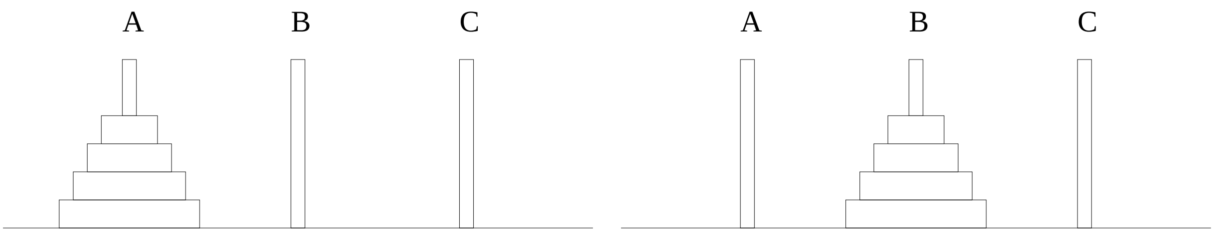
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ (2007-08)

Άσκηση 3

Στο *πρόβλημα των πύργων του Ανόι*[1] έχουμε τρεις στύλους, και ένα σύνολο από δίσκους, έστω πλήθους N, όλοι τους με διαφορετική διάμετρο. Κάθε δίσκος έχει μία τρύπα στο κέντρο του, έτσι ώστε να μπορεί να τοποθετηθεί σε κάποιο στύλο, περνώντας τον μέσα από την τρύπα. Σε μία τυχαία κατάσταση του προβλήματος, όλοι οι δίσκοι είναι τοποθετημένοι στους στύλους, με τον περιορισμό, όμως, ότι κάθε δίσκος πρέπει να είναι τοποθετημένος επάνω από μεγαλύτερό του δίσκο, ή στη βάση του στύλου. Αρχικά, και οι N δίσκοι είναι τοποθετημένοι στον πρώτο στύλο, σε φθίνουσα σειρά μεγέθους από κάτω προς τα επάνω (στη βάση βρίσκεται ο μεγαλύτερος δίσκος και στην κορυφή ο μικρότερος). Το ζητούμενο είναι να μεταφέρουμε όλους τους δίσκους από τον πρώτο στύλο στον δεύτερο, χρησιμοποιώντας σαν βοηθητικό τον τρίτο. Σε κάθε κίνησή μας, μπορούμε να μεταφέρουμε μόνο ένα δίσκο, ο οποίος πρέπει να είναι ο κορυφαίος κάποιου στύλου, σεβόμενοι, βέβαια, τον περιορισμό που αναφέρθηκε, ότι δηλαδή δεν θα πρέπει να τοποθετηθεί ο δίσκος επάνω από άλλον μικρότερης διαμέτρου.[2] Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται αριστερά η αρχική κατάσταση του προβλήματος για 4 δίσκους και δεξιά η επιθυμητή τελική κατάσταση.



Για την επίλυση του προβλήματος των πύργων του Ανόι, υπάρχει μία πολύ απλή αναδρομική λύση που μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

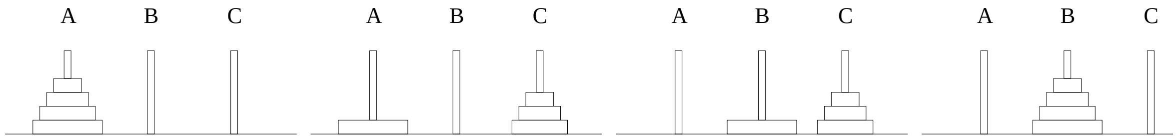
"*Για να μετακινήσουμε N δίσκους από ένα στύλο σ' έναν άλλο, αρκεί να μετακινήσουμε πρώτα τους πιο πάνω $N-1$ στον τρίτο βοηθητικό στύλο, μετά να μετακινήσουμε τον κάτω N-οστό δίσκο στον τελικό στύλο, και τέλος να μετακινήσουμε τους $N-1$ από τον τρίτο στον τελικό, με βοηθητικό τον πρώτο.*" Ουσιαστικά, δηλαδή, το πρόβλημα της μετακίνησης N δίσκων ανάγεται σε αυτό της μετακίνησης $N-1$ δίσκων. Τελικά, θα χρειαστεί να ξέρουμε και πώς να μετακινήσουμε ένα μόνο δίσκο, αλλά αυτό δεν είναι δύσκολο. Απλώς, τον μετακινούμε (ή σε ένα πρόγραμμα που επιλύει το πρόβλημα, απλώς εκτυπώνουμε ότι τον μετακινούμε). Αποδεικνύεται, μάλιστα, ότι αυτή η αναδρομική λύση είναι και η βέλτιστη δυνατή, δηλαδή η μετακίνηση των N δίσκων γίνεται με τις λιγότερες δυνατές κινήσεις.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα, για να μετακινήσουμε 4 δίσκους από τον στύλο A στον στύλο B, αρκεί να μετακινήσουμε πρώτα τους 3 επάνω δίσκους από τον στύλο A στον στύλο C, μετά να μετακινήσουμε τον τέταρτο δίσκο από τον A στον B και, τέλος, να μετακινήσουμε τους 3 δίσκους από τον C στον B. Για τις μετακινήσεις των 3 δίσκων, από τον A στον C και μετά από τον C στον B, εφαρμόζουμε την ίδια τακτική (αναγωγή του προβλήματος στη

[1] Το πρόβλημα των πύργων του Ανόι προτάθηκε από τον Γάλλο μαθηματικό Édouard Lucas το 1883, αλλά η προέλευσή του είναι ένας θρύλος που αναφέρεται στην ενασχόληση με το πρόβλημα κάποιων μοναχών στην Άπω Ανατολή και στη φημολογούμενη καταστροφή του κόσμου μόλις οι μοναχοί το επιλύσουν.

[2] Ο θρύλος των μοναχών λέει ότι στο μοναστήρι που ζουν υπάρχει ένα δωμάτιο με τρεις στύλους και 64 δίσκους στον πρώτο απ' αυτούς. Όταν καταφέρουν οι μοναχοί να μετακινήσουν και τους 64 δίσκους, χωρίς ποτέ να βάλουν ένα δίσκο επάνω από μικρότερό του, στο δεύτερο στύλο, χρησιμοποιώντας σαν βοηθητικό τον τρίτο, θα έλθει η συντέλεια του κόσμου. Υποθέστε ότι οι μοναχοί είναι σε θέση να μετακινούν ένα δίσκο το δευτερόλεπτο. Πρέπει να ανησυχούμε;

μετακίνηση 2 δίσκων, με τη βοήθεια του τρίτου στύλου, B ή A, αντίστοιχα).



Για εξάσκηση και προετοιμασία για τις απαιτήσεις της άσκησης αυτής, υλοποιήστε ένα πρόγραμμα C, το οποίο να διαβάζει από την είσοδο ένα θετικό ακέραιο αριθμό N και να επιλύει το πρόβλημα των πύργων του Ανόι, εκτυπώνοντας αναλυτικά τις κινήσεις που πρέπει να γίνουν για να μεταφερθούν N δίσκοι από τον στύλο A στον στύλο B, με βοηθητικό τον C. Μία πιθανή εκτέλεση αυτού του προγράμματος θα μπορούσε να είναι η εξής:

```
% ./hanoi3
Please, give number of disks: 4
Move a disk from peg A to peg C
Move a disk from peg A to peg B
Move a disk from peg C to peg B
Move a disk from peg A to peg C
Move a disk from peg B to peg A
Move a disk from peg B to peg C
Move a disk from peg A to peg C
Move a disk from peg A to peg B
Move a disk from peg C to peg B
Move a disk from peg C to peg A
Move a disk from peg B to peg A
Move a disk from peg C to peg B
Move a disk from peg A to peg C
Move a disk from peg A to peg B
Move a disk from peg C to peg B
%
```

Να σημειωθεί ότι το παραπάνω πρόγραμμα δεν είναι στα παραδοτέα της άσκησης αυτής. Απλώς, προτείνεται να το υλοποιήσετε, επειδή είναι μία πολύ καλή και απλή άσκηση για να δει κανείς την ιδέα της αναδρομής.

Ας πάμε τώρα στο πραγματικά ζητούμενο της άσκησης, που είναι και το παραδοτέο. Στα πλαίσια της άσκησης αυτής, καλείσθε να αντιμετωπίσετε μία παραλλαγή του προβλήματος των πύργων του Ανόι, στην οποία, αντί για τρεις στύλους, έχουμε τέσσερις. Είναι αναμενόμενο, βέβαια, όταν έχουμε περισσότερους από τρεις στύλους, άρα και περισσότερη ελευθερία στις κινήσεις μας, να απαιτούνται λιγότερες κινήσεις για να μετακινηθούν N δίσκοι από ένα στύλο σε κάποιον άλλο.

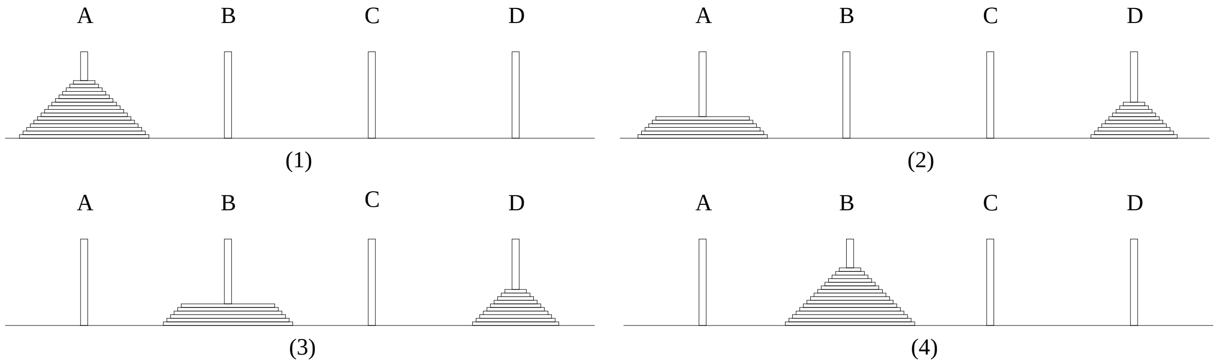
Ποιος είναι όμως ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων που χρειάζονται όταν έχουμε τέσσερις στύλους; Υπάρχει μία στρατηγική μετακίνησης N δίσκων, η οποία εικάζεται (πιστεύεται) ότι επιτυγχάνει το ζητούμενο με τον ελάχιστο αριθμό κινήσεων, δυστυχώς όμως δεν έχει ακόμα αποδειχθεί μαθηματικά αυτό, αν και έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά για αρκετές τιμές του N. Η στρατηγική, για τη μετακίνηση N δίσκων από τον στύλο A στον στύλο B, χρησιμοποιώντας σαν βοηθητικούς στύλους τους C και D, είναι η εξής:

1. Μετακινούμε τους K κορυφαίους δίσκους από τον στύλο A στον στύλο D, χρησιμοποιώντας σαν βοηθητικούς τους B και C.

2. Μετακινούμε τους υπόλοιπους $N-K$ δίσκους από τον στύλο A στον B, χρησιμοποιώντας σαν βοηθητικό τον C, δηλαδή κάνουμε μετακίνηση με τρεις στύλους.

3. Μετακινούμε τους K δίσκους από τον D στον B, χρησιμοποιώντας σαν βοηθητικούς τους A και C.

Την ιδέα αυτή μπορείτε να τη δείτε στο παρακάτω σχήμα, όπου $N = 16$ και $K = 10$.



Όμως, η στρατηγική που περιγράψαμε προφανώς θα δίνει διαφορετικά αποτελέσματα για διαφορετικές τιμές του K (από 1 έως $N-1$). Εκείνη η τιμή του K που μας δίνει τον ελάχιστο συνολικό αριθμό κινήσεων είναι αυτή που πρέπει να επιλέξουμε για να εφαρμόσουμε τη στρατηγική.

Ας δούμε λίγο και τα σχετικά μαθηματικά. Σε σχέση με τη μετακίνηση χρησιμοποιώντας τρεις στύλους, δηλαδή αυτήν που κάνουμε στο βήμα 2 προηγουμένως, έχουμε τα εξής. Αν $h3(N)$ είναι το πλήθος των κινήσεων για να μετακινήσουμε N δίσκους με τρεις στύλους, τότε, με βάση την αναδρομική διαδικασία που περιγράψαμε στην πρώτη σελίδα, θα πρέπει να ισχύει

$$h3(N) = 2 \cdot h3(N-1) + 1$$

και με το δεδομένο ότι $h3(1) = 1$, με λίγα μαθηματικά, προκύπτει ότι

$$h3(N) = 2^N - 1$$

Δοκιμάστε να το δουλέψετε στο χαρτί και θα δείτε ότι είναι εύκολο να καταλήξετε σ΄ αυτό το αποτέλεσμα.[3]

Τώρα, αν είναι $h(N, K)$ το πλήθος των κινήσεων που απαιτούνται για τη μετακίνηση N δίσκων, έχοντας τέσσερις στύλους, με πρώτο βήμα τη μετακίνηση των K κορυφαίων απ΄ αυτούς, τότε ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων $h4(N)$ για τη μετακίνηση των N δίσκων, με τέσσερις στύλους, θα είναι

$$h4(N) = min\{h(N, 1), h(N, 2), \ldots, h(N, N-1)\}$$

Φυσικά, $h4(1) = 1$ και, επίσης, θα πρέπει να ισχύει

$$h(N, K) = 2 \cdot h4(K) + h3(N-K)$$

Το ζητούμενο της άσκησης αυτής είναι να γράψετε ένα πρόγραμμα C το οποίο, για δεδομένο N, να υπολογίζει και να εκτυπώνει τόσο τον ελάχιστο αριθμό κινήσεων που απαιτούνται για τη μετακίνηση N δίσκων χρησιμοποιώντας τέσσερις στύλους, όσο και την τιμή του K που αντιστοιχεί σ΄ αυτόν τον ελάχιστο αριθμό, όπως περιγράψαμε στην παραπάνω στρατηγική. Επισημαίνεται ότι **δεν χρειάζεται**

[3] Τελικά, με τους μοναχούς τι γίνεται; Πόσο χρόνο θέλουν για να μετακινήσουν τους 64 δίσκους (με ρυθμό μετακίνησης ένα δίσκο το δευτερόλεπτο);

να εκτυπώνονται και οι κινήσεις που απαιτούνται για να γίνει η μετακίνηση των δίσκων. Το πρόγραμμά σας να είναι σε θέση να κάνει τους υπολογισμούς του, τόσο με αναδρομικό τρόπο όσο και επαναληπτικά, ανάλογα με το τι επιθυμεί ο χρήστης. Συνεπώς, θα πρέπει να διαβάζει από την είσοδο τόσο το N όσο και την επιθυμία του χρήστη για αναδρομική ή επαναληπτική αντιμετώπιση και να εκτυπώνει τα ζητούμενα (ελάχιστο αριθμό κινήσεων και αντίστοιχη τιμή του K).

Υποθέτοντας ότι το εκτελέσιμο πρόγραμμα που θα δημιουργήσετε έχει το όνομα "hanoi4", κάποια ενδεικτικά παραδείγματα εκτέλεσής του φαίνονται στη συνέχεια:

```
% ./hanoi4
Please, give number of disks: 5
Please, select method, 1 (recursive) or 2 (iterative): 1
Number of moves: 13 (move first the 2 top disks)
% ./hanoi4
Please, give number of disks: 16
Please, select method, 1 (recursive) or 2 (iterative): 2
Number of moves: 161 (move first the 10 top disks)
% ./hanoi4
Please, give number of disks: 30
Please, select method, 1 (recursive) or 2 (iterative): 1
Number of moves: 1025 (move first the 22 top disks)
% ./hanoi4
Please, give number of disks: 64
Please, select method, 1 (recursive) or 2 (iterative): 2
Number of moves: ....... (move first the .... top disks)
%
```

Μέχρι ποια τιμή του N η αναδρομική επίλυση ολοκληρώνεται σε λογικό χρόνο; Πάντως, θεωρήστε ότι δεν υπάρχει περίπτωση να κληθεί το πρόγραμμά σας με τιμή του N μεγαλύτερη του 64, γιατί αλλιώς θα έχετε πρόβλημα σχετικά με τον τύπο των μεταβλητών που θα πρέπει να ορίσετε σ' αυτό.[4]

Θα πρέπει να δομήσετε το πρόγραμμά σας σε ένα σύνολο από **τουλάχιστον δύο πηγαία αρχεία** C (με κατάληξη `.c`) και **τουλάχιστον ένα αρχείο επικεφαλίδας** (με κατάληξη `.h`).

Για να παραδώσετε το σύνολο των αρχείων που θα έχετε δημιουργήσει για την άσκηση αυτή, ακολουθήστε την εξής διαδικασία. Τοποθετήστε όλα τα αρχεία μέσα σ' ένα κατάλογο που θα δημιουργήσετε, έστω με όνομα `hanoi`, στους σταθμούς εργασίας Suns του Τμήματος. Επίσης, τοποθετήστε στον κατάλογο αυτό και ένα αρχείο με όνομα `README`, στο οποίο να δίνετε οδηγίες για τη μεταγλώττιση των αρχείων και την κατασκευή του τελικού εκτελέσιμου. Χρησιμοποιώντας την εντολή `zip` ως εξής

```
zip -r hanoi.zip hanoi
```

δημιουργείτε ένα συμπιεσμένο (σε μορφή `zip`) αρχείο, με όνομα `hanoi.zip`, στο οποίο περιέχεται ο κατάλογος `hanoi` μαζί με όλα τα περιεχόμενά του.[5] Το αρχείο αυτό είναι που θα πρέπει να υποβάλετε, με διαδικασία που θα ανακοινωθεί σύντομα.

[4] Αν οι μοναχοί χρησιμοποιήσουν τέσσερις στύλους αντί για τρεις, για να κάνουν τη μετακίνηση των 64 δίσκων, μήπως θα έπρεπε να ανησυχήσουμε τώρα για το πότε θα έλθει η συντέλεια του κόσμου;

[5] Αρχεία `zip` μπορείτε να δημιουργήσετε και στα Windows, με διάφορα προγράμματα, όπως, για παράδειγμα, το WinZip.