ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα 4: Ορίζουσες

Ευάγγελος Ράπτης

Τμήμα Πληροφορικής

23 Μάθημα 23

Παρασκευή 30 Νοεμβρίου 2012

23.1 Ορίζουσες

1. Οι ορίζουσες εκτός των άλλων εφαρμογών, βοηθούν και στην εύρεση λύσεων των γραμμικών συστημάτων

2. Έστω $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, το σύνολο των πινάκων $\nu\times\nu$ με συντελεστές από το $\mathbb{F}$. Ένας τέτοιος πίνακας έχει την μορφή

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

   Ονομάζουμε την πρώτη γραμμή A_1, δηλαδή $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} \end{pmatrix}$. Ομοίως $A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} \end{pmatrix}$, A_3, A_4,... ,
   $A_\nu = \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$

3. Ο πίνακας Α μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix}$$

4.

   Ορισμός 23.1. *Η απεικόνιση $D:\mathbb{F}^{\nu\times\nu}\longrightarrow\mathbb{F}$, ονομάζεται απεικόνιση ορίζουσας αν ικανοποιεί τις παρακάτω τρείς ιδιότητες*

   (α΄) Είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβολή γραμμής

   (β΄) Εάν δύο γραμμές ενός πίνακα είναι ίσες, τότε $D(A)=0$

   (γ΄) $D(I)=1$

5. Για πίνακες 1×1, έχουμε $D(\alpha)=\alpha$

6. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα 2×2.
Έχουμε $D\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} \alpha \cdot (1\ \ 0) + \beta \cdot (0\ \ 1 \\ \gamma \cdot (1\ \ 0) + \delta \cdot (0\ \ 1) \end{pmatrix}$
$= D\begin{pmatrix} \alpha \cdot (1\ \ 0) \\ \gamma \cdot (1\ \ 0) + \delta \cdot (0\ \ 1) \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} \beta \cdot (0\ \ 1 \\ \gamma \cdot (1\ \ 0) + \delta \cdot (0\ \ 1) \end{pmatrix}$
$= D\begin{pmatrix} \alpha \cdot (1\ \ 0) \\ \gamma \cdot (1\ \ 0) \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} \alpha \cdot (1\ \ 0) \\ \delta \cdot (0\ \ 1) \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} \beta \cdot (0\ \ 1 \\ \gamma \cdot (1\ \ 0) \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} \beta \cdot (0\ \ 1 \\ \delta \cdot (0\ \ 1) \end{pmatrix} =$
$\alpha\gamma D\begin{pmatrix} (1\ \ 0) \\ (1\ \ 0) \end{pmatrix} + \alpha\delta D\begin{pmatrix} (1\ \ 0) \\ (0\ \ 1) \end{pmatrix} + \beta\gamma D\begin{pmatrix} (0\ \ 1 \\ (1\ \ 0) \end{pmatrix} + \beta\delta D\begin{pmatrix} (0\ \ 1 \\ (0\ \ 1) \end{pmatrix}$
Ο πρώτος και τελευταίος προσθετέος είναι μηδέν (γιατί;) Τελικά έχουμε ότι
$D\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$ (γιατί;)

23.2 Άσκηση

Άσκηση 23.2. *Να δικαιολογηθούν πλήρως τα γιατί στον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα 2×2, όπως παραπάνω*

Άσκηση 23.3. *Δείξτε ότι ένας πίνακας 2×2 είναι αντιστέψιμος εάν η ορίζουσά του είναι διαφορετική του μηδενός*

Άσκηση 23.4. *Δείξτε ότι εάν ένας πίνακας 2×2 έχει τις γραμμές του γραμμικά εξαρτημένες, τότε η ορίζουσά του είναι μηδέν*

Τέλος του εικοστού τρίτου μαθήματος

24 Μάθημα 24

Δευτέρα 3 Δεκεμβρίου 2012

Ορίζουσες πινάκων 3×3

24.1 Ορίζουσες

1. Ας υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα 3×3. Ο πίνακας είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

2. Θέτουμε $e_1 = (1 \ \ 0 \ \ 0), e_2 = (0 \ \ 1 \ \ 0), e_3 = (0 \ \ 0 \ \ 1)$. Τα e_1, e_2, e_3 είναι πίνακες -γραμμές στον χώρο $\mathbb{R}^{1\times 3}$

3. Ο πίνακας A γίνεται

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \cdot e_1 + \alpha_{12} \cdot e_2 + \alpha_{13} \cdot e_3 \\ \alpha_{21} \cdot e_1 + \alpha_{22} \cdot e_2 + \alpha_{23} \cdot e_3 \\ \alpha_{31} \cdot e_1 + \alpha_{32} \cdot e_2 + \alpha_{33} \cdot e_3 \end{pmatrix}$$

4. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες και μάλιστα την πρώτη ιδιότητα βρίσκουμε ότι η ορίζουσα $D(A)$, είναι ένα άθροισμα $3^3 = 27$, όρων κάθε ένας είναι της μορφής:

$$\alpha_{1k} \cdot \alpha_{2\lambda} \cdot \alpha_{3\mu} \cdot D \begin{pmatrix} e_k \\ e_\lambda \\ e_\mu \end{pmatrix}$$

   Όπου $k, \lambda, \mu \in \{1, 2, 3\}$

5. Εάν τα k, λ, μ **δεν** είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο, τότε η ορίζουσα $D\begin{pmatrix} e_k \\ e_\lambda \\ e_\mu \end{pmatrix}$ είναι μηδέν (γιατί ;;), επομένως μηδενίζεται και όλος ο προσθετέος.

6. Δεν μηδενίζονται, επομένως κατ ανάγκην μόνο οι ορίζουσες της μορφής $D\begin{pmatrix} e_k \\ e_\lambda \\ e_\mu \end{pmatrix}$, όπου τα $k, \lambda, \mu \in \{1, 2, 3\}$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο. Μα τότε $\{k, \lambda, \mu\} = \{1, 2, 3\}$.

7. Υπάρχουν επομένως μόνο 6 προσθετέοι και η ορίζουσα παίρνει τη μορφή:

$$D(A) = \alpha_{11}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{33}D\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ e_3\end{pmatrix} + \alpha_{11}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{32}D\begin{pmatrix} e_1\\ e_3\\ e_2\end{pmatrix}$$
$$+\,\alpha_{12}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{33}D\begin{pmatrix} e_2\\ e_1\\ e_3\end{pmatrix} + \alpha_{13}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{31}D\begin{pmatrix} e_3\\ e_2\\ e_1\end{pmatrix}$$
$$+\,\alpha_{12}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{31}D\begin{pmatrix} e_2\\ e_3\\ e_1\end{pmatrix} + \alpha_{13}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{32}D\begin{pmatrix} e_3\\ e_1\\ e_2\end{pmatrix}$$

8. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες έχουμε:

$$D\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ e_3\end{pmatrix} = 1, D\begin{pmatrix} e_1\\ e_3\\ e_2\end{pmatrix} = -1, D\begin{pmatrix} e_2\\ e_1\\ e_3\end{pmatrix} = -1,$$
$$D\begin{pmatrix} e_3\\ e_2\\ e_1\end{pmatrix} = -1, D\begin{pmatrix} e_2\\ e_3\\ e_1\end{pmatrix} = 1, D\begin{pmatrix} e_3\\ e_1\\ e_2\end{pmatrix} = 1$$

9. Τελικά η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$D(A) = \alpha_{11}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{33} - \alpha_{11}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{32} - \alpha_{12}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{33} - \alpha_{13}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{31} + \alpha_{12}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{31} + \alpha_{13}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{32}$

24.2 Άσκηση

Άσκηση 24.1. *Αποδείξτε αναλυτικά τα σημεία 4,5 7και 8 παραπάνω του υπολογισμού της ορίζουσας* 3×3

Άσκηση 24.2. *Να υπολογισθεί η τιμή της ορίζουσας του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

Τέλος του εικοστού τετάρτου μαθήματος

25 Μάθημα 25

Τετάρτη 5 Δεκεμβρίου 2012

25.1 Πορεία μελέτης

1. Να κάνετε μία προσπάθεια να βρείτε τύπο για την ορίζουσα πίνακα 4×4. Θα είναι άθροισμα 24=4! προσθετέων

2. Συμβουλευθείτε για θέματα σχετικά με ορίζουσες τα βιβλία που δίδονται στη βιβλιογραφία στην κεντρική σελίδα του μαθήματος

3. Να αποδείξετε ότι αν η ορίζουσα ενός πίνακα 3×3 είναι 0, τότε οι γραμμές του είναι γραμμικά εξαρτημένες. Ισχύει το αντίστροφο; Το συμπέρασμα αυτό θα το χρειασθούμε διότι θα μας δώσει ιδέες γενίκευσης για τις ορίζουσες $\nu \times \nu$

4. **Προετοιμασία για γενίκευση:** Έστω $T_\nu = \{1, 2, 3, \cdots, \nu\}$, το σύνολο των φυσικών αριθμών από το 1 έως το ν. Θεωρούμε το σύνολο:

$$S_\nu = \{\theta : T_\nu \longrightarrow T_\nu, \theta \ 1-1, \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \epsilon\pi\iota\}$$

5. Η ταυτοτική απεικόνιση ανήκει στο σύνολο S_ν

6. Αν πάρουμε τη σύνθεση δύο απεικονίσεων του S_ν το αποτέλεσμα θα ανήκει ξανά στο S_ν (γιατί;;;)

7. Κάθε στοιχείο του S_ν έχει αντίστροφο, το οποίο ανήκει και αυτό στο S_ν (γιατί;;;)

8. Το πλήθος των στοιχείων του S_ν είναι $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu$

9. Κάθε στοιχείο του S_ν, ονομάζεται **μετάθεση** του συνόλου T_ν.

10. Όταν ένα στοιχείο του S_ν, μία μετάθεση ϑ του T_ν δηλαδή, έχει την ιδιότητα Υπάρχουν $\kappa, \lambda \in T_\nu$ με $\theta(\kappa) = \lambda, \theta(\lambda) = \kappa$ και $\theta(\mu) = \mu$ για κάθε $\mu \neq \kappa, \lambda$, η μετάθεση αυτή λέγεται **αντιμετάθεση.**

11.

    Θεώρημα 25.1. *(α΄) Κάθε μετάθεση $\theta \in S_\nu$, γράφεται ως σύνθεση*[26] *αντιμεταθέσεων*

[26] Τη σύνθεση μεταθέσεων θα τη λέμε και γινόμενο

(β′) *Αν έχουμε δύο γραφές της μετάθεσης $\theta \in S_\nu$, ως σύνθεση αντιμεταθέσεων, τότε το πλήθος των αντιμεταθέσεων θα είναι ή άρτος αριθμός και στις δύο γραφές ή περιττός αριθμός και στις δύο γραφές. Στην πρώτη περίπτωση μιλάμε για* ***άρτια*** *μετάθεση , στη δεύτερη για* ***περιττή*** *μετάθεση*

(γ′) *Το πλήθος των αρτίων μεταθέσεων του $\in S_\nu$ είναι $\frac{\nu!}{2}$ και το πλήθος των περιττών $\frac{\nu!}{2}$*

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει σε μεταγενέστερα μαθήματα. Δείτε επίσης και στη διεύθυνση εδώ για παραπάνω

12.

Ορισμός 25.2. *Ορίζουμε ως σημείο μιας μετάθεσης ϑ το $\sigma(\vartheta)$=1, εάν η ϑ είναι άρτια μετάθεση και το $\sigma(\vartheta)$=-1 , εάν η ϑ είναι περιττή μετάθεση.*

13. Σύμφωνα με τα προηγούμενα μαθήματα εάν

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

είναι ένας πίνακας $\nu \times \nu$, τότε η ορίζουσα του A είναι

$$D(A) = \sum_{\theta \in S_\nu} \sigma(\theta) \cdot \left(\alpha_{1\theta(1)}\alpha_{2\theta(2)} \cdots \alpha_{\nu\theta(\nu)}\right)$$

14. Δείτε περισσότερα για τις μεταθέσεις από τη διεύθυνση εδώ

25.2 Άσκηση

1. Να βρεθούν όλες οι μεταθέσεις του $T_3 = \{1, 2, 3\}$. Ποιές από αυτές είναι άρτιες και ποιές περιττές;
   Να γίνει το ίδιο και για τις μεταθέσεις του $T_4 = \{1, 2, 3, 4\}$.

2. (**Δύσκολη**) Να δείξετε χρησιμοποιώντας τον τύπο παραπάνω ότι η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A είναι ίση με την ορίζουσα του αναστρόφου A^t.

Τέλος του εικοστού πέμπτου μαθήματος

26 Μάθημα 26

Παρασκευή 7 Δεκεμβρίου 2012

26.1 Ορίζουσα γινομένου δύο τετραγωνικών πινάκων

1. Ας θεωρήσουμε δύο πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

   και

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}$$

2. Πολλαπλασιάστε με τον γνωστό τρόπο τους δύο πίνακες

3. Η πρώτη γραμμή του γινομένου AB είναι
   $\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}+\alpha_{13}\beta_{31},\ \ \alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}+\alpha_{13}\beta_{32},\ \ \alpha_{11}\beta_{13}+\alpha_{12}\beta_{23}+\alpha_{13}\beta_{33}$

4. Η δεύτερη γραμμή του γινομένου AB είναι
   $\alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}+\alpha_{23}\beta_{31},\ \ \alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{22}+\alpha_{23}\beta_{32},\ \ \alpha_{21}\beta_{13}+\alpha_{22}\beta_{23}+\alpha_{23}\beta_{33}$

5. Η τρίτη γραμμή του γινομένου AB είναι
   $\alpha_{31}\beta_{11}+\alpha_{32}\beta_{21}+\alpha_{33}\beta_{31},\ \ \alpha_{31}\beta_{12}+\alpha_{32}\beta_{22}+\alpha_{33}\beta_{32},\ \ \alpha_{31}\beta_{13}+\alpha_{32}\beta_{23}+\alpha_{33}\beta_{33}$

6. Ο πίνακας AB γίνεται: AB=

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}+\alpha_{13}\beta_{31} & \alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}+\alpha_{13}\beta_{32} & \alpha_{11}\beta_{13}+\alpha_{12}\beta_{23}+\alpha_{13}\beta_{33} \\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}+\alpha_{23}\beta_{31} & \alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{22}+\alpha_{23}\beta_{32} & \alpha_{21}\beta_{13}+\alpha_{22}\beta_{23}+\alpha_{23}\beta_{33} \\ \alpha_{31}\beta_{11}+\alpha_{32}\beta_{21}+\alpha_{33}\beta_{31} & \alpha_{31}\beta_{12}+\alpha_{32}\beta_{22}+\alpha_{33}\beta_{32} & \alpha_{31}\beta_{13}+\alpha_{32}\beta_{23}+\alpha_{33}\beta_{33} \end{pmatrix}$$

7. Ο πίνακας AB « γίνεται» επίσης ένας πίνακας 3×1 με
   $AB = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}$
   όπου

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} \cdot \beta_{11} + \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{21} + \begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \beta_{31}$$

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} \cdot \beta_{12} + \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{22} + \begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \beta_{32}$$

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} \cdot \beta_{13} + \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{23} + \begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \beta_{33}$$

8. Παρατηρούμε ότι το X είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A με συντελεστές από τον πίνακα B. Το ίδιο και για το Υ και το Z.

9. Θέλοντας να υπολογίσουμε την ορίζουσα του AB σκεπτόμαστε ότι λόγω της γραμμικότητας (δες τον ορισμό 23.1) έχουμε ότι:

   $| AB |=$ άθροισμα 27 όρων. Κάθε προσθετέος προέρχεται λαμβάνοντας έναν προσθετέο από το X , ενα προσθετέο από το Υ και ένα προσθετέο από το Z.

10. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Επιλέγουμε το στοιχείο $\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} \cdot \beta_{11}$ του X, το στοιχείο $\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{22}$ του Υ και το στοιχείο $\begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \beta_{33}$ του Z

    Τότε σχηματίζεται ο πίνακας που έχει ως στήλες

    Πρώτη στήλη την $\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} \cdot \beta_{11}$

    δεύτερη στήλη την $\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{22}$

    και τρίτη στήλη την $\begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \beta_{33}$

11. Η ορίζουσα του παραπάνω πίνακα θα είναι ίση με

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \beta_{11}\beta_{22}\beta_{33}$$

12. Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα. Επιλέγουμε το στοιχείο $\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{21}$ του X και τα υπόλοιπα δύο τα ίδια όπως πρίν δηλαδή

    $\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{22}$ του Υ και το στοιχείο $\begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \beta_{33}$ του Z

Τότε σχηματίζεται ο πίνακας που έχει ως στήλες

Πρώτη στήλη την $\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{21}$

δεύτερη στήλη την $\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{22}$

και τρίτη στήλη την $\begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \beta_{33}$

13. Η ορίζουσα του παραπάνω πίνακα θα είναι ίση με

$$\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \beta_{21}\beta_{22}\beta_{33}$$

Η ποσότητα αυτή είναι ίση με μηδέν διότι η ορίζουσα έχει δύο στήλες ίσες

14. Αν θελήσουμε, λοιπόν, να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα AB θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα άθροισμα με $3^3 = 27$ προσθετέους. Όμως αν παρατηρήσουμε πιο καλά θα δούμε ότι **μόνο** έξη προσθετέοι παραμένουν οι οποίοι ενδέχεται να μην είναι μηδέν.

15. Γράφουμε τους προσθετέους που μιλήσαμε παραπάνω:

(α΄)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \beta_{11}\beta_{22}\beta_{33} = \mid A \mid \cdot \beta_{11}\beta_{22}\beta_{33}$$

(β΄)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \beta_{12}\beta_{21}\beta_{33} = - \mid A \mid \cdot \beta_{12}\beta_{21}\beta_{33}$$

(γ΄)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{12} & \alpha_{11} \\ \alpha_{23} & \alpha_{22} & \alpha_{21} \\ \alpha_{33} & \alpha_{32} & \alpha_{31} \end{vmatrix} \cdot \beta_{13}\beta_{22}\beta_{31} = - \mid A \mid \cdot \beta_{13}\beta_{22}\beta_{31}$$

(δ΄)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{32} \end{vmatrix} \cdot \beta_{11}\beta_{23}\beta_{32} = - \mid A \mid \cdot \beta_{11}\beta_{23}\beta_{32}$$

(ε′)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} \end{vmatrix} \cdot \beta_{12}\beta_{23}\beta_{31} = \mid A \mid \cdot \beta_{12}\beta_{23}\beta_{31}$$

(ϛ′)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} \cdot \beta_{13}\beta_{21}\beta_{32} = \mid A \mid \cdot \beta_{13}\beta_{21}\beta_{32}$$

16. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε την ποσότητα:
$\mid A \mid \cdot(\beta_{11}\beta_{22}\beta_{33} - \beta_{12}\beta_{21}\beta_{33} - \beta_{13}\beta_{22}\beta_{31} - \beta_{11}\beta_{23}\beta_{32} + \beta_{12}\beta_{23}\beta_{31} + \beta_{13}\beta_{21}\beta_{32})$

17. Παρατηρούμε ότι η παράσταση μέσα στην παρένθεση είναι η ορίζουσα του πίνακα B (δες σχετικά προηγούμενα μαθήματα)

18. Τελικά έχουμε για πίνακες 3×3 ότι

$$\mid A \cdot B \mid = \mid A \mid \cdot \mid B \mid$$

26.2 Άσκηση

Να αποδείξετε λεπτομερώς, χρησιμοποιώντας τις ιδέες του σημερινού μαθήματος ότι η ορίζουσα του γινομένου δύο τετραγωνικών πινάκων είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών των πινάκων, όταν έχουμε πίνακες 2×2 και πίνακες 4×4. Να κάνετε μία προσπάθεια για την περίπτωση των πινάκων $\nu \times \nu$

Τέλος του εικοστού έκτου μαθήματος

27 Μάθημα 27

Δευτέρα 10 Δεκεμβρίου 2012

27.1 Και άλλα για ορίζουσες

1. Δείτε ξανά τον ορισμό της ορίζουσας 23.1 και σκεφθείτε ότι στην πραγματικότητα η ορίζουσα είναι μία συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων και το πεδίο τιμών οι συντελεστές

2. Σκεφθείτε επίσης ότι η έννοια της ορίζουσας στο 23.1 ορίζεται επικαλούμενοι ιδιότητες μιας συνάρτησης. Στο μάθημα αυτό, το 12 δηλαδή, χρησιμοποιούμε μία συνάρτηση χωρίς να είμαστε σίγουροι **αν υπάρχει!!!**[27]

3. Η πρώτη φορά, στο μάθημα αυτό, που βεβαιωνόμαστε ότι υπάρχει συνάρτηση ορίζουσας είναι στο σημείο 13 . Εκεί βρίσκουμε μάλιστα τύπο για τη συνάρτηση αυτή[28]

4. Από τα προηγούμενα βρίσκουμε και έχουμε αποδείξει όχι μόνο ότι υπάρχει η συνάρτηση ορίζουσας, αλλά οι ιδιότητες που απαιτούμε καθορίζουν την μοναδικότητα, με την έννοια: **Αν υπάρχει συνάρτηση ορίζουσας**[29] , τότε είναι μοναδική.

5. Σύμφωνα με τα παραπάνω αν βρούμε μία συνάρτηση με τις ιδιότητες που συζητάμε στο 23.1 τότε αναγκαστικά η συνάρτηση αυτή είναι η ορίζουσα.

6. Εδώ είναι που βρίσκουμε την έννοια του αναπτύγματος μιας ορίζουσας ως προς μία γραμμή ή μία στήλη. Δείτε λοιπόν:

7. Έστω
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$
ένας πίνακας $\nu \times \nu$

[27] Στα Μαθηματικά δεν αρκεί να πούμε *έστω θ μία συνάρτηση με κάποιες ιδιότητες* . Πρέπει να βρεθεί τρόπος να αποδείξουμε ή να βεβαιωθούμε ότι υπάρχει. Για παράδειγμα αν πούμε έστω $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες 1) Η ϑ είναι σταθερή και 2) $\vartheta(1)=2$, $\vartheta(3)=7$ τότε είμαστε σε αντίφαση, τέτοια συνάρτηση δεν υπάρχει

[28] Όπως ίσως θα γνωρίζετε **δεν είναι ανάγκη** μία συνάρτηση να έχει τύπο. Δες περισσότερα εδώ

[29] μόλις πριν λίγο βεβαιωθήκαμε ότι υπάρχει

8. Σε κάθε στοιχείο α_{ij} αντιστοιχίζουμε το στοιχείο

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} K_{ij},$$

όπου K_{ij} είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον A εάν διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη.

9.

Ορισμός 27.1. *Θεωρούμε το άθροισμα:*

$$D_i(A) = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{ij} \cdot A_{ij}$$

Το άθροισμα αυτό το λέμε **ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα A ως προς τη γραμμή** i

10.

Ορισμός 27.2. *Θεωρούμε το άθροισμα:*

$$D^j(A) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{ij} \cdot A_{ij}$$

Το άθροισμα αυτό το λέμε **ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα A ως προς τη στήλη** j

11. Οι παραπάνω παραστάσεις $D_i(A)$ και $D^j(A)$ ως συναρτήσεις του πίνακα A ικανοποιούν τις τρείς απαιτήσεις του ορισμού της ορίζουσας (γιατί;;;) και για τον λόγο αυτό είναι ίσες με την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A ως προς τη γραμμή i ή με το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα A ως προς τη στήλη j για κάθε γραμμή και για κάθε στήλη

12. Παρακολουθήστε προσεκτκά το βιντεοσκοπημένο μάθημα του καθηγητή W.Gilbert Strang του MIT εδώ σχετικά με την εισαγωγή των οριζουσών.

27.2 Άσκηση

1. Βρείτε από οποιοδήποτε βιβλίο το *ανάπτυγμα* μιας ορίζουσας ως προς μία γραμμή και αποδείξτε ότι έτσι υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα A

2. Βρείτε από οποιοδήποτε βιβλίο το *ανάπτυγμα* μιας ορίζουσας ως προς μία στήλη και αποδείξτε ότι έτσι υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα A

Τέλος του εικοστού έβδομου μαθήματος

28 Μάθημα 28

Τετάρτη 12 Δεκεμβρίου 2012

28.1 Λίγα ακόμη για ορίζουσες

1. Όπως και στο προηγούμενο μάθημα ας θεωρήσουμε τον πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

2. Σε κάθε στοιχείο α_{ij} αντιστοιχίζουμε το στοιχείο

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} K_{ij},$$

όπου K_{ij} είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον A εάν διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη.

3. Κατασκευάζουμε ένα νέο πίνακα[30] τον

$$adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{\nu 1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{\nu 2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \cdots & \alpha_{\nu 3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1\nu} & A_{2\nu} & A_{3\nu} & \cdots & A_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

4.

Ορισμός 28.1. *Ο παραπάνω πίνακας λέγεται* **προσαρτημένος πίνακας του A**[31] *και συμβολίζεται με adjoint(A) ή με adj(A)*

5.

Θεώρημα 28.2. *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τότε $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = \mid A \mid I_\nu$*

Απόδειξη Η απόδειξη γίνεται με υπολογισμό του γινομένου $A \cdot adj(A)$ και $adj(A) \cdot A$, χρησιμοποιώντας τα σχετικά με το ανάπτυγμα ορίζουσας. Δες και τα αναγραφόμενα στο βιβλίο εδώ σελίδα 322.

[30]Προσοχή τι βάζουμε για τον σχηματισμό γραμμών και στηλών
[31]Στα αγγλικά ο όρος είναι adjoint

6.

Θεώρημα 28.3. *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν η ορίζουσά του είναι διαφορετική του μηδενός*

Απόδειξη Έστω ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Τότε θα υπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, με την ιδιότητα $A \cdot B = B \cdot A = I_\nu$ Από τις ιδιότητες της ορίζουσας έχουμε ότι $\mid A{\cdot}B \mid=\mid I_\nu \mid= 1 =\mid A \mid \cdot \mid B \mid$ Από εδώ συμπεραίνουμε ότι $\mid A \mid\neq 0$.

Αντίστροφα έστω ότι $\mid A \mid\neq 0$. Από την προγούμενη σχέση για τον προσαρτημένο πίνακα έχουμε ότι ορίζεται ο πίνακας $\frac{1}{|A|} \cdot adj(A)$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο αντίστροφος του A είναι ο $\frac{1}{|A|} \cdot adj(A)$.

28.2 Ο Ωραίος ισομορφισμός

Έχουμε πει σε προηγούμενα μαθήματα ότι αν δύο διανυσματικοί χώροι είναι ισόμορφοι, τότε **δεν** κάνουμε διάκριση μεταξύ τους. Στην πραγματικότητα αν δύο διανυσματικοί χώροι A και B είναι ισόμορφοι, πρόκειται για τον *ίδιο* διανυσματικό χώρο με διαφορετική μορφή. Κάθε *συμβάν* και κάθε σχέση στον A έχει το αντίστοιχό του στον B και αντίστροφα.

Παρακάτω θα αναφερθούμε σε έναν ισομορφισμό από τα προηγούμενα μαθήματα:

1. Θεωρούμε δύο διανυσματικούς χώρους A και B με $dimA = \mu$ και $dimB = \nu$ και συντελεστές από το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών[32] .

2. Θεωρούμε το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων $\mathcal{L}$(A,B) από τον διανυσματικό χώρο A στον διανυσματικό χώρο B.

3. Το σύνολο $\mathcal{L}$(A,B) γίνεται και αυτό διανυσματικός χώρος με πράξεις την πρόσθεση συναρτήσεων και γινόμενο συντελεστή επι συνάρτηση

4. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο των πινάκων $\mathbb{R}^{\nu\times\mu}$

5. Επιλέγουμε μία διατεταγμένη βάση $\overline{\alpha}$ του A και μία διατεταγμένη βάση $\overline{\beta}$ του B

6. Η απεικόνιση
$$\boldsymbol{\Theta} : \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{R}^{\nu\times\mu}$$
με
$$f \longmapsto (f : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$$
είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων[33]

[32]Όπως έχουμε επισημάνει και σε άλλα σημεία, θα μπορούσαμε να έχουμε διανυσματικούς χώρους με άλλους συντελεστές

[33]Έχει αποδειχθεί σε προηγούμενα μαθήματα ότι σε κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί ένας πίνακας και αντίστροφα, αρκεί βέβαια να έχουμε επιλέξει βάσεις

7. Ο ισομορφισμός $\mathbf{\Theta}$, που θα τον λέμε από τώρα και στα επόμενα **Ωραίο ισομορφισμό**[34] μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι δύο διανυσματικοί χώροι $\mathcal{L}$(A,B) και $\mathbb{R}^{\nu\times\mu}$ είναι στην πραγματικότητα το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο με διαφορετικές μορφές.

28.3 Άσκηση

1. Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ καθώς και ο $adj(A)$

2. Να βρείτε δύο ιδιότητες του διανυσματικού χώρου $\mathcal{L}$(A,B) και να τις «μεταφράσετε» με τη βοήθεια του ωραίου[35] ισομορφισμού σε ιδιότητες πινάκων π.χ. αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση έχει ως «μετάφραση» αντιστέψιμος πίνακας. Βεβαιωθείτε για τη μετάφραση αυτή.

Τέλος του εικοστού ογδόου μαθήματος

[34] Μόνο στο μάθημα αυτό θα χρησιμοποιούμε τον όρο *Ωραίο ισομορφισμό*

[35] ο όρος ωραίος ισομορφισμός χρησιμοποιείται μόνο στο μάθημα αυτό!!

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης