ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Ενότητα 3

Αλγόριθμοι Γραφημάτων

Bellman Ford

Ν. Μ. Μισυρλής

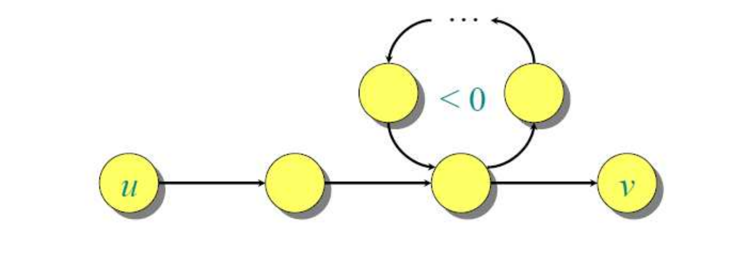
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών,

Εύρεση Ελάχιστου Μονοπατιού

- Αλγόριθμος Bellman-Ford
- Γραμμικός Προγραμματισμός (linear programming) και περιορισμοί
- διάταξη VLSI

Κύκλοι Αρνητικού Βάρους

- Επιλύει το πρόβλημα στην περίπτωση που οι ακμές ενδέχεται να έχουν αρνητικά βάρη.
- Αν ένα γράφημα $G = (V, E)$ περιέχει ένας κύκλο αρνητικού βάρους, τότε πιθανώς να μην υπάρχουν κάποια ελάχιστα μονοπάτια.
- Παράδειγμα:



- Αλγόριθμος Bellman-Ford: Βρίσκει όλα τα ελάχιστα μονοπάτια από μια πηγή $s \in V$ προς όλες τις κορυφές $v \in V$ ή αποφασίζει αν υπάρχει κύκλος αρνητικού βάρους.

Αλγόριθμος Bellman-Ford

$$\left.\begin{array}{l} d[s] \leftarrow 0 \\ \text{για κάθε } v \in V - \{s\} \\ \qquad d[v] \leftarrow \infty \end{array}\right\} \text{ αρχικοποίηση}$$

για $i \leftarrow 1$ έως $|V| - 1$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

$$\left.\begin{array}{l} \text{αν } d[v] > d[u] + w(u, v) \\ \qquad \text{τότε } d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{βήμα} \\ \text{χαλάρωσης} \end{array}$$

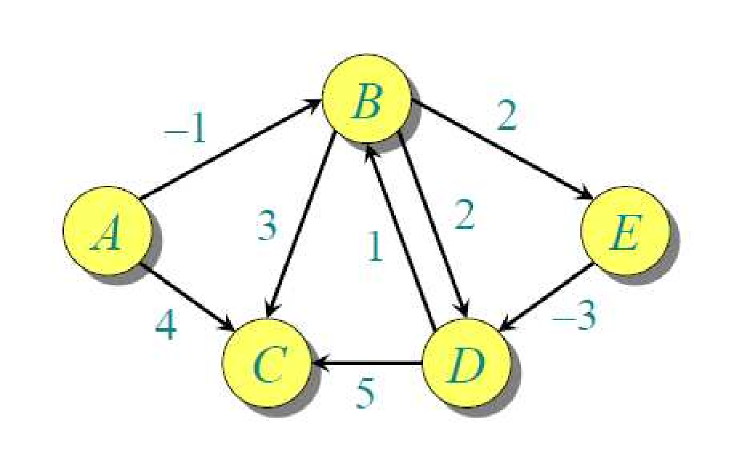
για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

αν $d[v] > d[u] + w(u, v)$

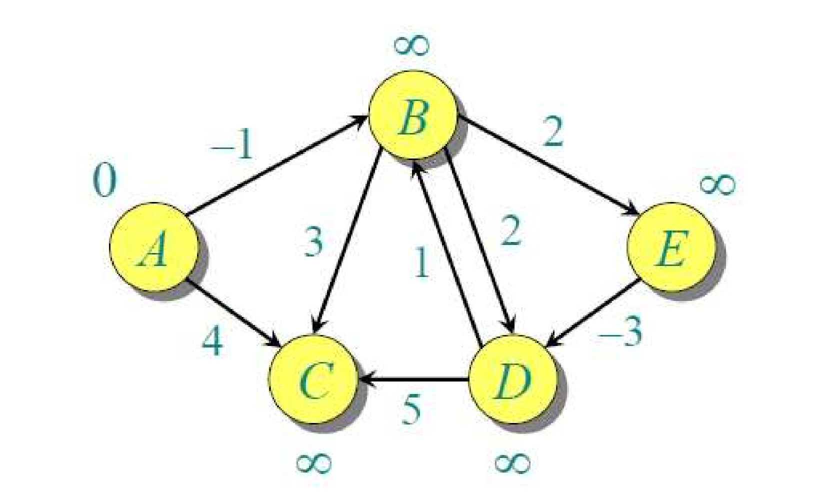
τότε υπάρχει κύκλος αρνητικού βάρους

- $d[v] = \delta(s, v)$, αν δεν υπάρχουν αρνητικού βάρους κύκλοι
- χρόνος: $O(VE)$

Παράδειγμα Bellman-Ford

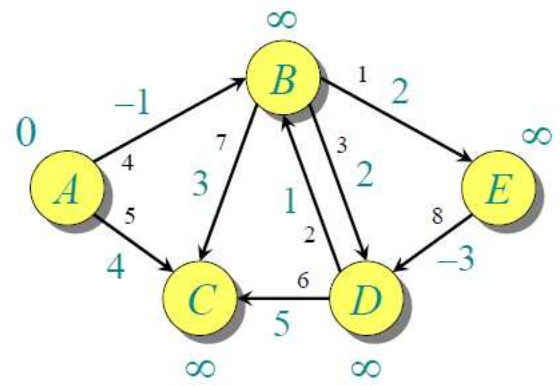


Παράδειγμα Bellman-Ford



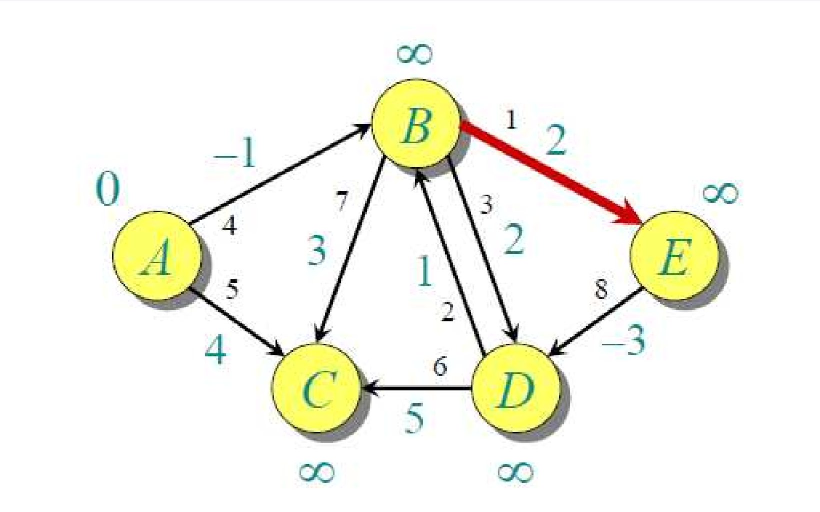
Αρχικοποίηση

Παράδειγμα Bellman-Ford

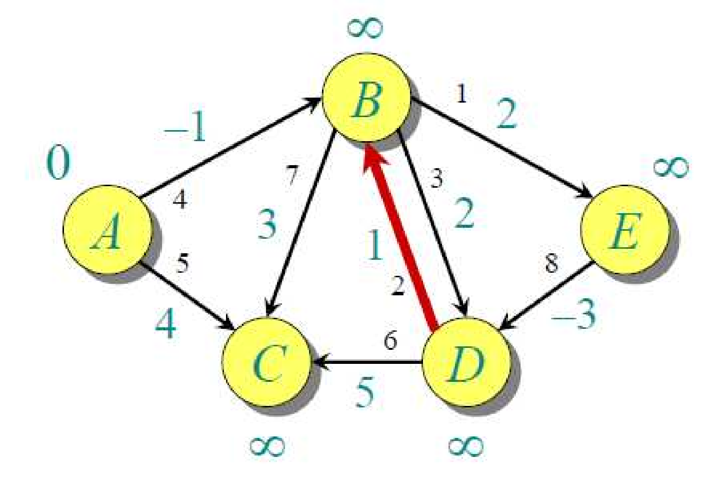


Διάταξη χαλάρωσης ακμών

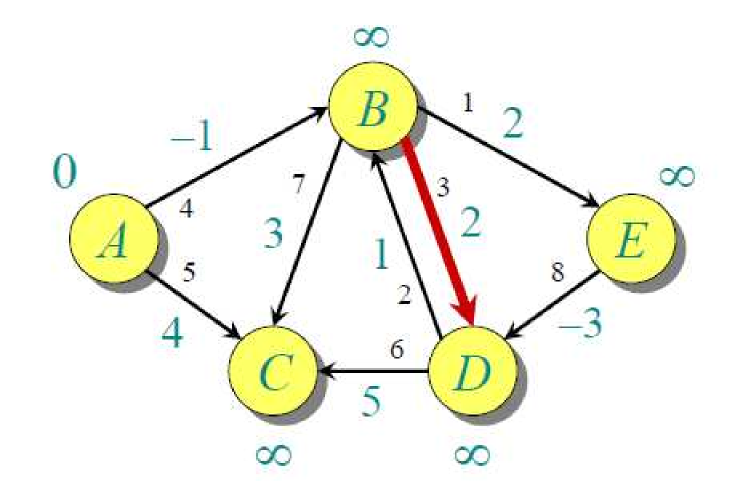
Παράδειγμα Bellman-Ford



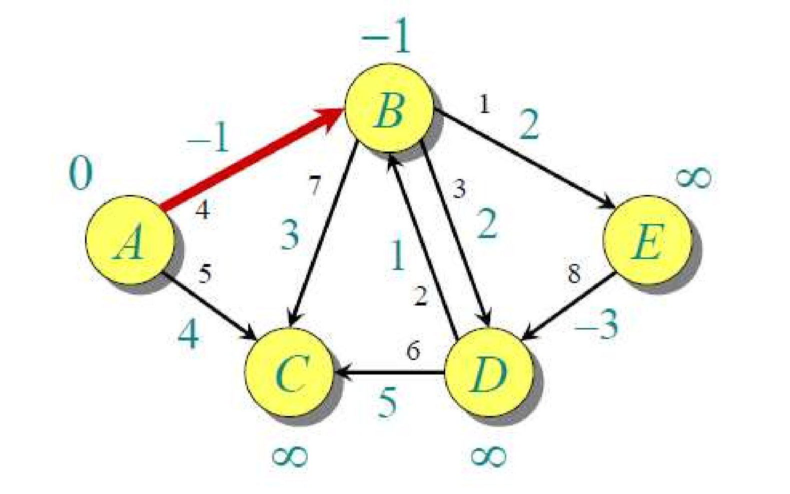
Παράδειγμα Bellman-Ford



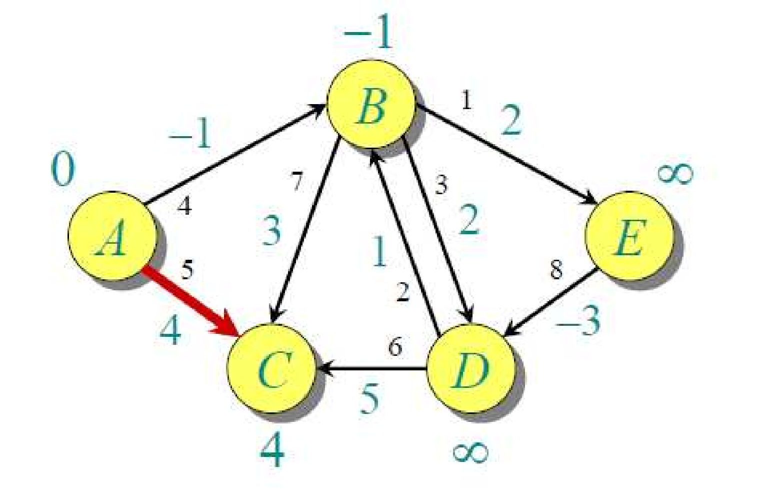
Παράδειγμα Bellman-Ford



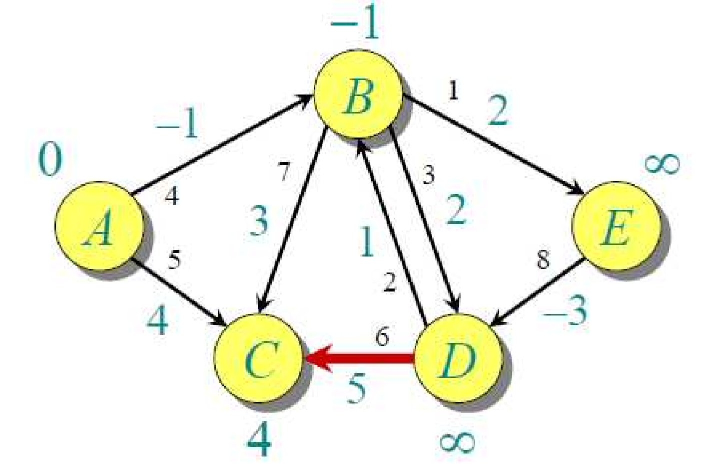
Παράδειγμα Bellman-Ford



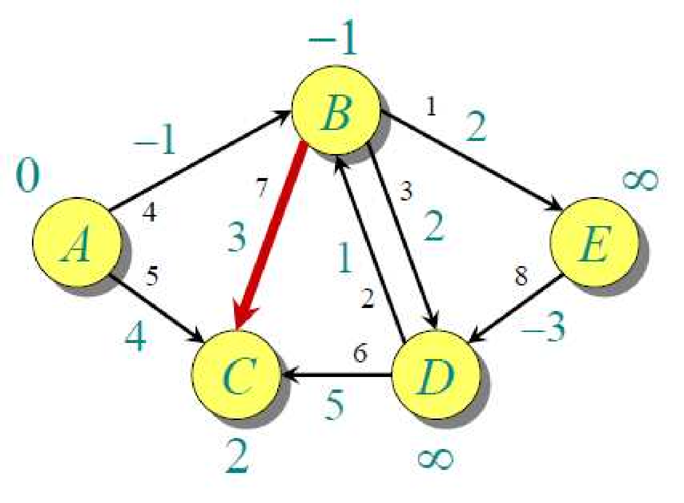
Παράδειγμα Bellman-Ford



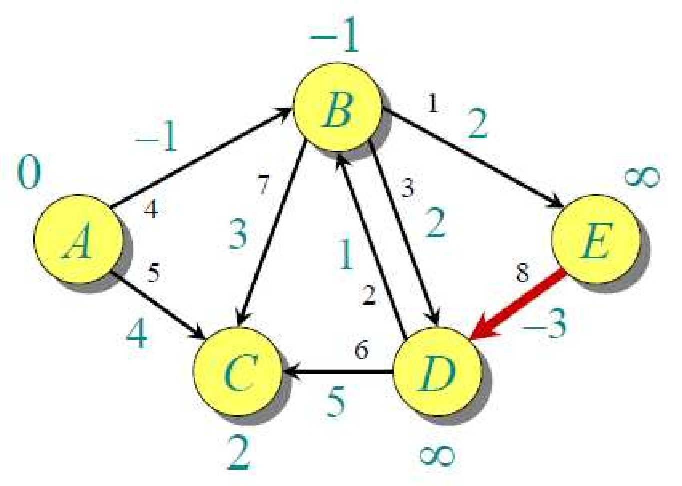
Παράδειγμα Bellman-Ford



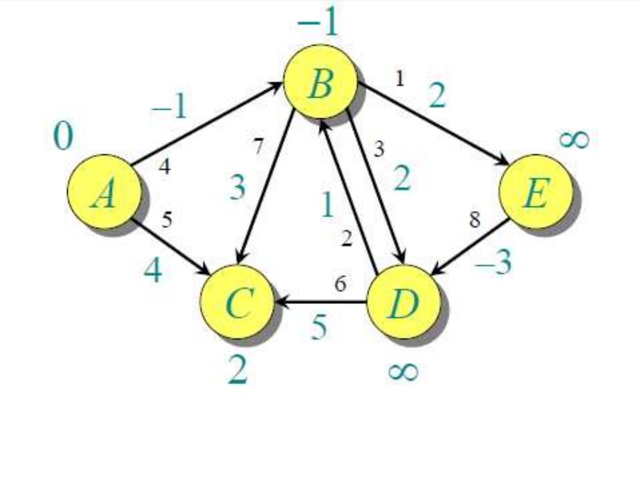
Παράδειγμα Bellman-Ford



Παράδειγμα Bellman-Ford

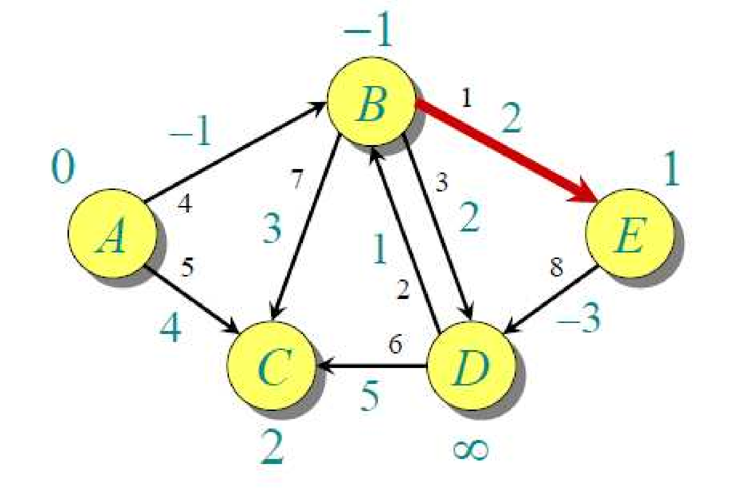


Παράδειγμα Bellman-Ford

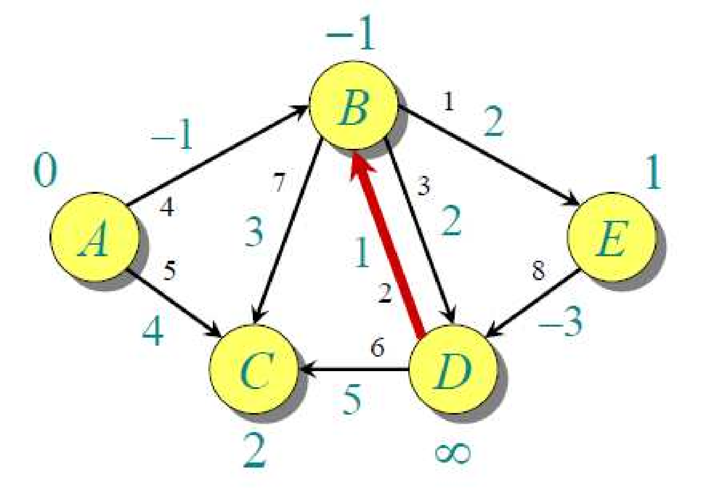


Τέλος πρώτης επανάληψης

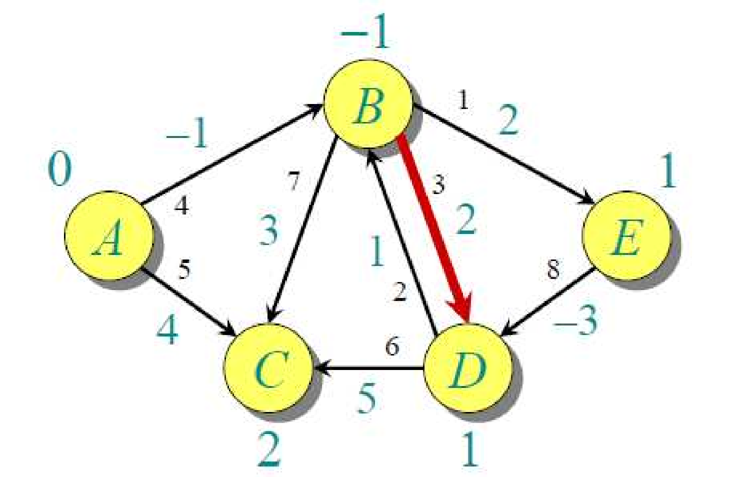
Παράδειγμα Bellman-Ford



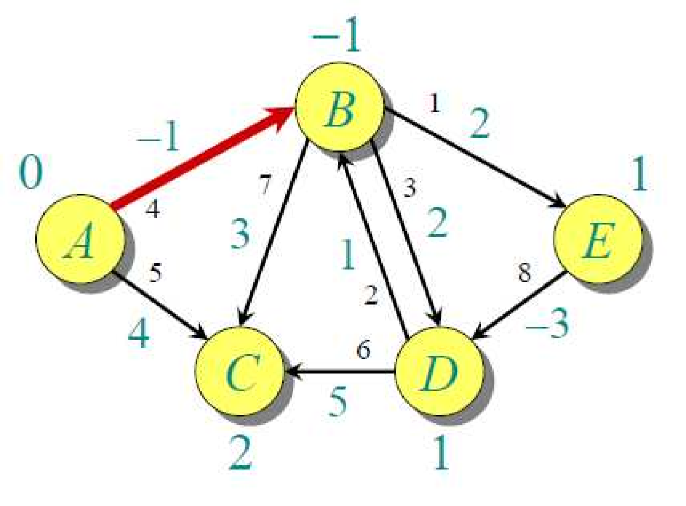
Παράδειγμα Bellman-Ford



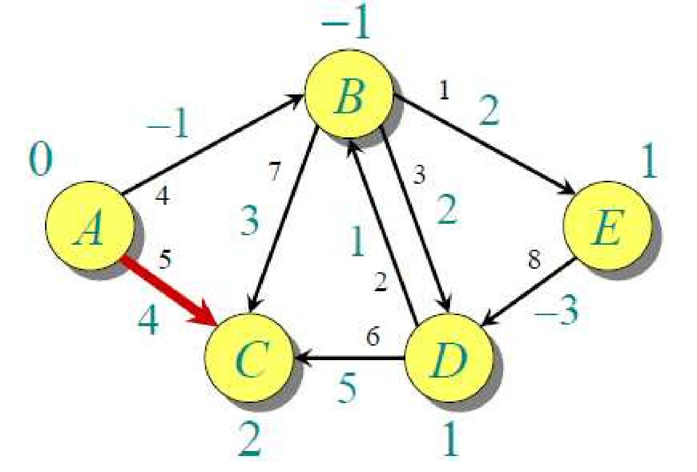
Παράδειγμα Bellman-Ford



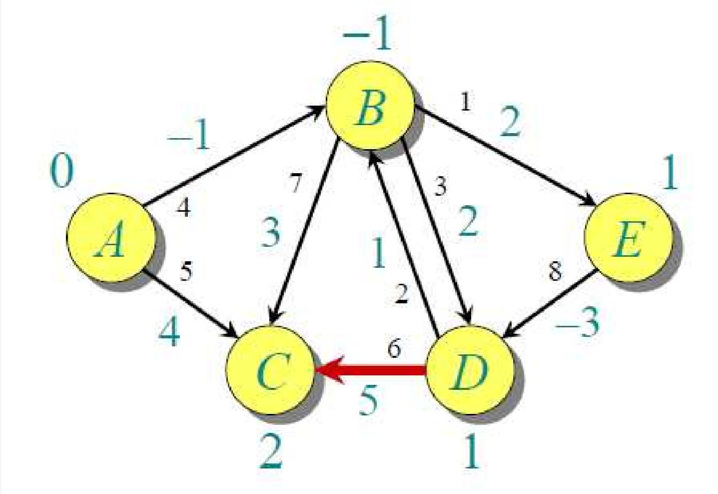
Παράδειγμα Bellman-Ford



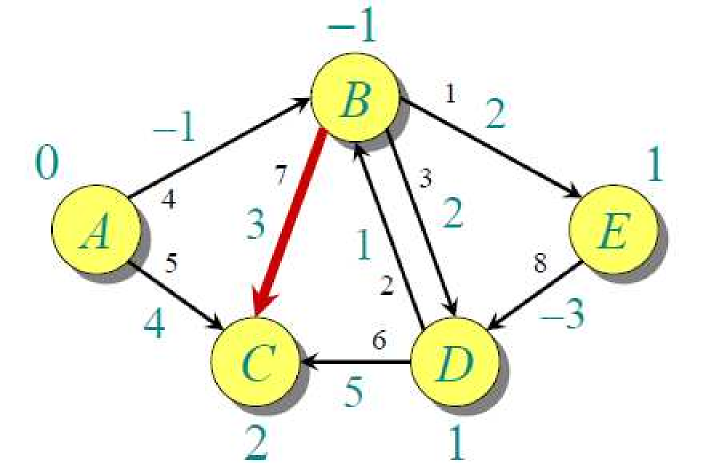
Παράδειγμα Bellman-Ford



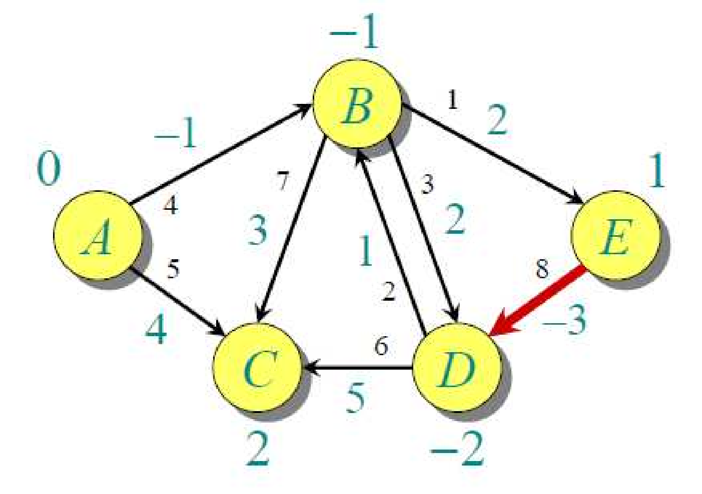
Παράδειγμα Bellman-Ford



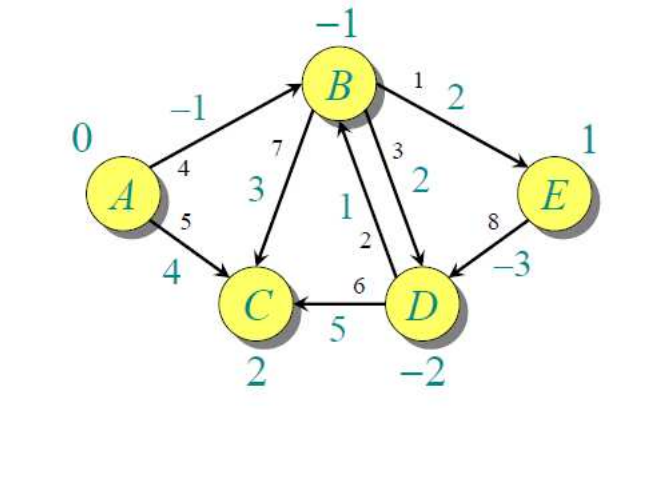
Παράδειγμα Bellman-Ford



Παράδειγμα Bellman-Ford



Παράδειγμα Bellman-Ford



Τέλος 2ης επανάληψης (και 3ης και 4ης)

Ορθότητα (Correctness)

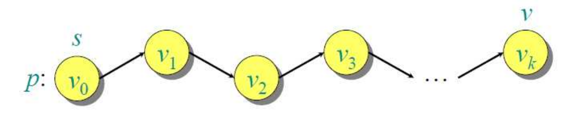
Theorem

Αν $G = (V, E)$ *δεν περιλαμβάνει αρνητικού βάρους κύκλους, μετά την εφαρμογή του αλγορίθμου Bellman-Ford,* $d[v] = \delta(s, v)$ *για κάθε* $v \in V$.

Ορθότητα (Correctness)

Απόδειξη

Έστω $v \in V$ μια οποιαδήποτε κορυφή και p το ελάχιστο μονοπάτι από την s στη v με το ελάχιστο πλήθος ακμών.



Αφού το p είναι ελάχιστο μονοπάτι, έχουμε: $\delta(s, v_i) = \delta(s, v_{i-1}) + w(v_{i-1}, v_i)$.
Αρχικά, $d[v_0] = 0 = \delta(s, v_0)$, και $d[v_0]$ είναι αμετάβλητο $(d[v] \geq \delta(s, v))$

- μετά από 1 πέρασμα του $E, d[v_1] = \delta(s, v_1)$.
- μετά από 2 περάσματα του $E, d[v_2] = \delta(s, v_2.)$

  $\vdots$

- μετά από k περάσματα του $E, d[v_k] = \delta(s, v_k)$.

Αφού ο G δεν περιέχει αρνητικού βάρους κύκλους, το p είναι απλό.
Το μεγαλύτερο απλό μονοπάτι έχει $\leq |V| - 1$ ακμές.

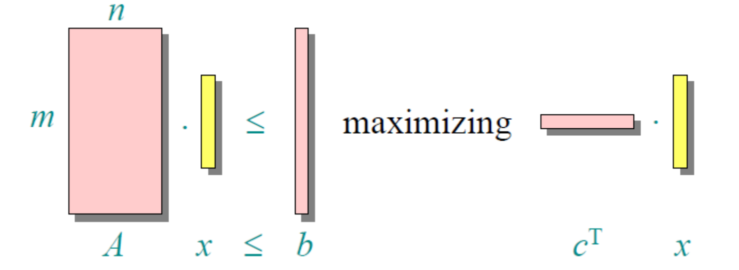
Ανίχνευση Κύκλου με Αρνητικό Βάρος

Corollary

Αν μια τιμή $d[v]$ *δεν συγκλίνει μετά από* $|V| - 1$ *περάσματα, τότε υπάρχει κύκλος με αρνητικό βάρος στον* G *προσβάσιμο από την* s.

Γραμμικός Προγραμματισμός

Έστω A ένας πίνακας $m \times n$, b $m-$ διάνυσμα και c $n-$διάνυσμα. Βρες $n-$διάνυσμα x που μεγιστοποιεί το $c^T x$ δεδομένου ότι $Ax \leq b$, ή αποφάσισε ότι δεν υπάρχει τέτοια λύση.



Αλγόριθμοι Γραμμικού Προγραμματισμού

- Αλγόριθμοι για το γενικό πρόβλημα
  - Μέθοδοι Simplex : πρακτικές αλλά εκθετικοί χρόνοι (χείριστη περίπτωση).
  - Μέθοδοι Εσωτερικού Σημείου: πολυωνυμικός χρόνος και ανταγωνίζεται την simplex.
- Πρόβλημα επιλυσιμότητας:
  - κανένα κριτήριο βελτιστοποίησης
  - απλά βρες κάποιο x τέτοιο ώστε $A \leq b$.
  - γενικά, τόσο δύσκολο όσο τα κοινά LP.

Λύνοντας ένα σύστημα με διαφορετικές συνιστώσες

Γραμμικός προγραμματισμός όπου κάθε γραμμή του A περιέχει ακριβώς ένα 1, ένα -1 και τα υπόλοιπα 0.

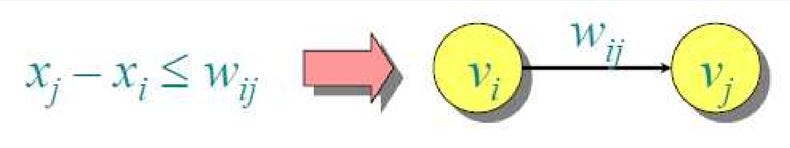
Παράδειγμα:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_2 - x_3 &\leq -2 \\ x_1 - x_3 &\leq 2 \end{aligned}\right\} x_j - x_i \leq w_{ij}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Γράφος Περιορισμών



(Ο πίνακας "A" έχει διαστάσεις $|E| \times |V|$)

Μη Ικανοποιήσιμοι Περιορισμοί

Theorem

Αν ο γράφος περιορισμών περιέχει έναν κύκλο αρνητικού βάρους, τότε το σύστημα των διαφορών είναι μη ικανοποιήσιμο.

Proof.

Έστω ότι ο κύκλος με αρνητικό βάρος είναι ο $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_k \to v_1$. Τότε, έχουμε

$$\begin{array}{ll} x_2 - x_1 & \leq w_{12} \\ x_3 - x_2 & \leq w_{23} \\ \vdots & \\ x_k - x_{k-1} & \leq w_{k-1,k} \\ x_1 - x_k & \leq w_{k1} \\ \hline 0 & \leq \text{weight of cycle} \\ & < 0 \end{array}$$

Συνεπώς δεν υπάρχει τιμή του x_i που μπορεί να ικανοποιήσει τους περιορισμούς. □

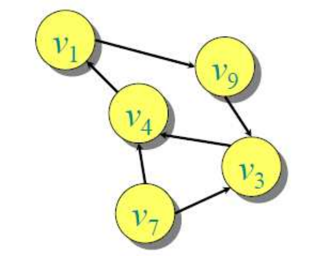
Ικανοποίηση Περιορισμών

Theorem

Αν ο γράφος περιορισμών δεν περιέχει κανέναν κύκλο αρνητικού βάρους, τότε το σύστημα των διαφορών είναι ικανοποιήσιμο.

Proof.

Πρόσθεσε μια νέα κορυφή s στο V με μηδενικό βάρος ακμής προς κάθε κορυφή $v_i \in V$.



□

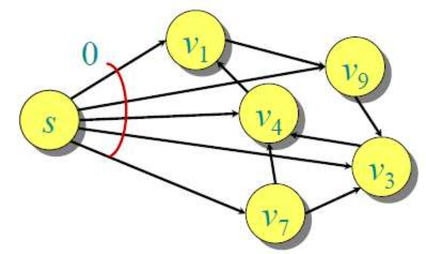
Ικανοποίηση Περιορισμών

Theorem

Αν ο γράφος περιορισμών δεν περιέχει κανέναν κύκλο αρνητικού βάρους, τότε το σύστημα των διαφορών είναι ικανοποιήσιμο.

Proof.

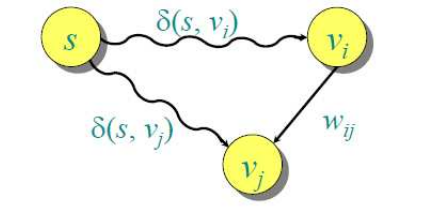
Πρόσθεσε μια νέα κορυφή s στο V με μηδενικό βάρος ακμής προς κάθε κορυφή $v_i \in V$.



□

Απόδειξη (συν.)

Ισχυρισμός: Η ανάθεση $x_i = \delta(s, v_i)$ λύνει το σύστημα των περιοριμών. Έστω περιορισμός $x_j - x_i \leq w_{ij}$, και τα ελάχιστα μονοπάντια από το s στο v_j και v_i :



Η τριγωνική ανισότητα μας δίνει $\delta(s, v_j) \leq \delta(s, v_i) + w_{ij}$.
Αφού $x_i = \delta(s, v_i)$ και $x_j = \delta(s, v_j)$, τότε ο περιορισμός $x_j - x_i \leq w_{ij}$ ικανοποιείται.

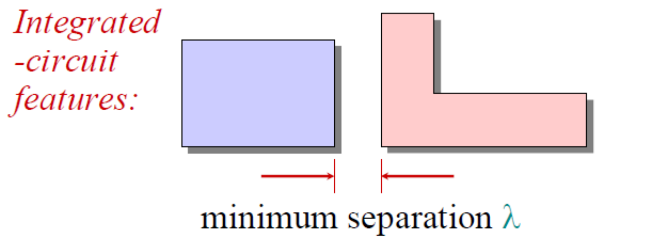
Bellman-Ford και Γραμμικός Προγραμματισμός

Corollary

Ο αλγόριθμος Bellman-Ford λύνει ένα σύστημα με m περιορισμούς διαφορών και n μεταβλητές σε χρόνο $O(mn)$.

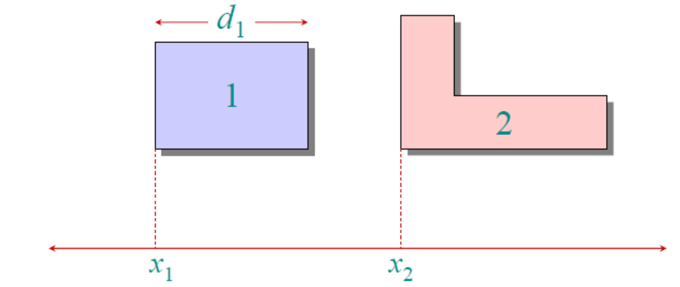
- Τα ελάχιστα μονοπάτια μιας πηγής είναι ένα απλό πρόβλημα LP.
- Ο Bellman-Ford μεγιστοποιεί το $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ αναφορικά με το $x_j - x_i \leq w_{ij}$ και $x_i \leq 0$ (άσκηση)
- Ο Bellman-Ford επίσης ελαχιστοποιεί το $max_i\{x_i\} - min_i\{x_i\}$ (άσκηση)

VLSI



Πρόβλημα: Συνέπτηξε (σε μια διάσταση) τον χώρο μεταξύ των γνωρισμάτων ενός σχεδιαγράμματος VLSI χωρίς να έρθουν πολύ κοντά κάποια από τα χαρακτηριστικά.

VLSI



Περιορισμός:

$$x_2 - x_1 \geq d_1 + \lambda$$

Ο Bellman-Ford ελαχιστοποιεί την $max_i\{x_i\} - min_i\{x_i\}$, που συμπιέζει το σχεδιάγραμμα στη x-διάσταση.

Συντομότερα μονοπάτια στα ΚΑΓ

- Χαλαρώνοντας τις ακμές σε ένα ΚΑΓ με βάρη σύμφωνα με την τοπολογική ταξινόμηση μπορούμε να υπολογίσουμε τα συντομότερα μονοπάτια από μια απλή πηγή σε $\Theta(V+E)$ χρόνο.
- Τα συντομότερα μονοπάτια είναι **πάντα** καλά ορισμένα σε ένα ΚΑΓ αφού ακόμα και αν υπάρχουν ακμές με αρνητικά βάρη, δεν μπορούν να υπάρχουν κύκλοι με αρνητικά βάρη.
- Ο αλγόριθμος ξεκινάει με την τοπολογική ταξινόμηση του ΚΑΓ
- Γίνεται μια διάταξη όλων των κορυφών της τοπολογικής ταξινόμησης και χαλαρώνεται κάθε ακμή που φεύγει από μια κορυφή.

Συντομότερα μονοπάτια στα ΚΑΓ

DAG - SHORTEST - PATHS (G,w,s)

TOPOLOGICAL SORT (G,w,s)

$$\left.\begin{array}{l} d[s] = 0 \\ \text{for each } v \in V - \{s\} \\ \qquad \text{do } d[v] = \infty \end{array}\right\} \text{αρχικοποίηση } \Theta(V)$$

for each vertex u, taken in topological order

$$\left.\begin{array}{l} \text{do for each vertex } v \in Adj[u] \\ \qquad \text{do if } d[v] > d[u] + w(u,v) \\ \qquad\qquad \text{then } d[v] \leftarrow d[u] + w(u,v) \end{array}\right\} |E| times$$

Analysis

Θ(V+E)

Theorem

Μετά το τέλος της εκτέλεσης DAG - SHORTEST - PATHS (G,w,s) ισχύει για όλα τα $v \in V$ ότι $d[v] = \delta(s, v)$.

Απόδειξη

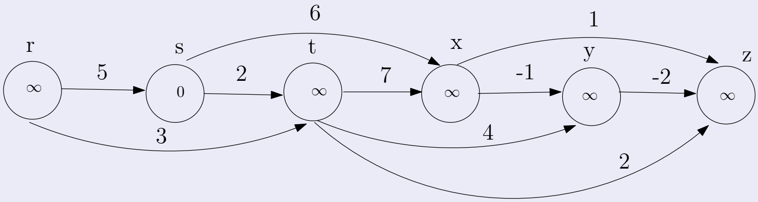
Έστω $p : v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_k$, όπου $v_0 = s$ και $v_k = v$ είναι το συντομότερο μονοπάτι. Λόγω του ότι χρησιμοποιείται τοπολογική ταξινόμηση, οι ακμές του p χαλαρώνουν με την εξής διάταξη

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k).$$

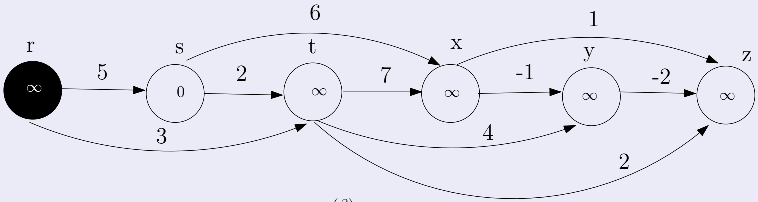
Από το Λήμμα 3 προκύπτει ότι

$$d[v_i] = \delta(s, v_i)$$

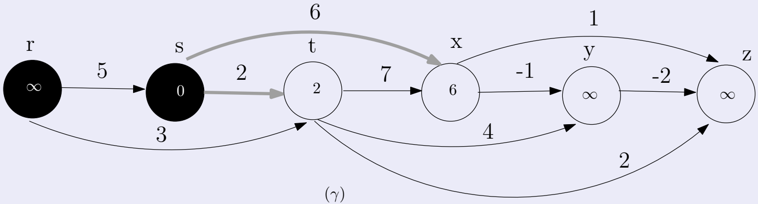
για $i = 0, 1, \ldots, k$.



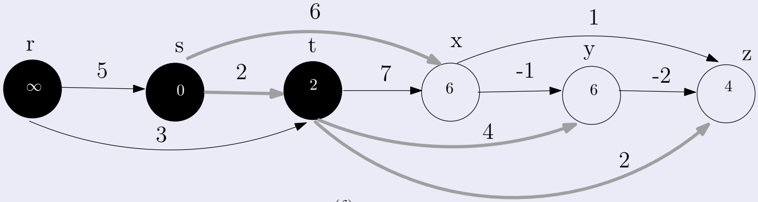
(α)



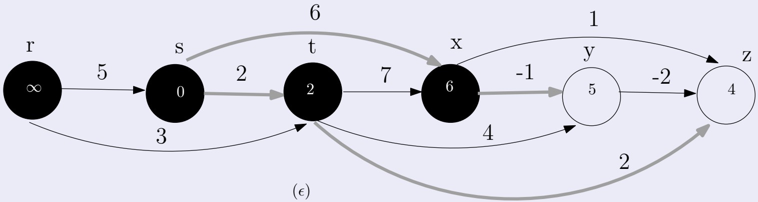
(β)



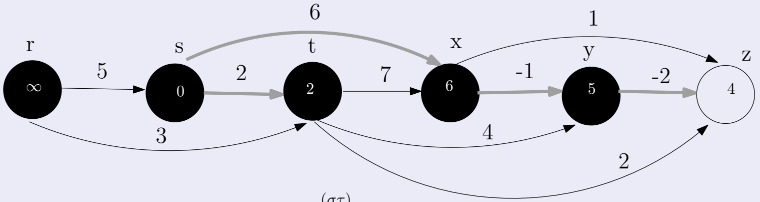
(γ)



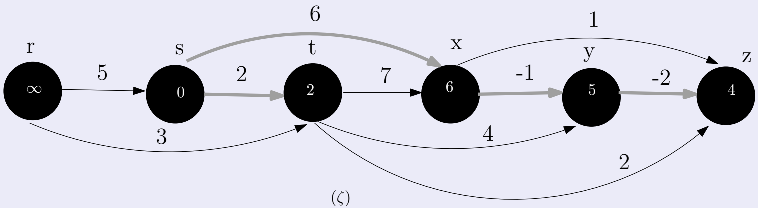
(δ)



(ϵ)



(στ)



(ζ)

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.