

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ (2010-11)

Άσκηση 1

Ένας θετικός ακέραιος N ονομάζεται *αριθμός Carmichael* όταν είναι σύνθετος (μη πρώτος) και για κάθε ακέραιο b (με $1 < b < N$) που είναι σχετικά πρώτος με τον N , ισχύει:

$$b^{N-1} \bmod N = 1$$

Στον παραπάνω τύπο, το mod συμβολίζει το “υπόλοιπο διαίρεσης”. Υπενθυμίζεται ότι ένας αριθμός μεγαλύτερος του 1 είναι πρώτος όταν έχει σαν μόνους διαιρέτες το 1 και τον εαυτό του. Οι αριθμοί που δεν είναι πρώτοι είναι σύνθετοι. Για παράδειγμα, οι αριθμοί 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 και 19 είναι πρώτοι, ενώ οι 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 και 20 είναι σύνθετοι. Επίσης, δύο αριθμοί ονομάζονται *σχετικά πρώτοι* όταν ο *Μέγιστος Κοινός Διαρέτης* (Μ.Κ.Δ.) τους είναι το 1.

Περισσότερες πληροφορίες για τους αριθμούς Carmichael, που είναι πολύ σημαντικοί στη θεωρία αριθμών, βρίσκονται στην ιστοσελίδα http://en.wikipedia.org/wiki/Carmichael_number.

Με βάση τον ορισμό των αριθμών Carmichael, δεν είναι εύκολο να ελεγχθεί υπολογιστικά αν ένας δεδομένος αριθμός είναι αριθμός Carmichael. Όμως, στην παραπάνω ιστοσελίδα, διατυπώνεται το *κριτήριο του Korselt*, με βάση το οποίο, ένας θετικός ακέραιος N , που είναι σύνθετος, είναι αριθμός Carmichael, αν και μόνο αν

- είναι *ελεύθερος τετραγώνου*, δηλαδή, αν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, δεν υπάρχει παράγοντας υψωμένος σε δύναμη μεγαλύτερη του 1 (για παράδειγμα, το 330 είναι ελεύθερος τετραγώνου, αφού $330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$, ενώ το 90 δεν είναι, αφού $90 = 2 \times 3^2 \times 5$, ούτε το $56 = 2^3 \times 7$) και
- για κάθε p που είναι πρώτος παράγοντας του N , ισχύει ότι το $p - 1$ είναι διαιρέτης του $N - 1$.

Εύκολα προκύπτει από το προηγούμενο κριτήριο ότι όλοι οι αριθμοί Carmichael είναι περιττοί.

Ο μικρότερος αριθμός Carmichael είναι το 561. Είναι αριθμός Carmichael, γιατί είναι ελεύθερος τετραγώνου ($561 = 3 \times 11 \times 17$) και για τους τρεις πρώτους παράγοντές του (3, 11 και 17) ισχύει ότι τα 2, 10 και 16 είναι διαιρέτες του 560.

Γράψτε ένα πρόγραμμα C (έστω ότι το πηγαίο αρχείο του ονομάζεται “carmichael.c”) το οποίο, με τη βοήθεια του κριτηρίου του Korselt, να βρίσκει και να εκτυπώνει όλους τους αριθμούς Carmichael που είναι μικρότεροι ή ίσοι από το MAXNUM, το οποίο να ορίζεται μέσα στο πρόγραμμά σας σαν συμβολική σταθερά (μέσω #define). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στην υλοποίησή σας και το γεγονός ότι οι αριθμοί Carmichael είναι πάντοτε περιττοί. Επίσης, για κάθε αριθμό Carmichael που βρίσκει το πρόγραμμά σας, να εκτυπώνει και το πώς αναλύεται αυτός ο αριθμός σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Η τιμή που θα επιλέξετε για το MAXNUM να είναι τέτοια ώστε το πρόγραμμά σας να τερματίζει σε πεπερασμένο χρόνο (π.χ. λιγότερο από μισό λεπτό).

Μία ενδεικτική εκτέλεση του προγράμματος (για MAXNUM ίσο με 1000000) φαίνεται στη συνέχεια:

```
% ./carmichael
561 is a Carmichael number ( = 3 x 11 x 17 )
1105 is a Carmichael number ( = 5 x 13 x 17 )
1729 is a Carmichael number ( = 7 x 13 x 19 )
2465 is a Carmichael number ( = 5 x 17 x 29 )
2821 is a Carmichael number ( = 7 x 13 x 31 )
6601 is a Carmichael number ( = 7 x 23 x 41 )
8911 is a Carmichael number ( = 7 x 19 x 67 )
```

10585 is a Carmichael number (= 5 x 29 x 73)
15841 is a Carmichael number (= 7 x 31 x 73)
29341 is a Carmichael number (= 13 x 37 x 61)
41041 is a Carmichael number (= 7 x 11 x 13 x 41)
46657 is a Carmichael number (= 13 x 37 x 97)
52633 is a Carmichael number (= 7 x 73 x 103)
62745 is a Carmichael number (= 3 x 5 x 47 x 89)
63973 is a Carmichael number (= 7 x 13 x 19 x 37)
75361 is a Carmichael number (= 11 x 13 x 17 x 31)
101101 is a Carmichael number (= 7 x 11 x 13 x 101)
115921 is a Carmichael number (= 13 x 37 x 241)
126217 is a Carmichael number (= 7 x 13 x 19 x 73)
162401 is a Carmichael number (= 17 x 41 x 233)
172081 is a Carmichael number (= 7 x 13 x 31 x 61)
188461 is a Carmichael number (= 7 x 13 x 19 x 109)
252601 is a Carmichael number (= 41 x 61 x 101)
278545 is a Carmichael number (= 5 x 17 x 29 x 113)
294409 is a Carmichael number (= 37 x 73 x 109)
314821 is a Carmichael number (= 13 x 61 x 397)
334153 is a Carmichael number (= 19 x 43 x 409)
340561 is a Carmichael number (= 13 x 17 x 23 x 67)
399001 is a Carmichael number (= 31 x 61 x 211)
410041 is a Carmichael number (= 41 x 73 x 137)
449065 is a Carmichael number (= 5 x 19 x 29 x 163)
488881 is a Carmichael number (= 37 x 73 x 181)
512461 is a Carmichael number (= 31 x 61 x 271)
530881 is a Carmichael number (= 13 x 97 x 421)
552721 is a Carmichael number (= 13 x 17 x 41 x 61)
656601 is a Carmichael number (= 3 x 11 x 101 x 197)
658801 is a Carmichael number (= 11 x 13 x 17 x 271)
670033 is a Carmichael number (= 7 x 13 x 37 x 199)
748657 is a Carmichael number (= 7 x 13 x 19 x 433)
825265 is a Carmichael number (= 5 x 7 x 17 x 19 x 73)
838201 is a Carmichael number (= 7 x 13 x 61 x 151)
852841 is a Carmichael number (= 11 x 31 x 41 x 61)
997633 is a Carmichael number (= 7 x 13 x 19 x 577)
%

Η παράδοση της άσκησης αυτής συνίσταται στην υποβολή του πηγαίου αρχείου `carmichael.c` με διαδικασία που θα ανακοινωθεί σύντομα.

Σημείωση: Για την άσκηση αυτή δεν χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν πίνακες. Για την ακρίβεια, η χρήση πινάκων θα έχει σαν αποτέλεσμα τον μηδενισμό της άσκησης.