ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Βέλτιστα γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα

Σεραφείμ Καραμπογιάς
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

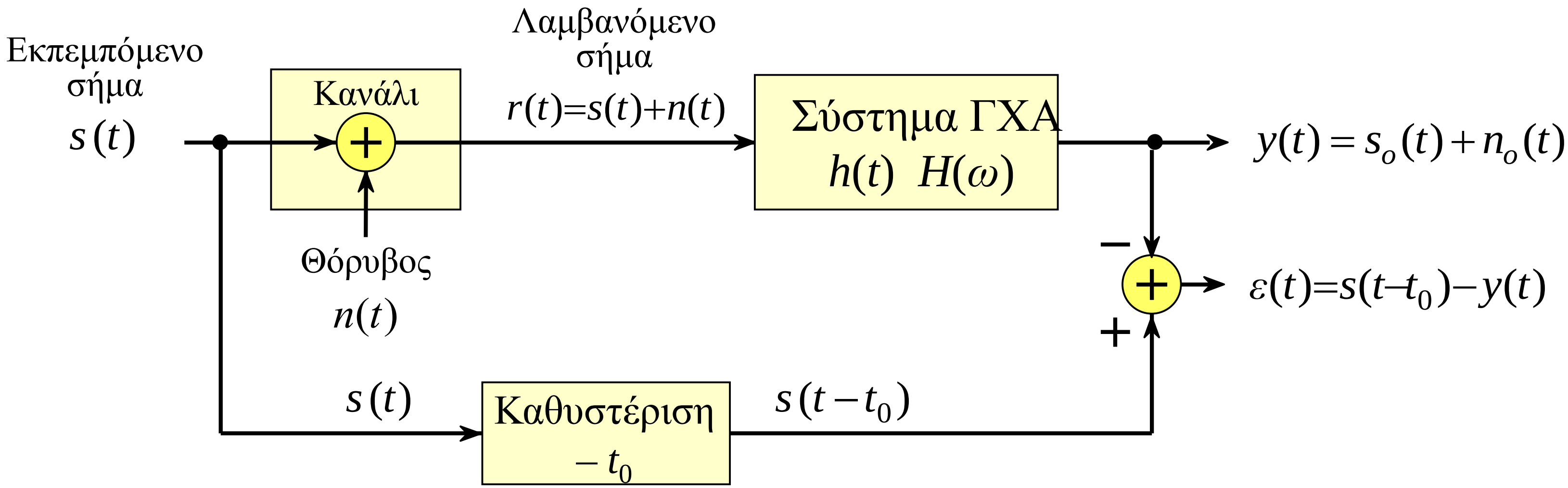
Βέλτιστα γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα

Συστήματα που ελαχιστοποιούν το μέσο-τετραγωνικό σφάλμα

Ο Wiener εξέτασε το προβλημα της εκτίμησης μίας επιθυμητής κυματομορφής σήματος $s(t)$ παρουσία προσθετικού θορύβου $n(t)$, βάση του λαμβανόμενου σήματος $r(t) = s(t) + n(t)$.

Ο Wiener προσδιόρισε το γραμμικό φίλτρο του οποίου η έξοδος είναι η βέλτιστη, κατά ***μέση-τετραγωνική τιμή***, προσέγγιση στο επιθυμητό σήμα $s(t)$.

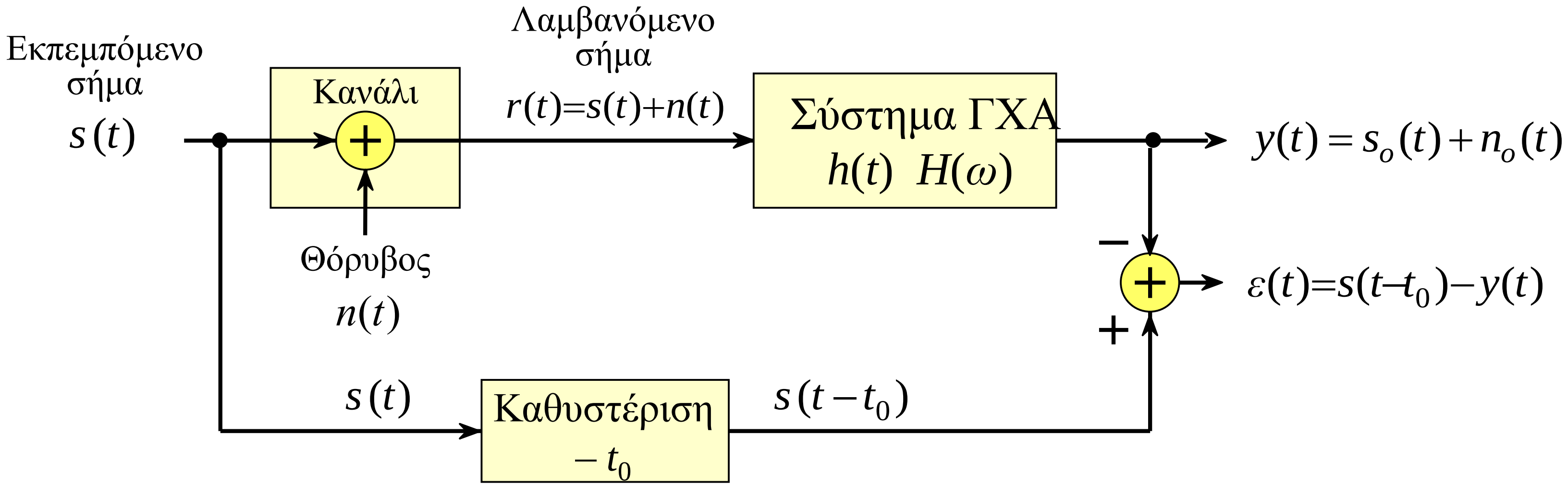
Το φίλτρο που προκύπτει καλείται ***βέλτιστο γραμμικό φίλτρο*** ή ***φίλτρο Wiener***.



Μοντέλο για τη λήψη σήματος μέσα από AWGN κανάλι – Φίλτρο Wiener.

Επιλέγουμε το φίλτρο $H(\omega)$ έτσι ώστε η έξοδός του $y(t)$ να είναι η καλύτερη δυνατή εκτίμηση του σήματος εισόδου τη χρονική στιγμή $t-t_0$, δηλαδή, του σήματος $s(t-t_0)$.

Επειδή το σήμα $s(t)$ αποτελεί δείγμα συνάρτησης τυχαίας διαδικασίας $S(t)$, είναι αδύνατο να υπολογίσουμε την τιμή του σήματος $s(t)$ σε κάποια χρονική στιγμή $t-t_0$ με απόλυτη ακρίβεια. Το μόνο που θα προσπαθούμε να κάνουμε είναι να προσδιορίζουμε το φίλτρο $H(\omega)$ το οποίο ελαχιστοποιεί μία κατάλληλα ορισμένη μέση τιμή του σφάλματος $\varepsilon(t)$.



Μοντέλο για τη λήψη σήματος μέσα από AWGN κανάλι – Φίλτρο Wiener.

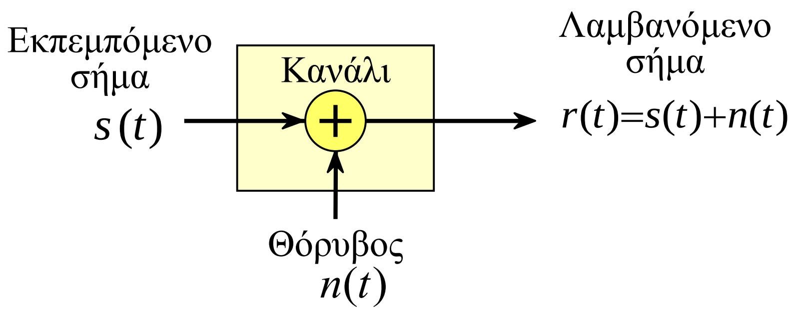
Ο Wiener προσδιόρισε το γραμμικό φίλτρο $H(\omega)$ του οποίου ελαχιστοποιεί τη μέση τιμή του τετραγωνικού σφάλματος $E[\mathcal{E}^2(t)]$.

$$E\left[\mathcal{E}^2(t)\right] = E\left[\ \{S(t-t_0) - Y(t)\}^2\ \right]$$

$$= E\left[S^2(t-t_0) - 2S(t-t_0)Y(t) + Y^2(t)\right]$$

$$= R_{SS}(0) - 2R_{YS}(t_0) + R_{YY}(0)$$

Περιγραφή του λαμβανόμενου σήματος στο πεδίο του χρόνου και συχνότητας



Επίσης το σήμα $r(t)$ αποτελεί δείγμα συνάρτησης τυχαίας διαδικασίας $R(t)$, της οποίας η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι

$$R_{RR}(\tau) = R_{SS}(\tau) + R_{NN}(\tau) + R_{SN}(\tau) + R_{NS}(\tau)$$

και η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας ισχύος είναι

$$S_{RR}(\omega) = S_{SS}(\omega) + S_{NN}(\omega) + 2\Re e\left[S_{SN}(\tau)\right]$$

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του Αθροίσματος Διαδικασιών

Δίνονται οι WSS τυχαίες διαδικασίες $X(t)$ και $Y(t)$ και ορίζεται η τυχαία διαδικασία

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $Z(t)$ είναι

$$R_{ZZ}(\tau) = R_{XX}(\tau) + R_{YY}(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau)$$

και η φασματική πυκνότητα ισχύος της $Z(t)$ είναι

$$S_Z(f) = S_X(f) + S_Y(f) + 2\Re e\left[S_{XY}(f)\right]$$

Αν οι δύο διαδικασίες είναι ασυσχέτιστες τότε $R_{XY}(\tau) = m_X \cdot m_Y$ και αν μία τουλάχιστον από τις διαδικασίες έχει μέση τιμή ίση με το μηδέν τότε

$$S_Z(f) = S_X(f) + S_Y(f)$$

Μελέτη του συστήματος στο πεδίο του χρόνου και συχνότητας

$$r(t)=s(t)+n(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{ΓΧΑ σύστημα}\\ h(t),\ H(\omega)\end{matrix}} \longrightarrow y(t)=s_o(t)+n_o(t)$$

$$y(t)=r(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\xi)\,h(t-\xi)\,d\xi$$

Για τη συνάρτηση διασυσχέτισης μεταξύ των διαδικασιών $Y(t)$ και $S(t)$ έχουμε

$$R_{YS}(t_0)=E\left[Y(t)\,S(t+t_0)\right]\;=E\left[S(t+t_0)\int_{-\infty}^{\infty}h(\xi)\,R(t-\xi)\,d\xi\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}E\left[S(t+t_0)R(t-\xi)\right]h(\xi)\;d\xi\;\;=\int_{-\infty}^{\infty}R_{RS}(t_0+\xi)\,h(\xi)\;d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{RS}(\omega)\,e^{j\omega(t_0+\xi)}\;d\omega\right]h(\xi)\;d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{RS}(\omega)\,e^{j\omega t_0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}h(\xi)\,e^{j\omega\xi}\;d\xi\right\}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{RS}(\omega)\,H(-\omega)\,e^{j\omega t_0}\;d\omega$$

Τυχαίες Διαδικασίες και Γραμμικά Συστήματα

$$X(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \qquad Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$$

Για τη συνάρτηση διασυσχέτισης εισόδου-εξόδου έχουμε

$$\begin{aligned}
R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1) Y(t_2)] &= E\left[X(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} X(s) h(t_2 - s)\, ds \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t_1) X(s)] h(t_2 - s)\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t_1 - s) h(t_2 - s)\, ds \\
&\overset{u = s - t_2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t_1 - t_2 - u) h(-u)\, du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau - u) h(-u)\, du
\end{aligned}$$

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση διασυσχέτισης εξαρτάται μόνο από το τ.

Η συνάρτηση διασυσχέτισης μεταξύ των διαδικασιών $S(t)$ και $Y(t)$ είναι

$$R_{SY}(t_1,t_2)=E[S(t_1)Y(t_2)]=E\left[S(t_1)\int_{-\infty}^{\infty}R(\xi)\,h(t_2-\xi)\,d\xi\right]$$

$$=E\left[S(t_1)\int_{-\infty}^{\infty}R(\xi)\,h(t_2-\xi)\,d\xi\right]=E\left[S(t_1)\int_{-\infty}^{\infty}\{S(\xi)+N(\xi)\}h(t_2-\xi)\,d\xi\right]$$

$$=E\left[S(t_1)\int_{-\infty}^{\infty}S(\xi)\,h(t_2-\xi)\,d\xi\right]+E\left[S(t_1)\int_{-\infty}^{\infty}N(\xi)\,h(t_2-\xi)\,d\xi\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}E[S(t_1)S(\xi)]h(t_2-\xi)\,d\xi+\int_{-\infty}^{\infty}E[S(t_1)N(\xi)]h(t_2-\xi)\,d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_{SS}(t_1-\xi)\,h(t_2-\xi)\,d\xi+\int_{-\infty}^{\infty}R_{SN}(t_1-\xi)\,h(t_2-\xi)\,d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_{SS}(t_1-\xi)\,h(t_2-\xi)\,d\xi+\int_{-\infty}^{\infty}R_{SN}(t_1-\xi)\,h(t_2-\xi)\,d\xi$$

$$\overset{u=\xi-t_2}{=}\int_{-\infty}^{\infty}R_{SS}(\tau-u)\,h(-u)\,du+\int_{-\infty}^{\infty}R_{SN}(\tau-u)\,h(-u)\,du$$

$$=R_{SS}(\tau)*h(-\tau)+R_{SN}(\tau)*h(-\tau)=R_{SY}(\tau)$$

$$R_{SY}(\tau) = R_{SS}(\tau) * h(-\tau) + R_{SN}(\tau) * h(-\tau)$$

και συνάρτηση διαφασματικής πυκνότητας ισχύος είναι

$$S_{SY}(\omega) = S_{SS}(\omega) \cdot H^*(\omega) + S_{SN}(\omega) \cdot H^*(\omega)$$

$$r(t) = s(t) + n(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{ΓΧΑ σύστημα}\\ h(t),\ \ H(\omega)\end{array}} \longrightarrow y(t) = s_o(t) + n_o(t)$$

$$y(t) = r(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi)\, h(t-\xi)\, d\xi$$

Για τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος εισόδου $s(t)$ έχουμε

$$R_{SS}(\tau) = F^{-1}\left[S_{SS}(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{SS}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

Η τιμή της $R_{SS}(\tau)$ για $\tau = 0$, δηλαδή, η ισχύς του σήματος $s(t)$ έχουμε

$$R_{SS}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{SS}(\omega)\, d\omega$$

Για τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος εξόδου $y(t)$ έχουμε

$$R_{YY}(\tau) = F^{-1}\left[S_{YY}(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{RR}(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 e^{j\omega t}\, d\omega$$

Η τιμή της $R_{YY}(\tau)$ για $\tau = 0$, δηλαδή, η ισχύς του σήματος $y(t)$ έχουμε

$$R_{YY}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{RR}(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 d\omega$$

Ο Wiener προσδιόρισε το γραμμικό φίλτρο $H(\omega)$ του οποίου ελαχιστοποιεί τη μέση τιμή του τετραγωνικού σφάλματος $E[\mathcal{E}^2(t)]$.

$$E\left[\mathcal{E}^2(t)\right] = E\left[\left\{S(t-t_0) - Y(t)\right\}^2\right] = R_{SS}(0) - 2R_{YS}(t_0) + R_{YY}(0)$$

όπου

$$R_{SS}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{SS}(\omega)\,d\omega$$

$$R_{YY}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{RR}(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 d\omega$$

$$R_{YS}(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{RS}(\omega)\,H(-\omega)\,e^{j\omega t_0}\,d\omega$$

Η μέση τιμή του τετραγωνικού σφάλματος γράφεται

$$E\left[\mathcal{E}^2(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{S_{SS}(\omega) - 2S_{RS}(\omega)H(-\omega)\,e^{j\omega t_0} + S_{RR}(\omega)\left|H(\omega)\right|^2\right\}d\omega$$

$$E\left[\varepsilon^2(t)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{S_{SS}(\omega)-2S_{RS}(\omega)H(-\omega)e^{j\omega t_0}+S_{RR}(\omega)\left|H(\omega)\right|^2\right\}d\omega$$

Το ακρότατο της $E[\varepsilon^2(t)]$ προσδιορίζεται αν η παράγωγός ως προς τη απόκριση συχνότητας τεθεί ίση με μηδέν, δηλαδή,

$$\frac{E\left[\varepsilon^2(t)\right]}{dH(\omega)}=0$$

Αν χρησιμοποιηθεί ο κανόνας του Leibnitz

$$\frac{d}{dx}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy=\int_{y_1}^{y_2}\frac{\vartheta}{\vartheta x}f(x,y)\,dy$$

αποδεικνύεται ότι το βέλτιστο φίλτρο έχει απόκριση συχνότητας

$$H_{\beta\varepsilon\lambda\tau.}(\omega)=\frac{S_{RS}(\omega)}{S_{RR}(\omega)}e^{j\omega t_0}$$

Για την περίπτωση όπου το σήμα και ο θόρυβος είναι ασυσχέτιστες τυχαίες διαδικασίες έχουμε δείξει ισχύει

$$S_{RR}(\omega) = S_{SS}(\omega) + S_{NN}(\omega)$$

επίσης ισχύει

$$S_{RS}(\omega) = S_{SS}(\omega)$$

πράγματι

$$\begin{aligned} R_{RS}(t, t+\tau) &= E[R(t) \cdot S(t+\tau)] \\ &= E[(S(t) + N(t)) \cdot S(t+\tau)] \\ &= E[S(t) \cdot S(t+\tau)] + E[N(t) \cdot S(t+\tau)] \\ &= R_{SS}(\tau) + E[N(t)]E[S(t+\tau)] \end{aligned}$$

και επειδή $E[N(t)] = 0$ έχουμε

$$R_{RS}(\tau) = R_{SS}(\tau)$$

Επομένως το βέλτιστο φίλτρο έχει απόκριση συχνότητας

$$H_{\beta\varepsilon\lambda\tau.}(\omega) = \frac{S_{RS}(\omega)}{S_{RR}(\omega)} e^{j\omega t_0} \Rightarrow \quad \boxed{H_{\beta\varepsilon\lambda\tau.}(\omega) = \frac{S_{SS}(\omega)}{S_{SS}(\omega) + S_{NN}(\omega)} e^{j\omega t_0}}$$

Έχουμε δείξει ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι

$$E\left[\varepsilon^2(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{S_{SS}(\omega) - 2S_{RS}(\omega)H(-\omega)e^{j\omega t_0} + S_{RR}(\omega)\left|H(\omega)\right|^2\right\}d\omega$$

και ότι η απόκριση συχνότητας του βέλτιστου φίλτρου είναι

$$H_{\beta\varepsilon\lambda\tau.}(\omega) = \frac{S_{RS}(\omega)}{S_{RR}(\omega)}e^{j\omega t_0}$$

Το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα το οποίο επιτυγχάνεται με το $H_{\beta\varepsilon\lambda\tau.}(\omega)$ είναι

$$E\left[\varepsilon^2(t)\right]_{\min} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{S_{SS}(\omega) - 2S_{RS}(\omega)\frac{S_{RS}^*(\omega)}{S_{RR}(\omega)}e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t_0} + S_{RR}(\omega)\frac{\left|S_{RS}(\omega)\right|^2}{S_{RR}^2(\omega)}\right\}d\omega$$

τελικά

$$E\left[\varepsilon^2(t)\right]_{\min} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{SS}(\omega)\cdot S_{RR}(\omega) - \left|S_{RS}(\omega)\right|^2}{S_{RR}(\omega)}d\omega$$

Για την περίπτωση όπου το σήμα και ο θόρυβος είναι ασυσχέτιστες τυχαίες διαδικασίες έχουμε

$$E\left[\varepsilon^2(t)\right]_{\min} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{SS}(\omega)\cdot S_{NN}(\omega)}{S_{SS}(\omega) + S_{NN}(\omega)}d\omega$$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση διαθέσιμη εδώ.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Σεραφείμ Καραμπογιάς 2015. Σεραφείμ Καραμπογιάς. «Επεξεργασία στοχαστικών σημάτων. Βέλτιστα γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα.». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI23.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.