

Άσκηση 3

Αν σε μία σκακιέρα (πλαίσιο 8×8) τοποθετήσουμε κάποιες βασίλισσες, λέμε ότι δύο από αυτές “απειλούνται” μεταξύ τους, αν βρίσκονται στην ίδια γραμμή, στήλη ή διαγώνιο. Ένα αρκετά ενδιαφέρον πρόβλημα-γρίφος που υπάρχει σχετικά είναι το πρόβλημα των 8 -βασίλισσών. Στο πρόβλημα αυτό, το ζητούμενο είναι να τοποθετήσουμε στη σκακιέρα 8 βασίλισσες, με τέτοιο τρόπο ώστε καμία βασίλισσα να μην απειλείται από καμία άλλη. Μία λύση του προβλήματος φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Είναι ευνόητο ότι το πρόβλημα των 8 -βασίλισσών μπορεί να γενικευθεί στο πρόβλημα των N -βασίλισσών, στο οποίο το ζητούμενο είναι να τοποθετηθούν N βασίλισσες σε ένα πλαίσιο $N \times N$ ώστε να μην απειλούνται μεταξύ τους.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	●							
2						●		
3								●
4			●					
5							●	
6				●				
7		●						
8					●			

Αν σας ζητούσαν να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο, για δεδομένο N , να βρίσκει όλες τις λύσεις του προβλήματος των N -βασίλισσών, θα έπρεπε αρχικά να αποφασίσετε πώς θα αναπαραστήσετε μία λύση. Ένας απλός τρόπος είναι να χρησιμοποιηθεί ένας μονοδιάστατος πίνακας ακεραίων με N θέσεις, θεωρώντας ότι κάθε στοιχείο του πίνακα αντιστοιχεί σε μία γραμμή της σκακιέρας. Επειδή είναι βέβαιο, λόγω των δεδομένων του προβλήματος, ότι σε κάθε γραμμή θα πρέπει να υπάρχει ακριβώς μία βασίλισσα, ο πίνακας μπορεί να αναπαραστήσει μία λύση, αν κάθε στοιχείο του έχει σαν τιμή τον αριθμό της στήλης στον οποίο βρίσκεται η βασίλισσα στη γραμμή που αντιστοιχεί στο στοιχείο. Για παράδειγμα, η λύση που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα μπορεί να αναπαρασταθεί από τον πίνακα

$$x[] = \{1, 6, 8, 3, 7, 4, 2, 5\}$$

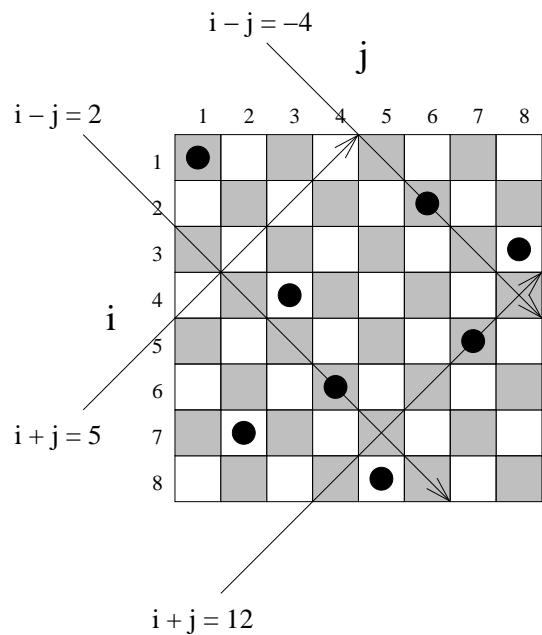
Για να λύσουμε το πρόβλημα των N -βασίλισσών, που, παρεμπιπτόντως, ανήκει στην κατηγορία των *προβλημάτων ικανοποίησης περιορισμών*, που είναι υποκατηγορία των *προβλημάτων αναζήτησης*, μπορούμε να εφαρμόσουμε την εξής μέθοδο. Αρχικά, τοποθετούμε μία βασίλισσα στην 1η γραμμή, έστω στην 1η στήλη. Μετά, πηγαίνουμε στη 2η γραμμή για να τοποθετήσουμε και εκεί βασίλισσα. Επειδή όμως οι βασίλισσες δεν πρέπει να απειλούνται μεταξύ τους, θα πρέπει να φροντίσουμε η βασίλισσα στη 2η γραμμή να μπει σε θέση που δεν απειλείται από τη βασίλισσα της 1ης γραμμής. Προφανώς, η πρώτη δυνατή θέση βασίλισσας για τη 2η γραμμή είναι στην 3η στήλη. Συνεχίζουμε και στην επόμενη γραμμή, τοποθετώντας βασίλισσα στην πρώτη δυνατή θέση που δεν απειλείται από τις προηγούμενες βασίλισσες, και ομοίως και στις επόμενες γραμμές. Αν σε κάποια γραμμή δεν υπάρχει θέση που να μπορεί να τοποθετηθεί βασίλισσα, επειδή όλες οι θέσεις απειλούνται από τις ήδη τοποθετημένες βασίλισσες, τότε φτάσαμε σε αδιέξοδο. Για να ξεφύγουμε από αυτό, πρέπει να *οπισθοδρομήσουμε* στην τελευταία επιλογή που είχαμε κάνει για τοποθέτηση βασίλισσας και να δοκιμάσουμε την αμέσως επόμενη δυνατή θέση γι' αυτή. Δουλεύοντας με αυτόν τον τρόπο, αν καταφέρουμε να τοποθετήσουμε βασίλισσα και στην N -οστή γραμμή, τότε έχουμε βρει μία λύση τους προβλήματος. Αν θέλουμε να βρούμε όλες τις λύσεις, δεν έχουμε παρά να συνεχίσουμε τη διαδικασία της αναζήτησης με οπισθοδρόμηση μέχρι να έχουν ελεγχθεί όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί τοποθέτησης N βασίλισσών.

Όσον αφορά το πώς μπορεί να υλοποιηθεί η αναζήτηση με οπισθοδρόμηση, ο πιο κλασικός και απλός τρόπος είναι να χρησιμοποιηθεί αναδρομή. Αυτό που χρειάζεται να κάνει κάποιος είναι να γράψει μία αναδρομική συνάρτηση, η οποία αρχικά καλείται για να τοποθετηθεί βασίλισσα στην 1η γραμμή. Αφού το κάνει αυτό, αναδρομικά καλεί τον εαυτό της για να τοποθετηθούν οι βασίλισσες και στις επόμενες γραμμές. Για την επιλογή της θέσης που θα τοποθετηθεί βασίλισσα σε κάποια γραμμή, αρ-

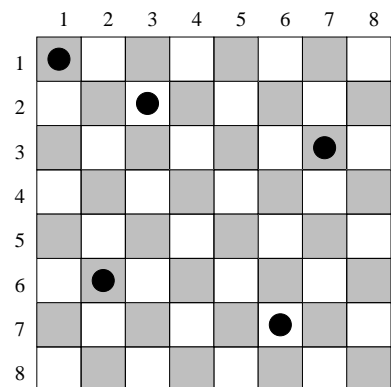
κεί μία δομή επανάληψης που τελικά θα δοκιμάζει όλες τις δυνατές θέσεις, εξαιρώντας εκείνες που απειλούνται από τις ήδη τοποθετημένες βασίλισσες. Μελετήστε προσεκτικά το πρόγραμμα

<http://www.di.uoa.gr/~ip/hwfiles/queens.c>

το οποίο είναι μία αρκετά απλή υλοποίηση του προβλήματος των N -βασίλισσών. Για να καταλάβετε τον τρόπο με τον οποίο στο πρόγραμμα ελέγχεται αν μία υποψήφια θέση για τοποθέτηση βασίλισσας είναι επιτρεπτή, με βάση τις θέσεις των ήδη τοποθετημένων βασίλισσών, παρατηρήστε στο διπλανό σχήμα ότι όλα τα τετραγωνίδια με συντεταγμένες (i, j) σε μία “ανιούσα” διαγώνιο έχουν το ίδιο $i+j$, ενώ στις “κατιούσες” διαγωνίους έχουν το ίδιο $i-j$. Επίσης, μην σας μπερδέψει το γεγονός ότι τόσο στα σχήματα όσο και στις εκτυπώσεις, η αρίθμηση των γραμμών και των στηλών αρχίζει από το 1, ενώ στο πρόγραμμα η αρίθμηση αρχίζει από το 0 (αφού αυτό ισχύει για τους πίνακες στην C).



Το πρόβλημα που καλείσθε να λύσετε στην άσκηση αυτή είναι μία παραλλαγή του προβλήματος των N -βασίλισσών. Το ζητούμενο είναι να τοποθετηθούν M βασίλισσες σε ένα πλαίσιο $N \times N$ (με $M \leq N$), ώστε να μην απειλούνται μεταξύ τους, αλλά κάθε τετραγωνίδιο του πλαισίου να απειλείται από τουλάχιστον μία βασίλισσα (θεωρούμε ότι κάθε βασίλισσα απειλεί και το τετραγωνίδιο στο οποίο είναι τοποθετημένη). Το πρόγραμμά σας να διαβάζει τα N και M από την είσοδο και να βρίσκει και να εκτυπώνει όλες τις λύσεις του προβλήματος. Μία λύση για $N = 8$ και $M = 5$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Προσέξτε ότι στο πρόβλημα αυτό μπορεί να υπάρχουν και γραμμές που δεν περιέχουν βασίλισσα (όταν $M < N$). Οι εκτυπώσεις είναι όπως και αυτές του προγράμματος για το κλασικό πρόβλημα των N -βασίλισσών που σας δόθηκε πιο πάνω. Κάθε λύση εκτυπώνεται σε μία γραμμή, σαν μία ακολουθία από στοιχεία της μορφής x/y , που το καθένα σημαίνει ότι έχει τοποθετηθεί βασίλισσα στο τετραγωνίδιο που βρίσκεται στη γραμμή x και τη στήλη y . Αν το εκτελέσιμο πρόγραμμα που θα κατασκευάσετε τελικά ονομάζεται “queensvar”, κάποιες ενδεικτικές εκτελέσεις του δίνονται στη συνέχεια.



```
% ./queensvar
```

```
Please, give the size of the board and the number of queens: 4 3
```

```
1/1 2/3 4/2
```

```
1/1 2/4 3/2
```

```
1/1 2/4 4/3
```

```
1/1 3/4 4/2
```

```
1/2 2/4 4/1
```

```
1/2 3/1 4/4
```

```
1/2 3/3 4/1
```

```
1/3 2/1 4/4
```

```
1/3 3/2 4/4
```

```
1/3 3/4 4/1
```

```
1/4 2/1 3/3
```

```
1/4 2/1 4/2
```

1/4 2/2 4/3
1/4 3/1 4/3
2/2 3/4 4/1
2/3 3/1 4/4

Found 16 solutions

% ./queensvar

Please, give the size of the board and the number of queens: 4 5

Wrong input

% ./queensvar

Please, give the size of the board and the number of queens: 5 3

1/1 2/4 4/3
1/1 3/4 4/2
1/1 3/4 5/3
1/1 3/5 4/3
1/3 3/2 5/5
1/3 3/4 5/1
1/5 2/2 4/3
1/5 3/1 4/3
1/5 3/2 4/4
1/5 3/2 5/3
2/2 3/4 5/1
2/3 3/1 5/5
2/3 3/5 5/1
2/3 4/2 5/5
2/3 4/4 5/1
2/4 3/2 5/5

Found 16 solutions

% ./queensvar

Please, give the size of the board and the number of queens: 6 4

1/1 2/3 3/6 6/2
1/1 2/4 4/5 5/2
1/1 2/4 4/5 6/2

.....

2/6 3/2 5/1 6/3
2/6 3/2 5/5 6/3
2/6 3/4 5/1 6/3

Found 120 solutions

% ./queensvar

Please, give the size of the board and the number of queens: 7 4

1/2 2/6 4/1 5/5
1/4 2/1 5/5 6/2
1/4 2/7 5/3 6/6

1/6 2/2 4/7 5/3
2/2 3/5 6/1 7/4
2/6 3/3 6/7 7/4
3/3 4/7 6/2 7/6
3/5 4/1 6/6 7/2

Found 8 solutions

% ./queensvar

Please, give the size of the board and the number of queens: 8 5

1/1 2/3 3/5 4/2 5/4
1/1 2/3 3/7 6/2 7/6
1/1 2/3 3/8 4/2 8/7

.....

4/5 5/3 6/1 7/4 8/2
4/5 5/7 6/4 7/6 8/8
4/6 5/4 6/7 7/5 8/8

Found 728 solutions

% ./queensvar

Please, give the size of the board and the number of queens: 8 8

1/1 2/5 3/8 4/6 5/3 6/7 7/2 8/4
1/1 2/6 3/8 4/3 5/7 6/4 7/2 8/5
1/1 2/7 3/4 4/6 5/8 6/2 7/5 8/3

.....

1/8 2/2 3/5 4/3 5/1 6/7 7/4 8/6
1/8 2/3 3/1 4/6 5/2 6/5 7/7 8/4
1/8 2/4 3/1 4/3 5/6 6/2 7/7 8/5

Found 92 solutions

% ./queensvar

Please, give the size of the board and the number of queens: 9 6

1/1 2/3 3/5 4/2 5/4 6/9
1/1 2/3 3/5 4/2 5/4 9/6
1/1 2/3 3/5 4/2 6/9 9/4

.....

4/9 5/4 6/2 7/5 8/3 9/1
4/9 5/5 6/2 7/4 8/1 9/3
4/9 5/5 6/3 7/1 8/4 9/2

Found 7744 solutions

% ./queensvar

Please, give the size of the board and the number of queens: 10 8

1/1 2/3 3/5 4/2 5/8 6/10 7/4 8/7
1/1 2/3 3/5 4/2 5/8 6/10 7/4 10/9
1/1 2/3 3/5 4/2 5/8 6/10 8/4 10/7

```
.....  
3/10 4/8 5/3 6/1 7/9 8/7 9/2 10/4  
3/10 4/8 5/4 6/1 7/3 8/6 9/2 10/7  
3/10 4/8 5/6 6/1 7/3 8/7 9/9 10/4
```

Found 241980 solutions

```
% ./queensvar
```

```
Please, give the size of the board and the number of queens: 11 5
```

```
2/4 4/10 6/6 8/2 10/8
```

```
2/8 4/2 6/6 8/10 10/4
```

Found 2 solutions

```
% ./queensvar
```

```
Please, give the size of the board and the number of queens: 12 6
```

Found 0 solutions

```
% ./queensvar
```

```
Please, give the size of the board and the number of queens: 12 7
```

```
1/1 2/3 3/6 5/11 8/4 10/9 12/2
```

```
1/1 2/3 3/8 5/11 8/2 10/5 11/10
```

```
1/1 2/3 3/9 5/4 8/11 10/6 12/2
```

```
.....  
4/7 5/9 6/1 9/3 10/12 11/2 12/8
```

```
4/8 5/5 6/7 7/4 8/6 10/12 12/11
```

```
4/8 5/6 6/4 7/7 8/5 10/12 12/11
```

Found 840 solutions

```
%
```

Θα πρέπει να δομήσετε το πρόγραμμά σας σε ένα σύνολο από **τουλάχιστον δύο πηγαία αρχεία C** (με κατάληξη `.c`) και **τουλάχιστον ένα αρχείο επικεφαλίδας** (με κατάληξη `.h`).

Για να παραδώσετε το σύνολο των αρχείων που θα έχετε δημιουργήσει για την άσκηση αυτή, ακολουθήστε την εξής διαδικασία. Τοποθετήστε όλα τα αρχεία μέσα σ' ένα κατάλογο που θα δημιουργήσετε, έστω με όνομα `queensvar`, στους σταθμούς εργασίας `Suns` ή `Linux` του Τμήματος. Χρησιμοποιώντας την εντολή `zip` ως εξής

```
zip -r queensvar.zip queensvar
```

δημιουργείτε ένα συμπιεσμένο (σε μορφή `zip`) αρχείο, με όνομα `queensvar.zip`, στο οποίο περιέχεται ο κατάλογος `queensvar` μαζί με όλα τα περιεχόμενά του.¹ Το αρχείο αυτό είναι που θα πρέπει να υποβάλετε, με διαδικασία που θα ανακοινωθεί σύντομα.

¹Αρχεία `zip` μπορείτε να δημιουργήσετε και στα `Windows`, με διάφορα προγράμματα, όπως, για παράδειγμα, το `WinZip`.