



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

# Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Ψηφιακή Μετάδοση Αναλογικών Σημάτων

Σεραφείμ Καραμπογιάς

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

## Ψηφιακή Μετάδοση Αναλογικών Σημάτων

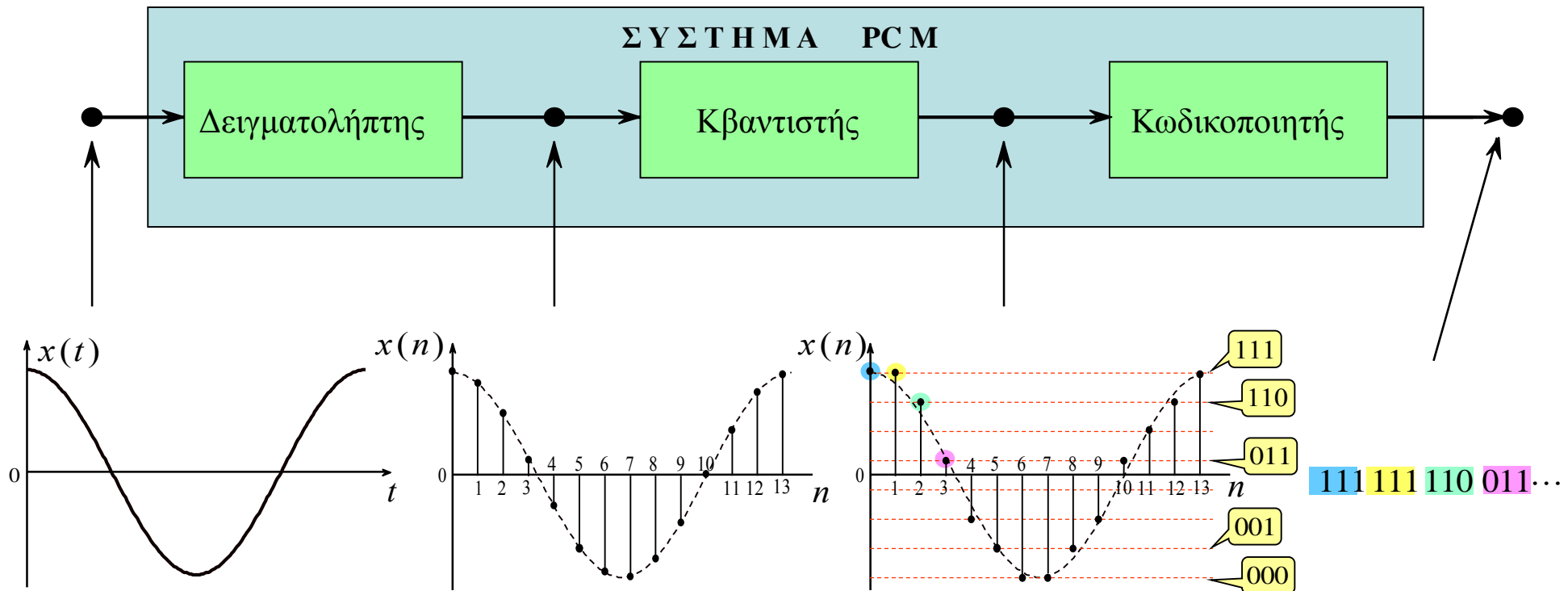
Τα σύγχρονα συστήματα επικοινωνίας σε πολύ μεγάλο ποσοστό διαχειρίζονται σήματα ψηφιακής μορφής, δηλαδή, σήματα που δημιουργούνται από ακολουθίες δυαδικών ψηφίων.

Τα περισσότερα σήματα στην πράξη είναι αναλογικά. Η μετάδοση των σημάτων αυτών σε ψηφιακή μορφή απαιτεί τα αναλογικά αυτά σήματα να μετατραπούν σε ψηφιακά.

Η διαδικασία της μετατροπής αναλογικών σημάτων σε ψηφιακά ονομάζεται *αναλογική σε ψηφιακή μετατροπή* (*A/D analog to digital conversion*) ή *κωδικοποίησης κυματομορφής*. Υπάρχουν δύο βασικές τεχνικές κωδικοποίησης κυματομορφής, παλμοκωδική διαμόρφωση και η διαμόρφωση δέλτα.

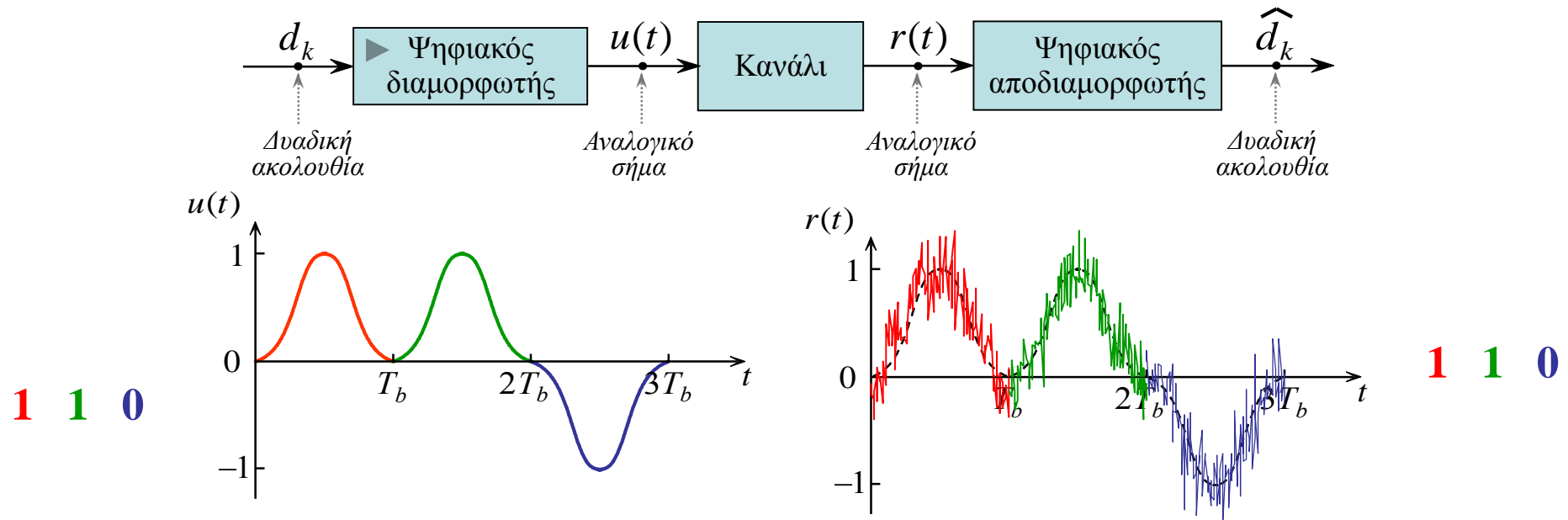
## Παλμοκωδική Διαμόρφωση (PCM)

Η Παλμοκωδική διαμόρφωση (*Pulse Code Modulation (PCM)*) είναι το απλούστερο σχήμα κωδικοποίησης κυματομορφής. Ένας παλμοκωδικός διαμορφωτής παλμών αποτελείται από τρία βασικά μέρη: ένα *δειγματολήπτη*, έναν *κβαντιστή* και ένα *κωδικοποιητή*.



## Ψηφιακός Διαμορφωτής - Αποδιαμορφωτής

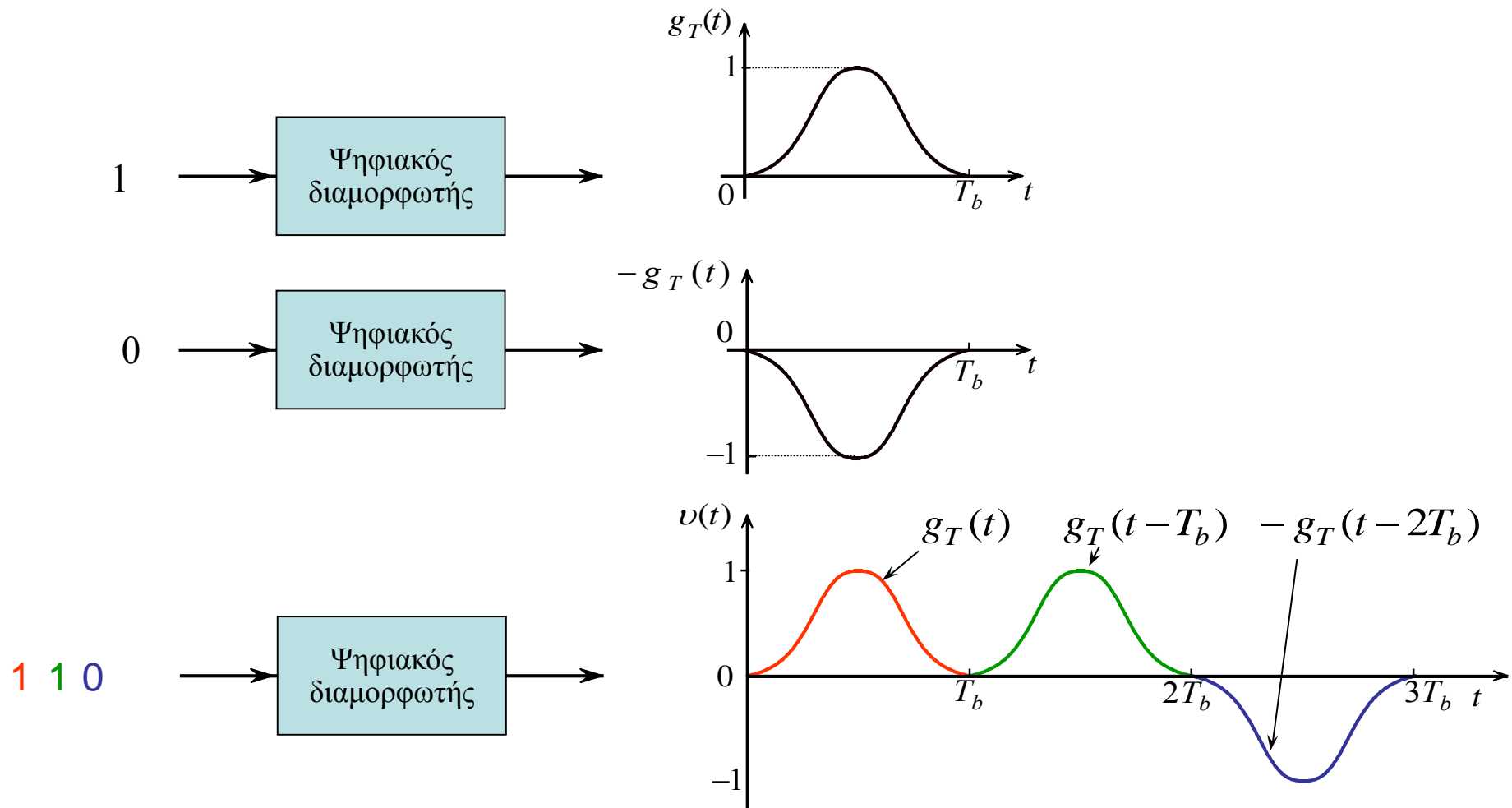
Επειδή σχεδόν όλα τα κανάλια επικοινωνίας που συναντάμε στην πράξη είναι ικανά να μεταδίδουν ηλεκτρικά σήματα (κυματομορφές).



Ο πρωταρχικός ρόλος του **ψηφιακού διαμορφωτή** είναι να απεικονίζει τις δυαδικές ακολουθίες σε κυματομορφές σήματος. Ο ψηφιακός διαμορφωτής μπορεί απλώς να απεικονίζει το δυαδικό ψηφίο 0 στην κυματομορφή  $s_0(t)$  και το δυαδικό ψηφίο 1 στην κυματομορφή  $s_1(t)$ .

Στο άλλο άκρο της λήψης ενός ψηφιακού συστήματος επικοινωνίας, ο **ψηφιακός αποδιαμορφωτής** επεξεργάζεται τις αλλοιωμένες από το κανάλι διαβιβασμένες κυματομορφές και εκτιμά το διαβιβασμένο δυαδικό ψηφίο.

# Διαμόρφωσης Παλμών κατά Πλάτος (*Pulse Amplitude Modulation (PAM)*)



$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g_T(t - kT) \quad \text{όπου } a_k = \begin{cases} 1, & \text{εκπομπή του 1} \\ -1, & \text{εκπομπή του 0} \end{cases}$$

Το ισοδύναμο χαμηλοπερατό σήμα (βασικής ζώνης) γράφεται γενικά ως

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT)$$

όπου  $a_n$  είναι η ακολουθία τιμών και αντιστοιχούν στα σύμβολα πληροφορίας της πηγής, και  $g_T(t)$  είναι κατάλληλα επιλεγμένος παλμός.

Επειδή η ακολουθία πληροφορίας  $\{a_n\}$  είναι τυχαία, η  $v(t)$  είναι μία συνάρτηση δείγμα μίας τυχαίας διαδικασίας  $V(t)$

$$V(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A g_T(t - nT)$$

όπου  $A$  είναι τυχαία ακολουθία με τιμές  $a_1, a_2, \dots, a_M$  σε ένα μιαιδικό σύστημα. Η μέση τιμή της τυχαίας διαδικασίας,  $V(t)$  είναι

$$\begin{aligned} E[V(t)] &= E \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[A] g_T(t - nT) \\ &= m_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_T(t - nT) \end{aligned}$$

Όπου  $m_A = \sum_k a_k P(a_k)$  η μέση τιμή της τυχαίας ακολουθίας  $A$ . Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή της είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο  $T$ .

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της τυχαίας διαδικασίας,  $V(t)$  είναι

$$R_V(t, t + \tau) = E[V(t)V(t + \tau)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E[a_n \cdot a_m] g_T(t - nT) g_T(t + \tau - mT)$$

Εγγένει, υποθέτουμε ότι η ακολουθία πληροφορίας  $\{a_n\}$  είναι στατική υπό την ευρεία έννοια με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $R_A(n) = E[a_m a_{n+m}]$  επομένως

$$\begin{aligned} R_V(t, t + \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_A(m - n) g_T(t - nT) g_T(t + \tau - mT) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_A(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_T(t - nT) g_T(t + \tau - nT - mT) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι περιοδική συνάρτηση.

$$R_V(t + T, t + T + \tau) = R_V(t, t + \tau)$$

επομένως η τυχαία διαδικασία  $V(t)$  είναι κυκλοστατική.

$$5 \quad A[R_{XX}(t, t + \tau)] \xleftrightarrow{F} S_{XX}(f)$$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος,  $S_V(f)$ , της κυκλοστατικής τυχαίας διαδικασίας,  $V(t)$ , προσδιορίζεται αφού πρώτα βρεθεί η χρονική μέση τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης  $R_V(t + \tau, t)$ , για μία περίοδο  $T$ , και στη συνέχεια υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της μέσης χρονικής τιμής της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.

Η χρονική μέση τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης είναι

$$\begin{aligned} \bar{R}_V(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_V(t + \tau, t) dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g_T(t - nT) g_T(t + \tau - nT - mT) dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{nT+T/2}^{nT+T/2+T} g_T(t) g_T(t + \tau - mT) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) \int_{-\infty}^{\infty} g_T(t) g_T(t + \tau - mT) dt \end{aligned}$$

τελικά

$$\bar{R}_V(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) R_g(\tau - mT)$$



Ο μετασχηματισμός Fourier της χρονικής μέσης τιμής της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, δηλαδή, η φασματική πυκνότητα ισχύος του μεταδιδόμενου σήματος είναι

$$\begin{aligned} S_V(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_V(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\tau - mT) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi fmT} \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\xi) e^{-j2\pi f\xi} d\xi \end{aligned}$$

Αν  $S_a(f)$  είναι η φασματική πυκνότητα ισχύος της ακολουθίας πληροφορίας  $\{a_n\}$ , δηλαδή, ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της ακολουθίας πληροφορίας.

$$S_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi fmT} \quad R_a(m) = T \int_{-1/2T}^{1/2T} S_a(f) e^{-j2\pi fmT} df$$

και  $|G_T(f)|^2$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της  $g_T(t)$ . Επίσης  $G_T(f)$  είναι η απόκριση συχνότητας του φίλτρου εκπομπής έχουμε

$$S_V(f) = \frac{1}{T} S_a(f) |G_T(f)|^2$$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος,  $S_V(f)$ , της κυκλοστατικής τυχαίας διαδικασίας,  $V(t)$  είναι λοιπόν

$$S_V(f) = \frac{1}{T} S_a(f) |G_T(f)|^2$$

Για να ελέγξουμε τη μορφή της φασματικής πυκνότητας του μεταδιδόμενου σήματος πρέπει να σχεδιασθούν κατάλληλα τα φασματικά χαρακτηριστικά του φίλτρου εκπομπής,  $|G_T(f)|^2$ , και τα φασματικά χαρακτηριστικά της ακολουθίας πληροφορίας  $\{a_n\}$ ,  $S_a(f)$ .

Αν τα σύμβολα πληροφορίας στην ακολουθία  $\{a_n\}$  είναι αμοιβαία ασυσχέτιστα τότε

$$R_a(m) = \begin{cases} \sigma_a^2 + m_a^2, & m = 0 \\ m_a^2, & m \neq 0 \end{cases}$$

όπου  $\sigma_a^2 = E[a^2] - m_a^2$  είναι η διακύμανση των συμβόλων πληροφορίας.

$$S_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi f m T}$$

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + m_a^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f m T}$$

Το περιοδικό σήμα  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_s)$  αναπτύσσεται σε σειρά Fourier

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\frac{2\pi}{T_s}t} \quad \xrightarrow{t \rightarrow f, T_s = \frac{1}{T}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm2\pi Tf}$$

Επομένως η φασματική πυκνότητα μπορεί να εκφραστεί ως

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + m_a^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f mT} \quad S_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{m_a^2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος του μεταδιδόμενου σήματος  $v(t)$  όταν η ακολουθία συμβόλων πληροφορίας είναι ασυσχέτιστη είναι

$$S_V(f) = \frac{1}{T} S_a(f) |G_T(f)|^2 = \underbrace{\frac{\sigma_a^2}{T} |G_T(f)|^2}_{\text{Συνεχές τμήμα του φάσματος}} + \underbrace{\frac{m_a^2}{T^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |G_T\left(\frac{m}{T}\right)|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)}_{\text{Διακριτό τμήμα του φάσματος}}$$

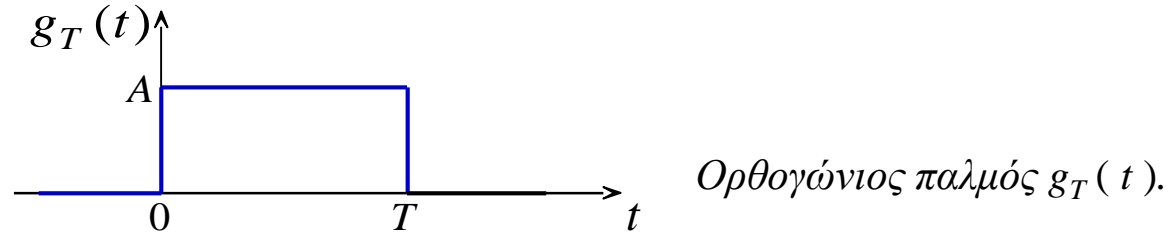
Συνεχές τμήμα του φάσματος

Διακριτό τμήμα του φάσματος

Αν η μέση τιμή  $m_a = 0$ , η φασματική πυκνότητα είναι

$$S_V(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |G_T(f)|^2$$

Όταν το  $g_T(t)$  είναι ο ορθογώνιος παλμός του σχήματος

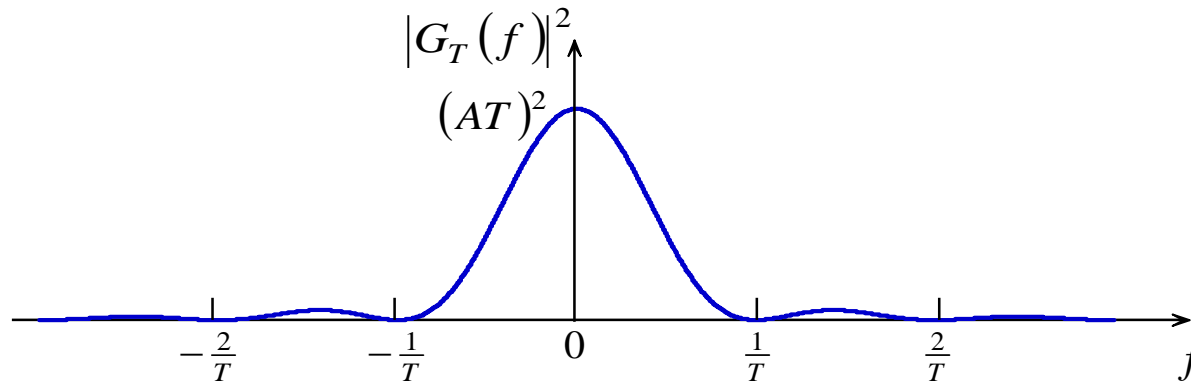


Ο μετασχηματισμός Fourier είναι

$$G_T(f) = AT \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} e^{-j\pi f T}$$

και η φασματική πυκνότητα ενέργειας είναι

$$|G_T(f)|^2 = (AT)^2 \frac{(\sin(\pi f T))^2}{(\pi f T)^2} = (AT)^2 \text{sinc}^2(f T)$$



Φασματική πυκνότητα ενέργειας  $|G_T(f)|^2$  του  $g_T(t)$ .

Δίνεται η δυαδική ακολουθία  $\{b_n\}$  που αποτελείται από ασυσχέτιστες δυαδικές ( $\pm 1$ ) τυχαίες μεταβλητές μηδενικής μέσης τιμής και μοναδιαίας διακύμανσης.

Δημιουργούμε τα σύμβολα  $a_n = b_n + b_{n-1}$  τα οποία και μεταδίδουμε. Να καθοριστεί η φασματική πυκνότητα ισχύος του διαμορφωμένου σήματος.

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της ακολουθίας  $\{a_n\}$  είναι

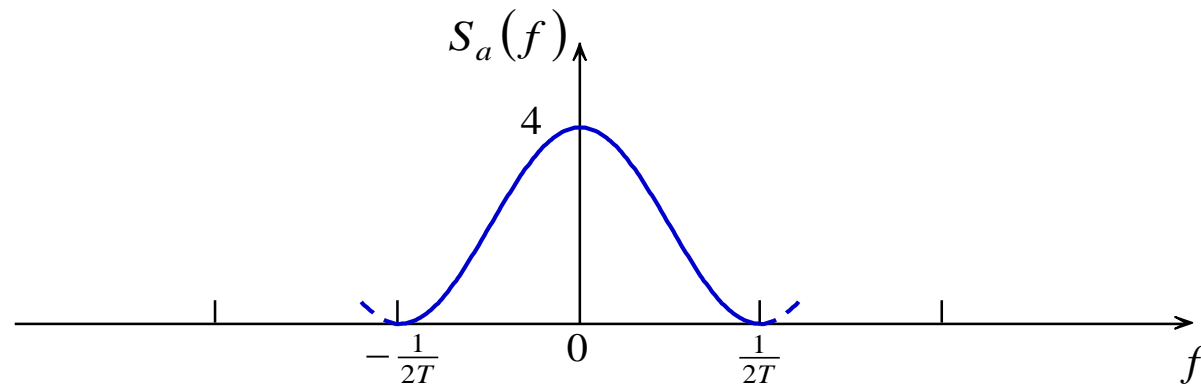
$$R_a(m) = E[a_n a_{n+m}] = E[(b_n + b_{n-1})(b_{n+m} + b_{n+m-1})] = \begin{cases} 2, & m = 0 \\ 1, & m = \pm 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος εισόδου είναι

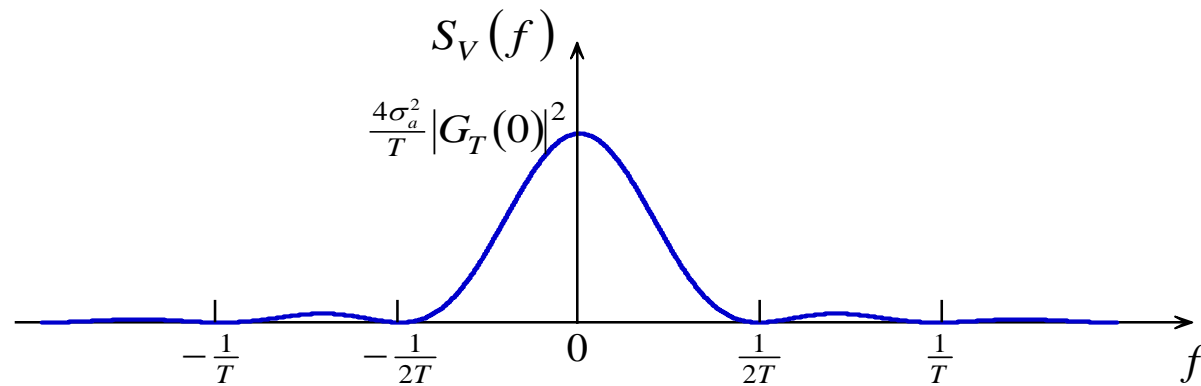
$$S_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi f m T} = 2(1 + \cos(2\pi f T)) = 4 \cos^2(2\pi f T)$$

και η αντίστοιχη φασματική πυκνότητα ισχύος του διαμορφωμένου σήματος είναι

$$S_V(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |G_T(f)|^2 = \frac{4\sigma_a^2}{T} |G_T(f)|^2 \cos^2(\pi f T)$$



*Φασματική πυκνότητα ισχύος της ακολουθίας πληροφορίας.*

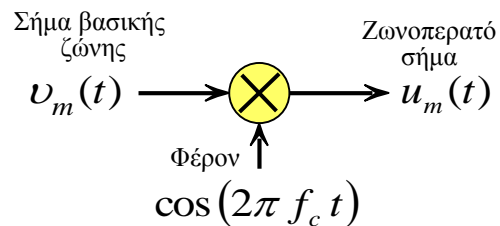


*Φασματική πυκνότητα ισχύος του αντίστοιχου διαμορφωμένου σήματος.*

## Το Φάσμα Ισχύος ενός Σήματος Διαμορφωμένου Φέροντος

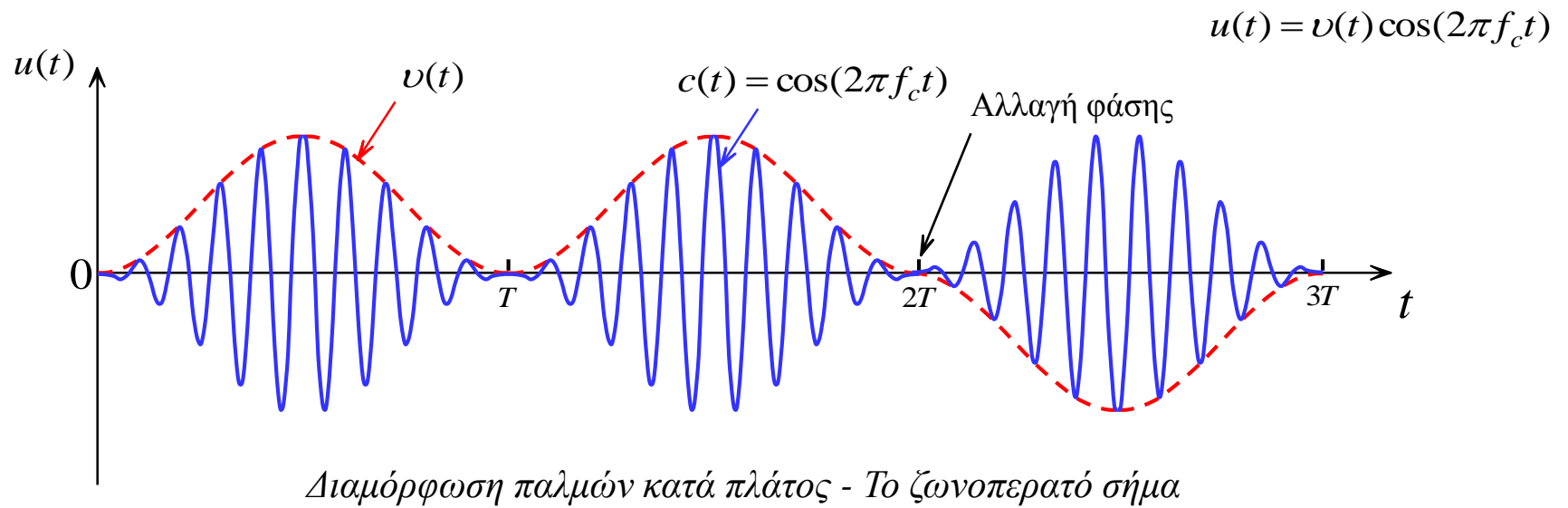
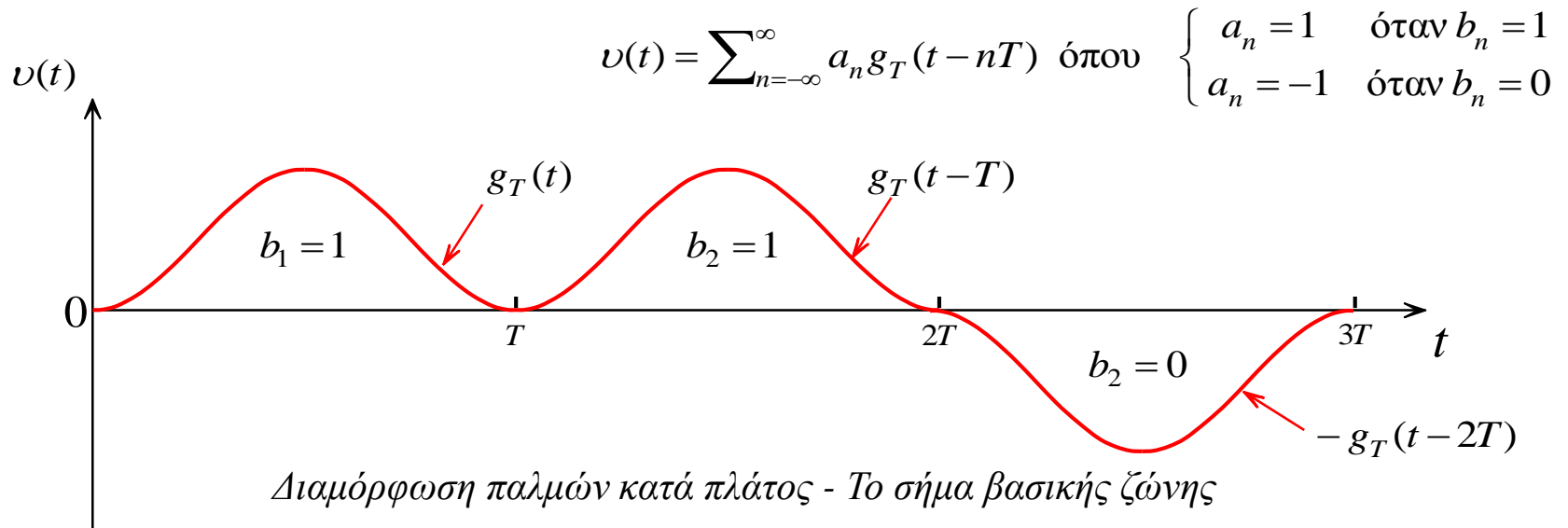
Αν  $v(t)$  είναι το σήμα βασικής ζώνης ενός ψηφιακά διαμορφωμένου σήματος, το αντίστοιχο ζωνοπερατό σήμα είναι

$$u(t) = v(t) \cos(2\pi f_c t)$$



*Διαμόρφωση κατά πλάτος ενός ημιτονοειδούς φέροντος από σήμα βασικής-ζώνης.*

## Περιγραφή στο χρονικό πεδίο





## Το Φάσμα Ισχύος ενός Σήματος Διαμορφωμένου Φέροντος

Αν  $v(t)$  είναι το σήμα βασικής ζώνης ενός ψηφιακά διαμορφωμένου σήματος, το αντίστοιχο ζωνοπερατό σήμα είναι  $u(t) = v(t) \cos(2\pi f_c t)$  και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της τυχαίας διαδικασίας  $U(t) = V(t) \cos(2\pi f_c t)$  είναι

$$\begin{aligned} R_U(t, t + \tau) &= E[U(t)U(t + \tau)] \\ &= E[V(t)V(t + \tau)] \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c (t + \tau)) \\ &= \frac{1}{2} R_V(t + \tau, t) [\cos(2\pi f_c \tau) + \cos(2\pi f_c (2t + \tau))] \end{aligned}$$

Η μέση τιμή του  $R_U(t, t + \tau)$  για μία περίοδο διάρκειας  $T$  δίνει

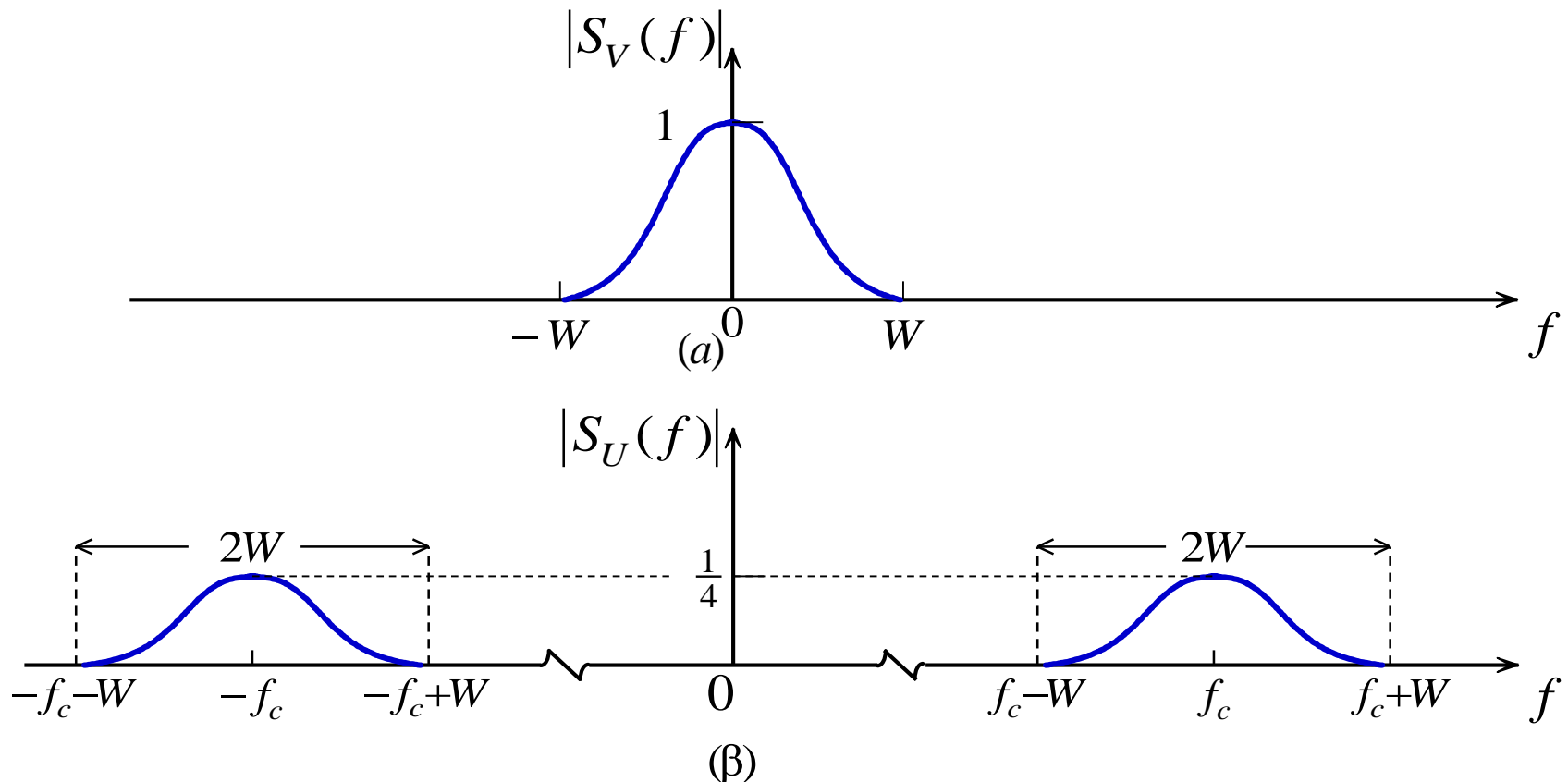
$$\bar{R}_U(\tau) = \frac{1}{2} \bar{R}_V(\tau) \cos(2\pi f_c \tau)$$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος του ζωνοπερατού σήματος είναι

$$S_U(f) = F \{ \bar{R}_U(\tau) \} = \frac{1}{4} [S_V(f - f_c) + S_V(f + f_c)]$$

Η διαμόρφωση κατά πλάτος του φέροντος από τις κυματομορφές βασικής ζώνης ολισθαίνει το φάσμα του σήματος βασικής ζώνης κατά  $f_c$

$$S_U(f) = F[\bar{R}_U(\tau)] = \frac{1}{4} [S_V(f - f_c) + S_V(f + f_c)]$$

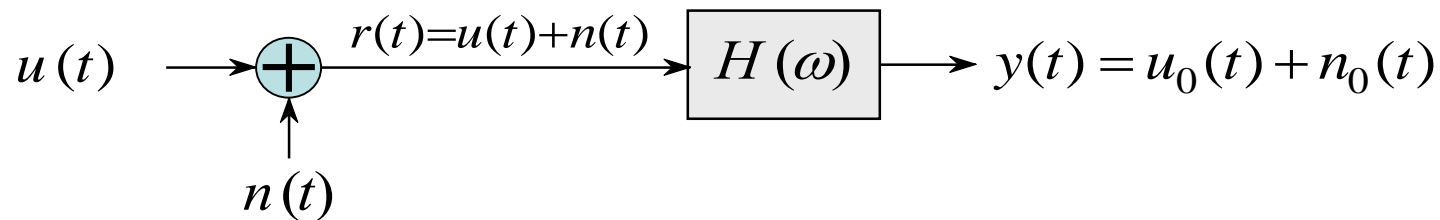


Φάσματα σημάτων (α) βασικής ζώνης και (β) διαμορφωμένου κατά πλάτος.

## Βέλτιστα γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα

### Συστήματα που μεγιστοποιούν το λόγο σήμα προς θόρυβο

Σε ένα σύστημα επικοινωνίας, κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος  $T_b$ , ένα σήμα γνωστής μορφής  $g_T(t)$  φτάνει στο δέκτη. Το σήμα αυτό έχει μολυνθεί από θόρυβο, γνωστής φασματικής πυκνότητας ισχύος  $S_{NN}(\omega)$ .



Τα προσαρμοστικά φίλτρα χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση των παλμών αυτών.

Επιδιώκεται η μεγιστοποίηση του λόγου  $S_0/N_0$  τη στιγμή  $t_0$  “**στιγμή απόφασης**”

$$\frac{S_0}{N_0} = \frac{[u_0(t)]^2}{E[N_0^2(t)]}$$

$$u(t) \rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow u_0(t) = u(t) * h(t)$$

$$U(\omega) \qquad U_0(\omega) = U(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$n(t) \rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow n_0(t) = n(t) * h(t)$$

$$S_N(\omega) \qquad S_{N_0}(\omega) = S_N(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$$

Το σήμα μηνύματος στην έξοδο του φίλτρου είναι

$$u_0(t) = F^{-1}[U_0(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

και η μέση ισχύς του θορύβου στην έξοδο του φίλτρου είναι

$$N_0 = E[N_0^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_N(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega$$

έτσι ο λόγος σήμα προς θόρυβο  $\left(\frac{S_0}{N_0}\right)$  τη στιγμή λήψης της απόφασης  $t_0$ , γράφεται

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right)_{t=t_0} = \frac{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) H(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega\right]^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_N(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega}$$

Το *εσωτερικό γινόμενο* δύο σημάτων ορίζεται ως

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$$

Το *μέτρο ή norm* ενός σήματος ισούται με το εσωτερικό γινόμενο του σήματος με τον εαυτό του.

$$\|x(t)\| = \langle x(t), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

## Ανισότητα του Schwarz

$$|\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle|^2 \leq \|\alpha(t)\| \cdot \|\beta(t)\|$$

ή

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) \beta^*(t) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\beta(t)|^2 dt$$

επίσης ισχύει

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) B^*(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 d\omega$$

Η *ισότητα ισχύει* όταν  $A(\omega) = c B^*(\omega)$

ο λόγος σήμα προς θόρυβο

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right)_{t=t_0} = \frac{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) H(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega\right]^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_N(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega}$$

μπορεί να γραφεί ως

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right)_{t=t_0} = \frac{\left|\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{S_N(\omega)} H(\omega) \frac{U(\omega) e^{j\omega t_0}}{\sqrt{S_N(\omega)}} d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_N(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega}$$

αν θεωρήσουμε

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right)_{t=t_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} \overset{A(\omega)}{\sqrt{S_N(\omega)} H(\omega)} \frac{\overset{B(\omega)}{U(\omega) e^{j\omega t_0}}}{\sqrt{S_N(\omega)}} d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_N(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega}$$

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right)_{t=t_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{S_N(\omega)} H(\omega) \frac{U(\omega) e^{j\omega t_0}}{\sqrt{S_N(\omega)}} d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_N(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega}$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) B^*(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 d\omega$$

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right)_{t=t_0} \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_N(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|U(\omega)|^2}{S_N(\omega)} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_N(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega}$$

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right)_{t=t_0} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|U(\omega)|^2}{S_N(\omega)} d\omega$$

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right)_{t=t_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{S_N(\omega)} H(\omega) \frac{U(\omega) e^{j\omega t_0}}{\sqrt{S_N(\omega)}} d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_N(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega}$$

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right)_{t=t_0} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|U(\omega)|^2}{S_N(\omega)} d\omega$$

η μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται όταν  $A(\omega) = C B^*(\omega)$ , δηλαδή,

$$\sqrt{S_N(\omega)} H_{\text{βέλτ}}(\omega) = C \frac{U^*(\omega) e^{-j\omega t_0}}{2\pi \sqrt{S_N(\omega)}}$$

ή

$$H_{\text{βέλτ}}(\omega) = C \frac{1}{2\pi} \frac{U^*(\omega)}{S_N(\omega)} e^{-j\omega t_0}$$



$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right)_{t=t_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{S_N(\omega)} H(\omega) \frac{U(\omega) e^{j\omega t_0}}{\sqrt{S_N(\omega)}} d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_N(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega}$$

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right)_{t=t_0} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|U(\omega)|^2}{S_N(\omega)} d\omega$$

η μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται όταν  $A(\omega) = C B^*(\omega)$ , δηλαδή,

$$\sqrt{S_N(\omega)} H_{\beta\epsilon\lambda\tau}(\omega) = C \frac{U^*(\omega) e^{-j\omega t_0}}{2\pi \sqrt{S_N(\omega)}}$$

ή

$$H_{\beta\epsilon\lambda\tau}(\omega) = C \frac{1}{2\pi} \frac{U^*(\omega)}{S_N(\omega)} e^{-j\omega t_0}$$

Γενικά αν το σήμα είναι  $x(t)$  και ο θόρυβος έχει φασματική πυκνότητα ισχύος  $S_N(\omega)$  τότε η απόκριση συχνότητας του προσαρμοσμένου φίλτρου στο σήμα  $x(t)$  είναι

$$H_{\beta\epsilon\lambda\tau}(\omega) = C \frac{1}{2\pi} \frac{X^*(\omega)}{S_N(\omega)} e^{-j\omega t_0}$$

Για την περίπτωση λευκού θορύβου έχουμε  $S_N(\omega) = N_0/2$  οπότε

$$H_{\beta\epsilon\lambda\tau}(\omega) = k X^*(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

Γνωρίζουμε ότι  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$  τότε είναι

$$x^*(-t) \xleftrightarrow{F} X^*(\omega)$$

και

$$x^*(t_0 - t) \xleftrightarrow{F} X^*(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

έτσι η κρουστική απόκριση του προσαρμοσμένου φίλτρου στο σήμα  $x(t)$  παρουσία προσθετικού λευκού Gaussian θορύβου είναι

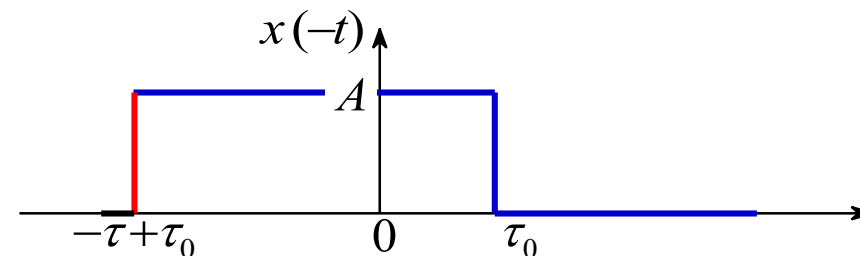
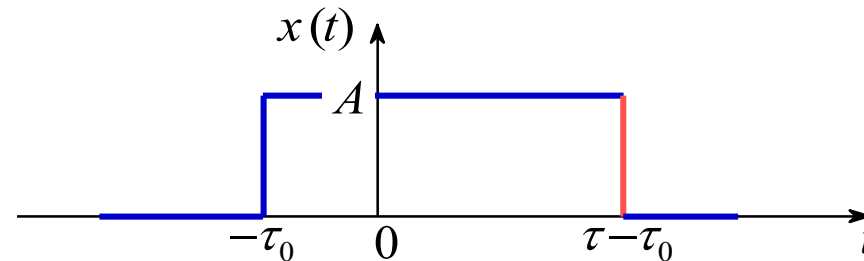
$$h_{\beta\epsilon\lambda\tau}(t) = k x^*(t_0 - t)$$

Η κρουστική απόκριση του προσαρμοσμένου φίλτρου στο πραγματικό σήμα  $x(t)$  παρουσία προσθετικού λευκού Gaussian θορύβου είναι

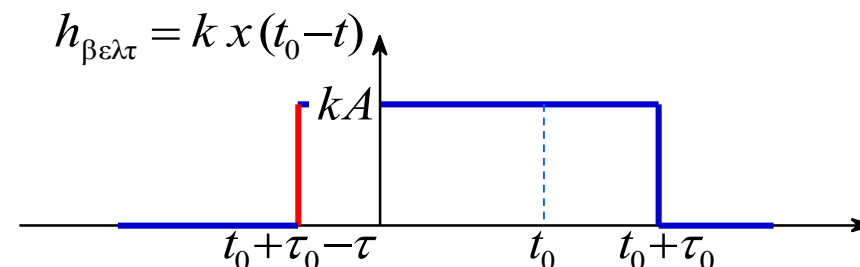
$$h_{\beta\epsilon\lambda\tau}(t) = k x(t_0 - t)$$

**Εφαρμογή:** Να βρεθεί το προσαρμοσμένο φίλτρο για το σήμα  $x(t)$  παρουσία προσθετικού λευκού Gaussian θορύβου

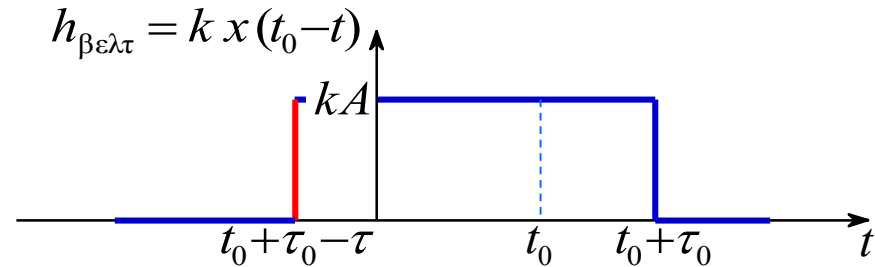
$$x(t) = A \cdot \Pi \left[ \frac{t - (\tau_0 - \frac{\tau}{2})}{\tau} \right]$$



$$h_{\beta\epsilon\lambda\tau}(t) = k A \Pi \left[ \frac{t - t_0 + (\tau_0 - \frac{\tau}{2})}{\tau} \right]$$



$$h_{\beta\epsilon\lambda\tau}(t) = k A \Pi \left[ \frac{t - t_0 + (\tau_0 - \frac{\tau}{2})}{\tau} \right]$$



Γνωρίζουμε ότι

$$\Pi \left( \frac{t}{2T_1} \right) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \xleftrightarrow{F} 2 T_1 \operatorname{sinc} \left( \frac{\omega T_1}{\pi} \right) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}$$

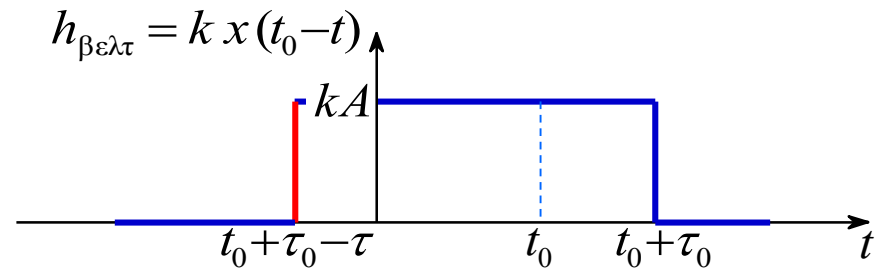
και αν  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$  τότε είναι

$$x(t_0 - t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

Έτσι η απόκριση συχνότητας του βέλτιστου φίλτρου είναι

$$H_{\beta\epsilon\lambda\tau}(\omega) = k A \tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} e^{-j\omega(t_0 + \tau_0 - \frac{\tau}{2})}$$

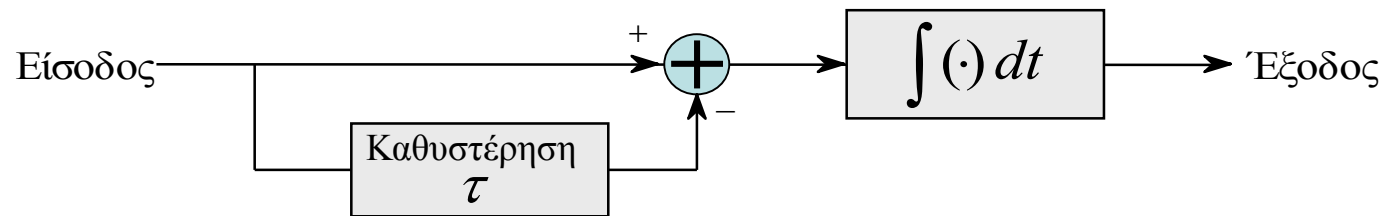
$$h_{\beta\epsilon\lambda\tau}(t) = k A \Pi \left[ \frac{t - t_0 + (\tau_0 - \frac{\tau}{2})}{\tau} \right]$$



Για να είναι το φίλτρο αιτιατό πρέπει

$$t_0 - \tau + \tau_0 \geq 0 \quad \text{ή} \quad t_0 \geq \tau - \tau_0$$

Το διάγραμμα του συστήματος το οποίο υλοποιεί το φίλτρο είναι



Αν  $y(t)$  είναι η έξοδος του προσαρμοσμένου φίλτρου στο σήμα  $x(t)$  και ο θόρυβος έχει φασματική πυκνότητα ισχύος  $S_N(\omega)$  να βρεθεί ο λόγος σήμα προς θόρυβο στην έξοδο του φίλτρου.

$$X(f) \longrightarrow \boxed{H(f) = X^*(f) e^{-j2\pi f t_0}} \longrightarrow Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εξόδου είναι

$$Y(f) = X(f) \cdot X^*(f) e^{-j2\pi f t_0} = |X(f)|^2 e^{-j2\pi f t_0}$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier προσδιορίζεται ο σήμα εξόδου

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{-j2\pi f t_0} e^{j2\pi f t} df$$

για τη στιγμή δειγματοληψίας  $t = t_0$  έχουμε

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_0^T x_T^2(t) dt = \mathcal{E}_X$$

και για τη φασματική πυκνότητα του θορύβου στην έξοδο έχουμε

$$S_{N_0}(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2$$

η ισχύς του θορύβου στην έξοδο είναι

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} S_{N_0}(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} X^2(f) df = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_X$$

Το SNR εξόδου είναι απλά ο λόγος της ισχύος του σήματος  $P_s$

$$P_s = y_s^2(t_0) = \mathcal{E}_X^2$$

προς την ισχύ του θορύβου  $P_n$ , δηλαδή,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{εξόδου}} = \frac{P_s}{P_n} = \frac{\mathcal{E}_X^2}{\mathcal{E}_X N_0/2} = \frac{2\mathcal{E}_X}{N_0}$$

# Τέλος Ενότητας



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση διαθέσιμη [εδώ](#).

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Σεραφείμ Καραμπογιάς 2015. Σεραφείμ Καραμπογιάς. «Επεξεργασία στοχαστικών σημάτων. Ψηφιακή μετάδοση αναλογικών σημάτων.». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/DI23>.

# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.