ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Τίτλος Μαθήματος

Ενότητα 3: Θεωρία λογικού προγραμματισμού

Παναγιώτης Σταματόπουλος
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Περιγραφή ενότητας

Σύνταξη και σημασιολογία λογικών προγραμμάτων. Μοντελοθεωρητική σημασιολογία, σημασιολογία σταθερού σημείου και λειτουργική σημασιολογία.

Θεωρία λογικού προγραμματισμού

Θεωρητικό υπόβαθρο

- Το θεωρητικό υπόβαθρο του λογικού προγραμματισμού είναι η λογική πρώτης τάξης (first order logic).
- Στη λογική πρώτης τάξης ορίζουμε τα εξής σύνολα:

P: σύνολο κατηγορημάτων (predicates)

F: σύνολο συναρτησιακών συμβόλων (function symbols)

V: σύνολο μεταβλητών (variables)

Θεωρητικό υπόβαθρο, συνέχεια

- Σε κάθε κατηγόρημα ή συναρτησιακό σύμβολο k αντιστοιχεί ένας ακέραιος αριθμός n>=0 που λέγεται βαθμός ή τάξη (arity) του k. Το k συμβολίζεται και σαν k/n.
- Τα συναρτησιακά σύμβολα τάξης 0 αναφέρονται και σαν σταθερές (constants).

Ορισμός όρου (term)

Ένας όρος ορίζεται ως εξής:

1. Αν $x \in V$, το x είναι όρος
2. Αν $c/0 \in F$, το c είναι όρος
3. Αν $f/n \in F$ και $t_1, t_2, \ldots, t_n$ είναι όροι, το $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ είναι όρος.

Ορισμός ατομικού τύπου (atomic formula) ή ατόμου (atom)

- Ένα άτομο ορίζεται ως εξής:

  1. Αν $p/0 \in P$, το p είναι άτομο

  2. Αν $p/n \in P$ και $t_1, t_2, \ldots, t_n$ είναι όροι

Συνδετικά (connectives) (1/3)

Στη λογική πρώτης τάξης, τα συνδετικά (connectives) είναι εργαλεία δόμησης πιο σύνθετων τύπων.

$\neg$: άρνηση (negation)

$\wedge$: σύζευξη (conjunction)

$\vee$: διάζευξη (disjunction)

$\rightarrow$: συνεπαγωγή (implication)

$\leftrightarrow$: ισοδυναμία (equivalence)

$\forall$: καθολικός ποσοδείκτης (universal quantifier)

$\exists$: υπαρξιακός ποσοδείκτης (existential quantifier)

Ορισμός καλοσχηματισμένου τύπου (well-formed formula)

- Ορισμός καλοσχηματισμένου τύπου (well-formed formula) ή τύπου
  1. Αν το A είναι άτομο, τότε το A είναι τύπος.
  2. Αν τα F και G είναι τύποι, τότε και τα $(\neg F)$, $(F\wedge G)$, $(F\vee G)$, $(F\rightarrow G)$, $(F\leftrightarrow G)$ είναι τύποι.
  3. Αν το F είναι τύπος και $x\in V$, τότε τα $(\forall x\in F)$ και $(\exists x\in F)$ είναι τύποι.
- Μερικές φορές, είναι βολικό το $F\rightarrow G$ να γράφεται $G\leftarrow F$.

Παραδείγματα τύπων

- Αν x, y$\in$ V, p/2, q/1, r/1$\in$ P, a/0, f/1, g/1$\in$ F τα

  $(\forall x\ \exists(y\ \ (p(x, y)\rightarrow q(x))))$

  $(\neg\ (\ \exists x\ \ (p(x, a)\wedge q(f(x)))))$

  $(\forall x\ (p(x, g\ (x))\ \leftarrow(q(x)\wedge(\neg r(x)))))$, είναι τύποι

Συνδετικά (connectives) (2/3)

- Μία υπονοούμενη ιεραρχία / $\neg$, $\forall$, $\exists$ / $\vee$ / $\wedge$ / $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ / μεταξύ των συνδετικών απλοποιεί συντακτικά τους τύπους:
  - $\forall x\ \exists y\ (p(x, y) \rightarrow q(x))$
  - $\neg\ \exists x\ (p(x, a) \wedge q(f(x)))$
  - $\forall x\ (p(x, g(x)) \leftarrow q(x) \wedge \neg r(x))$

Συνδετικά (connectives) (3/3)

- Δεδομένων συνόλων P, F και V, το σύνολο όλων των συντακτικά αποδεκτών τύπων αποτελεί μία γλώσσα πρώτης τάξης (first order language).
- Η εμβέλεια (scope) του $\forall$ στον τύπο $\forall x$ F ή $\exists$ του στον τύπο $\exists x$ F είναι ο τύπος F.

Δεσμευμένη εμφάνιση (bound occurrence)

- Μια δεσμευμένη εμφάνιση (bound occurrence) μεταβλητής σε έναν τύπο είναι μια εμφάνιση αμέσως μετά από έναν ποσοδείκτη ή μέσα στην εμβέλεια ενός ποσοδείκτη που “ποσοτικοποιεί”αυτήν τη μεταβλητή.
- Οποιαδήποτε άλλη εμφάνιση μεταβλητής λέγεται ελεύθερη εμφάνιση (free occurrence).
- Παράδειγμα: Η τρίτη εμφάνιση της μεταβλητής x στον τύπο $\exists x\ p(x, y) \wedge q(x)$είναι ελεύθερη, ενώ στον τύπο $\exists x\ (p(x, y) \wedge q(x))$ είναι δεσμευμένη.

Κλειστός τύπος (closed formula)

- Ένας τύπος λέγεται κλειστός τύπος (closed formula) όταν δεν περιέχει ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών.
- Παράδειγμα: Ο τύπος $\forall y\ \exists x\ (p(x, y) \wedge q(x))$ είναι κλειστός, αλλά ο τύπος $\exists x\ (p(x, y) \wedge q(x))$ δεν είναι (γιατί;).

Λεκτικό (literal) και προτάσεις (clauses)

- Ένα λεκτικό (literal) είναι ένα άτομο ή η άρνηση ενός ατόμου.
- Μία πολύ σημαντική κατηγορία τύπων είναι οι προτάσεις (clauses) που είναι τύποι της μορφής: $\forall x1\ \forall x2\ \ldots.\ \forall xs\ (L1 \vee L2 \vee \ldots \vee Lm)$όπου τα Li είναι λεκτικά και τα xj είναι όλες οι μεταβλητές που εμφανίζονται στο $L1 \vee L2 \vee \ldots \vee Lm$.

Περί προτάσεων (1/2)

- Παραδείγματα:
- $\forall x \forall y \forall z \ (p(x, z) \vee \neg q(x, y) \vee \neg r(y, z))$
- $\forall x \forall y \ (\neg p(x, y) \vee r(f(x, y), a))$
- $\forall x \forall y \ (p(x, y) \vee q(x, y) \vee \neg r(a, x))$
- $\forall x \neg p(x, x) \vee \neg q(x, x))$
- Εναλλακτική γραφή:
- Η πρόταση $\forall x1 \ldots \forall xs \ (A1 \vee \ldots \vee Ak \vee \neg B1 \vee \ldots. \vee \neg Bn)$. όπου τα Ai και Bj είναι άτομα, γράφεται και σαν:

$$A1 , \ldots.. , Ak \leftarrow B1 , \ldots\ldots , Bn$$

- Το αριστερό μέλος του $\leftarrow$ ονομάζεται κεφαλή (head) της πρότασης, ενώ το δεξιό μέλος ονομάζεται σώμα (body).

Περί προτάσεων (2/2)

- Οι προτάσεις με k = 1 (A ← B1, ..., Bn) λέγονται οριστικές (definite) προτάσεις.
- Οι οριστικές προτάσεις με n = 0 (A←) λέγονται μοναδιαίες (unit) προτάσεις.
- Ένα σύνολο οριστικών προτάσεων είναι ένα οριστικό πρόγραμμα.
- Οι προτάσεις με k = 0 (← B1, ... , Bn) λέγονται οριστικοί στόχοι (definite goals).
- Για k = 0 και n = 0, έχουμε την κενή (empty) πρόταση (← ή □), που αναφέρεται και σαν αντίφαση (contradiction).
- Μια πρόταση Horn είναι είτε μία οριστική πρόταση, είτε ένας οριστικός στόχος (μας θυμίζει την Prolog;).

Σύνταξη και σημασιολογία (syntax and semantics)

- Ό,τι έχει αναφερθεί μέχρι στιγμής στα θεωρητικά θέματα σχετίζεται μόνο με τη σύνταξη στη λογική πρώτης τάξης. Αυτό που ενδιαφέρει όμως στο λογικό προγραμματισμό είναι και η σημασιολογία, δηλαδή η μελέτη της σημασίας των λογικών προγραμμάτων. Συνήθως, τρεις μέθοδοι εφαρμόζονται:
  – Μοντελοθεωρητική σημασιολογία (Model-theoretic semantics)
  – Σημασιολογία σταθερού σημείου (Fixpoint semantics)
  – Λειτουργική σημασιολογία (Operational semantics)
- Με βάση αυτές τις μεθόδους, θα μελετηθεί η σημασία των οριστικών προγραμμάτων. Οι τρεις μέθοδοι καταλήγουν σε ισοδύναμα συμπεράσματα.

Μερικοί ορισμοί

- Ένας όρος ή τύπος που δεν περιέχει μεταβλητές λέγεταιπλήρως αποτιμημένος (ground).
- Αν L είναι μία γλώσσα πρώτης τάξης, το σύνολο των πλήρως αποτιμημένων όρων που κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας τα συναρτησιακά σύμβολα της L (συμπεριλαμβανομένων και των σταθερών) ονομάζεται σύμπαν Herbrand (Herbranduniverse) UL. Αν δεν υπάρχει σταθερά στη γλώσσα, εισάγεται μία αυθαίρετη, για να υπάρχει μη κενό UL.
- Για δεδομένη γλώσσα L, το σύνολο των πλήρως αποτιμημένων ατομικών τύπων (ατόμων) αποτελεί τη βάση Herbrand (Herbrand base) BL. Δηλαδή, το BL περιέχει όλα τα δυνατά άτομα με κατηγορήματα της L και ορίσματα από το UL.

Μοντελοθεωρητική σημασιολογία (1/8)

- Λαμβάνοντας υπόψη τις έννοιες του σύμπαντος Herbrand UL και της βάσης Herbrand BL για μία γλώσσα πρώτης τάξης L, ένα υποσύνολο I του BL ονομάζεται ερμηνεία Herbrand (Herbrand interpretation), ή, στο εξής, απλά ερμηνεία.
- Ουσιαστικά, μία ερμηνεία αντιστοιχεί σε κάθε κατηγόρημα p/n της L μία σχέση επάνω στο UL^n.
- Παράδειγμα:

Αν UL = {a, b, c} και

BL = {p(a), p(b), p(c), q(a), q(b), q(c), r(a), r(b), r(c)} μία ερμηνεία I είναι η

I = {p(a), p(c), q(c), r(b)}

Μοντελοθεωρητική σημασιολογία (2/8)

- Άτυπα, μια ερμηνεία περιγράφει μία υποψήφια κατάσταση του περιβάλλοντος κόσμου, με την έννοια ότι περιέχει εκείνα τα πλήρως αποτιμημένα άτομα που αντιστοιχούν στο τι ισχύει στην κατάσταση αυτή.
- Δεδομένης μίας ερμηνείας, ένας κλειστός τύπος μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής στην ερμηνεία αυτή. Αν ένας τύπος είναι αληθής σε μία ερμηνεία Herbrand, ή ερμηνεία αυτή είναι μοντέλο Herbrand (Herbrand model),ή, στο εξής, απλά μοντέλο του τύπου αυτού. Μία ερμηνεία είναι μοντέλο ενός συνόλου από κλειστούς τύπους, αν είναι μοντέλο για κάθε τύπο του συνόλου.

Μοντελοθεωρητική σημασιολογία (3/8)

- Ένας κλειστός τύπος είναι αληθής σε μία ερμηνεία I αν:
  - είναι ένα πλήρως αποτιμημένο άτομο A και A $\in$ I
  - είναι της μορφής $\neg$F και ο τύπος F δεν είναι αληθής στην I
  - είναι της μορφής F $\wedge$ G και οι τύποι F και G είναι αληθείς στην I
  - είναι της μορφής F $\vee$G και κάποιος από τους τύπους F ή G είναι αληθής στην I
  - είναι της μορφής F $\rightarrow$ G (ή G $\leftarrow$ F) και είτε ο τύπος F δεν είναι αληθής στην I, είτε και ο F και ο G είναι αληθείς στην I.

Μοντελοθεωρητική σημασιολογία (4/8)

– είναι της μορφής F $\leftrightarrow$ G και είτε και οι δύο (F και G) είναι αληθείς στην I, είτε και οι δύο δεν είναι αληθείς στην I

– είναι της μορφής $\forall$x F και για όλα τα d $\in$UL αν αντικατασταθεί η μεταβλητή x στον τύπο F με το d, οι τύποι που προκύπτουν να είναι αληθείς στην I

– είναι της μορφής $\exists$x F και υπάρχει κάποιο d $\in$UL τέτοιο ώστε αν αντικατασταθεί η μεταβλητή x στον τύπο F με το d, ο τύπος που προκύπτει να είναι αληθής στην I

Μοντελοθεωρητική σημασιολογία (5/8)

- Ένας κλειστός τύπος είναι ψευδής σε μία ερμηνεία I αν δεν είναι αληθής στην I.
- Η τιμή αλήθειας των ανοικτών τύπων μπορεί να ορισθεί μόνο σε σχέση με μία αντικατάσταση των ελευθέρων εμφανίσεων μεταβλητών τους από στοιχεία του UL(οπότε πλέον γίνονται κλειστοί τύποι).

Μοντελοθεωρητική σημασιολογία (6/8)

- Από την εφαρμογή του ορισμού απόδοσης τιμής αλήθειας σε προτάσεις προκύπτει ότι μία ερμηνεία I είναι μοντέλο για μία πρόταση, αν για κάθε δυνατή αντικατάσταση των μεταβλητών της πρότασης με στοιχεία από το UL, η πρόταση που προκύπτει είναι αληθής στην I, δηλαδή είτε κάποιο από τα πλήρως αποτιμημένα άτομα της κεφαλής είναι αληθές στην I, είτε κάποιο από τα πλήρως αποτιμημένα άτομα του σώματος είναι ψευδές στην I.

Μοντελοθεωρητική σημασιολογία (7/8)

- Αν S είναι ένα σύνολο από κλειστούς τύπους και F είναι ένας κλειστός τύπος, τότε ο F είναι λογικό επακόλουθο(logical consequence) του S (συμβολικά S $\models$ F), αν κάθε μοντέλο του S είναι και μοντέλο του F. Τότε, αποδεικνύεται ότι το S $\cup$ {$\neg$F} δεν έχει μοντέλο.
- Αν P είναι ένα οριστικό πρόγραμμα, αποδεικνύεται ότι ητ ομή δύο μοντέλων του είναι επίσης μοντέλο. Η τομή Μ ρόλων των μοντέλων του P είναι το ελάχιστο μοντέλο Herbrand (least Herbrand model) του P.

Μοντελοθεωρητική σημασιολογία (8/8)

- Αν P είναι ένα οριστικό πρόγραμμα, αποδεικνύεται ότι η τομή δύο μοντέλων του είναι επίσης μοντέλο. Η τομή Mp όλων των μοντέλων του P είναι το ελάχιστο μοντέλο Herbrand (least Herbrand model) του P.
- Αν P είναι ένα οριστικό πρόγραμμα σε μία γλώσσα πρώτης τάξης L, αποδεικνύεται ότι

$$Mp = \{ A \in BL \mid P \models A \}$$

Δηλαδή, το ελάχιστο μοντέλο ενός οριστικού προγράμματος αποτελείται από όλα τα λογικά επακόλουθα του προγράμματος. Αυτό είναι το αποτέλεσμα της μοντελοθεωρητικής σημασιολογίας.

Παράδειγμα

- Έστω το οριστικό πρόγραμμα P:

  $p(x) \leftarrow q(x)$

  $q(x) \leftarrow r(x)$

  $p(a) \leftarrow$

  $q(b) \leftarrow$

  $r(c) \leftarrow$

Τότε έχουμε:

UL = {a, b, c}

BL = {p(a), p(b), p(c), q(a), q(b), q(c), r(a), r(b), r(c)}

Το ελάχιστο μοντέλο Herbrand Mp του P είναι:

Mp = {p(a), p(b), p(c), q(b), q(c), r(c)}

Πόσο εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε το Mp;

Σημασιολογία σταθερού σημείου (1/4)

Η σημασιολογική προσέγγιση μέσω σταθερού σημείου παρέχει μία κατασκευαστική μέθοδο υπολογισμού του ελάχιστου μοντέλου Herbrand ενός οριστικού προγράμματος.

Αν T είναι μία απεικόνιση σε ένα σύνολο L, δηλαδή $T : L \rightarrow L$, ένα στοιχείο $a \in L$ ονομάζεται σταθερό σημείο (fixpoint) της T αν ισχύει $T(a) = a$.

Σημασιολογία σταθερού σημείου (2/4)

- Αν στο L έχει ορισθεί μία σχέση μερικής διάταξης (partial order) και με τις επιπλέον προϋποθέσεις(χωρίς να αναλύσουμε τους απαιτούμενους ορισμούς)το L να είναι πλήρες πλέγμα (complete lattice) και η T συνεχής (continuous), αποδεικνύεται ότι η T έχει ένα ελάχιστο σταθερό σημείο (least fixpoint), συμβολικά lfp(T), το οποίο ισούται με

$$\mathrm{lfp}\,(T) = \mathrm{lub}\,(\,\{\perp, T\,(\perp)\,,\, T\,(T\,(\perp))\,,\, T(\,T(\,T(\perp)))\,, \ldots\}\,)$$

όπου $\perp$ είναι το ελάχιστο στοιχείο (bottom element) του L και το lub(X) είναι το ελάχιστο άνω φράγμα (least upperbound) ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου X.

- Δεδομένου ενός οριστικού προγράμματος P επάνω σε μία γλώσσα πρώτης τάξης L και θεωρώντας τη σχέση μερικής διάταξης $\subseteq$ στο σύνολο 2^{B_L} όλων των δυνατών ερμηνειών για το P, αποδεικνύεται ότι το 2^{B_L} είναι πλήρες πλέγμα (με $\perp = \varnothing$).

Σημασιολογία σταθερού σημείου (3/4)

- Ορίζοντας την απεικόνιση Tp από ερμηνείες σε ερμηνείες, δηλαδή Tp : $2^{B_L} \rightarrow 2^{B_L}$, με

$$Tp\ (I) = \{\ A \in BL \mid A \leftarrow A1\ , \ldots , An\ \}$$

είναι πλήρως αποτιμημένο στιγμιότυπο μιας πρότασης του P και {A1 , … , An} $\subseteq$I } αποδεικνύεται ότι η Tp είναι συνεχής, άρα έχει ελάχιστο σταθερό σημείο, το lfp(Tp) = lub ({∅, Tp (∅) , Tp (Tp (∅)) , …..})

- Τέλος, αποδεικνύεται ότι το ελάχιστο μοντέλο HerbrandMp του P ισούται με το ελάχιστο σταθερό σημείο της Tp,δηλαδή Mp = lfp(Tp). Αυτό είναι το αποτέλεσμα τηςσημασιολογίας σταθερού σημείου.

Σημασιολογία σταθερού σημείου (4/4)

Στο παράδειγμα οριστικού προγράμματος της προηγούμενης μεθόδου σημασιολογίας έχουμε:

-

- $T_P(\varnothing) = \{p(a), q(b), r(c)\}$
- $T_P(T_P(\varnothing)) = T_P(\{p(a), q(b), r(c)\}) =$

  $= \{p(a), p(b), q(b), q(c), r(c)\}$
- $T_P(T_P(T_P(\varnothing))) = T_P(\{p(a), p(b), q(b), q(c), r(c)\}) =$

  $= \{p(a), p(b), p(c), q(b), q(c), r(c)\}$
- $T_P(T_P(T_P(T_P(\varnothing)))) = T_P(\{p(a), p(b), p(c), q(b), q(c), r(c)\}) =$

  $= \{p(a), p(b), p(c), q(b), q(c), r(c)\}$
- ....

Άρα: $M_P = \{p(a), p(b), p(c), q(b), q(c), r\ (c)\}$

Λειτουργική σημασιολογία (1/2)

- Η λειτουργική σημασιολογία σχετίζεται με την παραγωγή νέας γνώσης από υπάρχουσα, μέσα από μία διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων που συνίσταται σε πεπερασμένο αριθμό εφαρμογών ενός κανόνα συμπερασμού (inference rule).
- Για δεδομένη διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων, αν από ένα σύνολο κλειστών τύπων S συμπεραίνεται (is inferred) ένας κλειστός τύπος F, γράφουμε $S \vdash F$.
- Για τα οριστικά προγράμματα, η διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων που εφαρμόζεται είναι η SLD-ανάλυση(SLD-resolution).

Λειτουργική σημασιολογία (2/2)

- Για την εισαγωγή του κανόνα συμπερασμού της SLD-ανάλυσης, απαιτείται να ορισθούν οι έννοιες της αντικατάστασης, της ενοποίησης, του γενικότερου ενοποιητή, κ.λ.π.
- Αντικατάσταση (substitution)Μια αντικατάσταση θ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο της μορφής {v1/t1, …., vn/tn} όπου τα vi είναι μεταβλητές και τα ti είναι όροι (κάθε ti είναι διαφορετικό από το αντίστοιχο vi και όλα τα vi είναι διαφορετικά μεταξύ τους). Ουσιαστικά, μία αντικατάσταση ορίζει ότι τα vi είναι δεσμευμένα με (έχουν πάρει σαν τιμές) τα αντίστοιχα ti. Η κενή (empty) αντικατάσταση ορίζεται από το κενό σύνολο.

Στιγμιότυπο (instance)

- Αν E είναι ένας όρος, λεκτικό, σύζευξη λεκτικών ή διάζευξη λεκτικών, το Eθ λέγεται στιγμιότυπο του E μέσω της αντικατάστασης θ = {v1/t1, …., vn/tn} αν στο E αντικατασταθούν ταυτόχρονα οι εμφανίσεις των μεταβλητών vi με τα αντίστοιχα ti .

Παραλλαγή (variant)

- Αν E και F είναι όροι, λεκτικά, συζεύξεις λεκτικών ή διαζεύξεις λεκτικών, το E λέγεται παραλλαγή του F (ή το F παραλλαγή του E) αν υπάρχουν αντικαταστάσεις θ και σ τέτοιες ώστε $E = F\theta$ και $F = E\sigma$.

Σύνθεση (composition) αντικαταστάσεων

- Αν θ = {u1/s1, …., um/sm} και σ = {v1/t1, …, vn/tn} είναι δύο αντικαταστάσεις, η σύνθεση τους θσ είναι η αντικατάσταση {u1/s1σ, …., um/smσ, v1/t1, …., vn/tn} διαγράφοντας από αυτήν κάθε ui/siσ για το οποίο ui = siσ και κάθε vj/tj για το οποίο vj∈{u1, …, um}

Ενοποίηση (unification)

- Αν S = {E1, ..., En} ένα σύνολο όρων ή ατόμων, μία αντικατάσταση θ λέγεται ενοποιητής (unifier) για το S αν το Sθ = {E1θ, ..., Enθ} είναι μονοσύνολο.
- Ένας ενοποιητής θ για το S είναι ο γενικότερος ενοποιητής (most generalunifier) mgu για το S, αν για κάθε ενοποιητή σ του S, υπάρχει αντικατάσταση γ τέτοια ώστε σ = θγ. Η διαδικασία υπολογισμού του mgu ενός S λέγεται ενοποίηση.

Κανόνας συμπερασμού της SLD-ανάλυσης

- Αν το G είναι ένας οριστικός στόχος A1 , …. , Am , …. , Ak και C μια οριστική πρόταση A B1 , …. , Bq, τότε το G’ = (A1 , … , Am-1 , B1 …. , Bq , Am+1 , …. , Ak)θ παράγεται(is derived) από τα G και C, όπου θ είναι ο mgu των ατόμων Am και A.

SLD – απόρριψη (SLD – refutation)

- Δεδομένου ενός οριστικού προγράμματος P επάνω σε μία γλώσσα πρώτης τάξης L και ενός οριστικού στόχου G, μία SLD-απόρριψη (SLD-refutation) του $P \cup \{G\}$ είναι μία διαδοχική εφαρμογή του προηγούμενου κανόνα συμπερασμού πεπερασμένο αριθμό βημάτων, όπου σε κάθε βήμα χρησιμοποιείται ο στόχος που παρήχθη στο προηγούμενο βήμα(στο πρώτο βήμα ο G) και μία παραλλαγή κάποιας πρότασης του P (τέτοια ώστε οι μεταβλητές της να είναι διαφορετικές από αυτές που έχουν χρησιμοποιηθεί μέχρι εκείνη τη στιγμή) και επιπλέον ο τελευταίος στόχος που παράγεται είναι η κενή πρόταση$\square$.
- Το σύνολο όλων των $A \in BL$ για τα οποία το $P \cup \{\leftarrow A\}$ έχει κάποια SLD-απόρριψη ονομάζεται σύνολο επιτυχίας (success set) του P, συμβολικά SS(P).

Σύνολο επιτυχίας

- Αποδεικνύεται ότι το σύνολο επιτυχίας ενός οριστικού προγράμματος ισούται με το ελάχιστο μοντέλο Herbrandτου προγράμματος. Δηλαδή Mp = SS(P).
- Στο παράδειγμα του προγράμματος P που δόθηκε, ποιες είναι οι SLD-απορρίψεις του $P \cup \{\leftarrow A\}$ για κάθε $A \in Mp$;

Λογικός προγραμματισμός με περιορισμούς (constraint logic programming) (1/4)

- Ο λογικός προγραμματισμός με περιορισμούς είναι μία επέκταση του λογικού προγραμματισμού η οποία παρέχει τη δυνατότητα δηλωτικής, και ταυτόχρονα αποδοτικής, αντιμετώπισης προβλημάτων που μπορούν να διατυπωθούν σαν προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών (constraint satisfaction problems).
- Ένα πρόβλημα είναι πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών όταν μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα σύνολο μεταβλητών και ένα σύνολο περιορισμών (constraints) μεταξύ των μεταβλητών αυτών.

Λογικός προγραμματισμός με περιορισμούς (constraint logic programming) (2/4)

- Οι μεταβλητές μπορούν να παίρνουν τιμές από προκαθορισμένα σύνολα δυνατών τιμών. Το ζητούμενο είναι να βρεθούν εκείνοι οι συνδυασμοί τιμών των μεταβλητών (λύσεις του προβλήματος)που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς. Πολλές φορές, σε κάθε υποψήφια λύση αντιστοιχεί ένα κόστος (συνάρτηση των μεταβλητών), οπότε αυτό που ενδιαφέρει είναι να βρεθεί εκείνη η λύση που έχει το μικρότερο δυνατό κόστος. Τότε το πρόβλημα είναι και πρόβλημα βελτιστοποίησης (optimization problem).
- Ο φυσιολογικός τρόπος επίλυσης ενός προβλήματος ικανοποίησης περιορισμών είναι ίσως η μέθοδος “γέννα-και-δοκίμασε” (“generate-and-test”) . Δηλαδή, “γέννα συστηματικά τους δυνατούς συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών και, για κάθε έναν από αυτούς, έλεγξε αν ισχύουν οι περιορισμοί”. Όμως, η μέθοδος αυτή μπορεί να δώσει αποτελέσματα μόνο όταν το πρόβλημα είναι σχετικά μικρού μεγέθους (λίγες μεταβλητές και λίγες δυνατές τιμές γι’ αυτές).

Λογικός προγραμματισμός με περιορισμούς (constraint logic programming) (3/4)

- Στο λογικό προγραμματισμό με περιορισμούς, η χρησιμοποιούμενη μέθοδος είναι η “περιόρισε-και-γέννα” (“constrain-and-generate”).Δηλαδή, “διατύπωσε τους περιορισμούς, έτσι ώστε να χρησιμοποιηθούν αυτοί ενεργά για να αποκόψουν πιθανές τιμές από τις μεταβλητές, και, στη συνέχεια, ξεκίνησε μία συστηματική διαδικασία γέννησης τιμών για τις μεταβλητές, αλλά σε κάθε βήμα να ενεργοποιείς πάλι τους περιορισμού για να φροντίσουν για άλλες δυνατές αποκοπές τιμών”.
- Υπάρχουν διάφορες δυνατότητες υποστήριξης προγραμματισμού με περιορισμούς από γλώσσες λογικού προγραμματισμού, ανάλογα με το είδος των δυνατών τιμών για τις μεταβλητές και το είδος των περιορισμών που καλύπτονται. Η γλώσσα ECLiPSe υποστηρίζει, μεταξύ άλλων, αριθμητικούς, λογικούς, συμβολικούς κ.α. περιορισμούς σε μεταβλητές πεπερασμένων πεδίων (finite domain variables).

Λογικός προγραμματισμός με περιορισμούς (constraint logic programming) (4/4)

- Η μεθοδολογία επίλυσης ενός προβλήματος ικανοποίησης περιορισμών στην ECL^{i}PS^{e} συνίσταται σε:
  - Ορισμό των μεταβλητών που χρειάζονται για το πρόβλημα, καθώς και των πεδίων τους.
  - Διατύπωση των περιορισμών που μοντελοποιούν το πρόβλημα.
  - Μη-ντετερμινιστική γέννηση τιμών για τις μεταβλητές για την εύρεση μίας, όλων ή της βέλτιστης λύσης.

Το πρόβλημα των Ν βασιλισσών (ECL^{i}PS^e) (1/3)

```
nqueens(N, Solution) :-
    length(Solution, N),
    Solution :: 1..N,
    constrain(Solution),
    generate(Solution).
constrain([]).
constrain([Column|Columns]) :-
    noattack(Column, Columns, 1),
    constrain(Columns).
noattack(_, [], _).
```

Το πρόβλημα των Ν βασιλισσών (ECL^{i}PS^{e}) (2/3)

```
noattack(Column1, [Column2|Columns], Offset) :-
    Column1 ## Column2,
    Column1 ## Column2+Offset,
    Column1 ## Column2-Offset,
    NewOffset is Offset+1,
    noattack(Column1, Columns, NewOffset).
generate([]).
generate([Column|Columns]) :-
    indomain(Column),
    generate(Columns).
```

Το πρόβλημα των Ν βασιλισσών (ECL^{i}PS^{e}) (3/3)

- Η ιδέα του προγραμματισμού με περιορισμούς, αν και “γεννήθηκε” στο περιβάλλον του λογικού προγραμματισμού, έχει ενσωματωθεί πλέον και σε άλλες προγραμματιστικές φιλοσοφίες, όπως τον αντικειμενοστραφή προγραμματισμό (ILOG Solver: C++ βιβλιοθήκη για προγραμματισμό με περιορισμούς).
- Οι περιοχές εφαρμογής του προγραμματισμού με περιορισμούς είναι πάρα πολλές, κυρίως σε προβλήματα συνδυαστικής αναζήτησης (combinational search) τα οποία έχουν αντιμετωπισθεί στο παρελθόν με μεθόδους επιχειρησιακής έρευνας (operations research), όπως:
  - Κατασκευή ωρολογίων προγραμμάτων
  - Προγραμματισμός προσωπικού
  - Σχεδίαση παραγωγής
  - Διανομή αγαθών…………

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Παναγιώτης Σταματόπουλος, Ιζαμπώ Καράλη. «Λογικός Προγραμματισμός, Θεωρία λογικού προγραμματισμού». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI117/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες