quad y_{2n}(T) = \int_0^T n(t)\psi_2(t)\,dt$$

Η μέση τιμή των συνιστωσών θορύβου είναι

$$E[n_k] = E[y_{kn}(T)] = E\left[\int_0^T n(t)\psi_k(t)\,dt\right] = \int_0^T E[n(t)]\psi_k(t)\,dt = 0 \qquad k = 1,\ 2$$

και η διακύμανσή τους είναι

$$\sigma_n^2 = E\left[y_{kn}^2(T)\right] = \int_0^T\int_0^T E[n(t)n(\tau)]\ \psi_k(t)\psi_k(\tau)\ dt\ d\tau$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^T\int_0^T \delta(t-\tau)\ \psi_k(t)\psi_k(\tau)\ dt\ d\tau$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^T \psi_k^2(t)\ dt = \frac{N_0}{2}$$

Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}}$ για το πρώτο προσαρμοσμένο φίλτρο $h_1(t)$ είναι

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{\left(\sqrt{\mathcal{E}_s}\right)^2}{N_0/2} = \frac{2\,\mathcal{E}_s}{N_0}$$

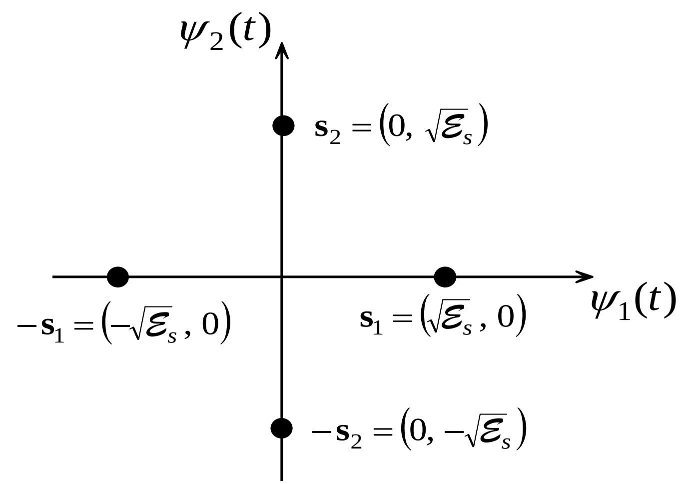
Ανάλογα προκύπτει ότι οι τέσσερις δυνατές έξοδοι των προσαρμοσμένων φίλτρων, οι οποίες αντιστοιχούν στα τέσσερα δυνατά μεταδιδόμενα σήματα είναι

$$s_1(t) \longrightarrow \mathbf{r} = (r_1, r_2) = \left(\sqrt{\mathcal{E}_s} + n_1,\ n_2\right)$$

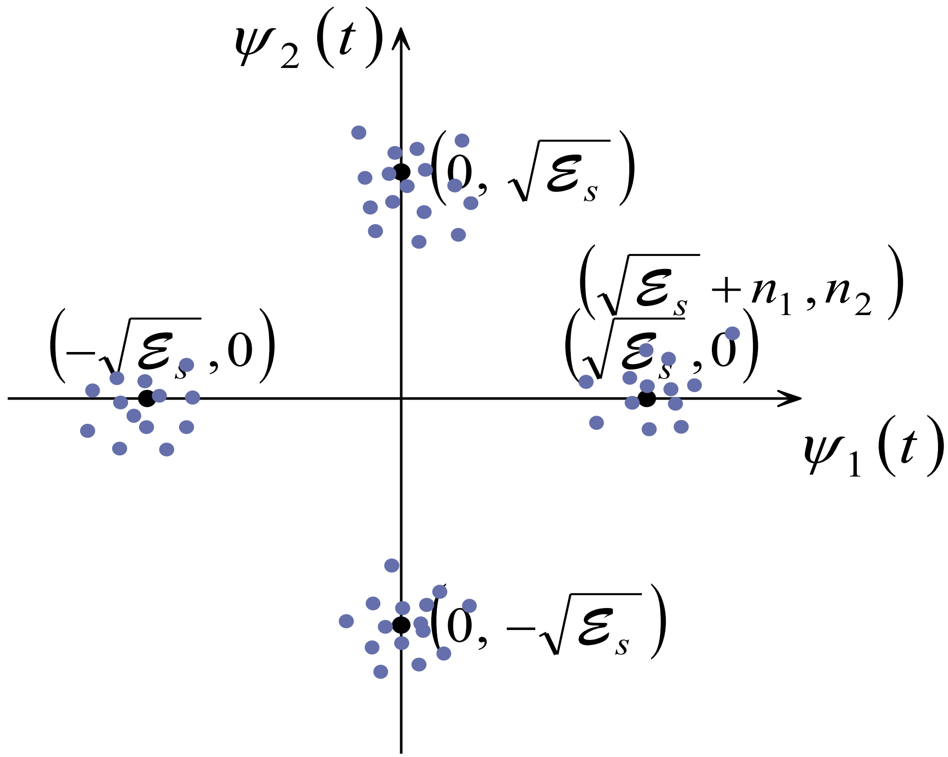
$$s_2(t) \longrightarrow \mathbf{r} = (r_1, r_2) = \left(n_1, \sqrt{\mathcal{E}_s} + n_2\right)$$

$$-s_1(t) \longrightarrow \mathbf{r} = (r_1, r_2) = \left(-\sqrt{\mathcal{E}_s} + n_1,\ n_2\right)$$

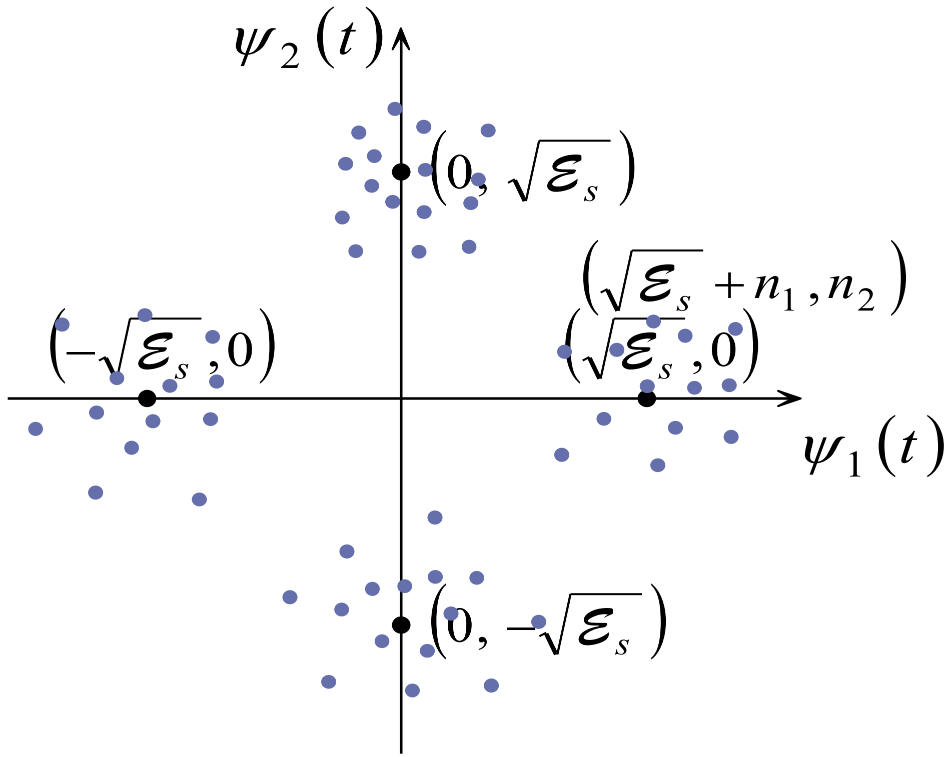
$$-s_2(t) \longrightarrow \mathbf{r} = (r_1, r_2) = \left(n_1, -\sqrt{\mathcal{E}_s} + n_2\right)$$



Ο αστερισμός του Παραδείγματος είναι



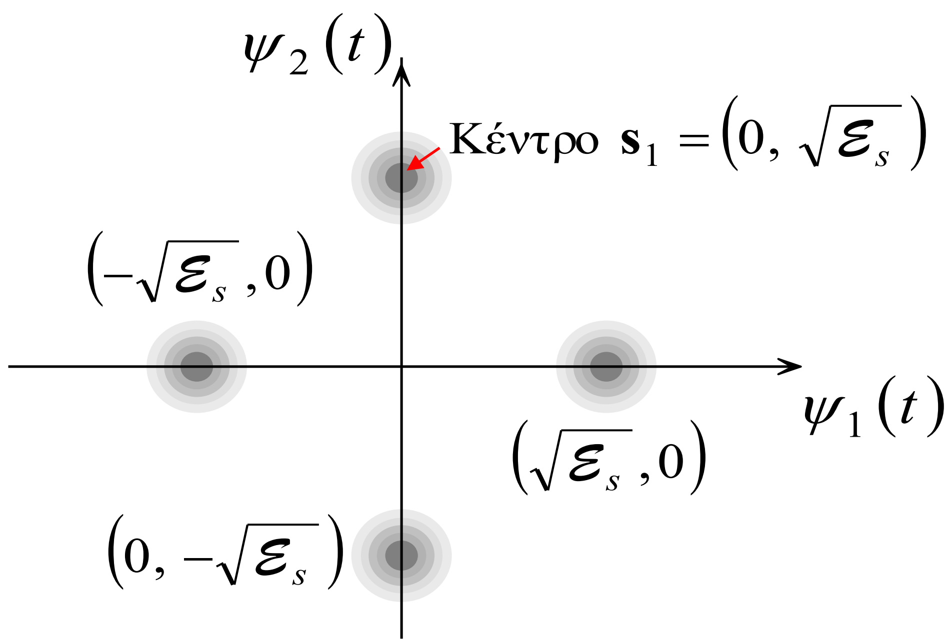
Αν η διακύμανση του θορύβου είναι μεγαλύτερη τότε έχουμε



Το λαμβανόμενο διάνυσμα ***r*** είναι άθροισμα δύο διανυσμάτων, του $\boldsymbol{s}_m$, του διανύσματος αναπαράστασης του μεταδιδόμενου σήματος, και του *n*, του διανύσματος θορύβου.

Οι συνιστώσες θορύβου είναι ανεξάρτητες με την ίδια μέση τιμή *0* και διακύμανση $N_0/2$. Η κατανομή του διανύσματος θορύβου στο διανυσματικό χώρο έχει σφαιρική συμμετρία.

Το λαμβανόμενο διάνυσμα ***r*** μπορεί να αναπαρασταθεί με ***ένα σφαιρικό νέφος*** με κέντρο το $\boldsymbol{s}_m$.



Παράδειγμα αστερισμού σήματος και νέφος θορύβου

Η πυκνότητα του νέφους είναι μεγαλύτερη στο κέντρο και ελαττώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από αυτό και ακολουθεί την ***Gaussian κατανομή***.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Σεραφείμ Καραμπογιάς 2015. Σεραφείμ Καραμπογιάς. «Αναλογικές και Ψηφιακές Επικοινωνίες. Βέλτιστος δέκτης για ψηφιακά διαμορφωμένα σήματα». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI41/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.