Υπολογιστική Γεωμετρία

1ο Μέρος: Κυρτότητα (γ)

Γιάννης Εμίρης

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εαρ.2015

Outline

1. Δυϊσμός
   - Απλή Πόλωση
   - Γενίκευση της Πόλωσης

2. Γραμμική βελτιστοποίηση / ΓΠ
   - Εισαγωγή
   - Αλγόριθμοι

Δυϊσμός

Ορισμός

Δυϊσμός στο επίπεδο είναι μια αντιστοίχηση σημείων με ευθείες τ.ώ.

- ένα σημείο p αντιστοιχείται στη μοναδική ευθεία p^*,
- μια ευθεία h αντιστοιχείται στο μοναδικό σημείο h^*
- και ισχύει $(p^*)^* = p$, $(h^*)^* = h$.
- Επιπλέον μπορεί να ισχύει $p \in h \Leftrightarrow h^* \in p^*$.

Παρακάτω θα δούμε μετασχηματισμούς σημείων σε ευθείες και τούμπαλιν που ικανοποιούν τον ορισμό.

Σε γενική διάσταση, πρόκειται για αντιστοίχηση σημείων και υπερεπιπέδων.

Απλή Πόλωση

Ορισμός (Απλή Πόλωση)

Έστω O η αρχή των αξόνων. Ορίζουμε 1-1 αντιστοιχία μεταξύ $p \in \mathbb{R}^d - \{O\}$ και (υπερ)επιπέδου $p^* \subset \mathbb{R}^d$ που δεν περνά από το O:

$$p^* := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ p \cdot x = 1\}.$$

Επιπλέον, το πολικό υπερεπιπέδου $h : O \notin h$, είναι το σημείο $h^* \in \mathbb{R}^d - \{0\}$:

$$h^* \cdot y = 1, \ \forall y \in h.$$

Λήμμα

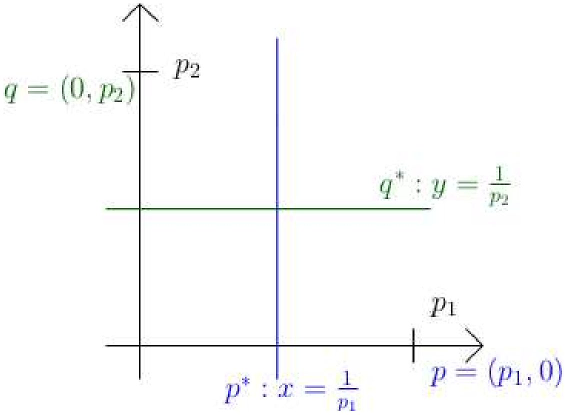
Στο επίπεδο, $h_0 \neq 0$ διότι $O \notin h$, άρα:

$$p = (p_1, p_2) \mapsto p^* : p_1 x + p_2 y = 1,$$

$$h : h_1 x + h_2 y = h_0 \mapsto h^* = (h_1/h_0, h_2/h_0).$$

Παράδειγμα I

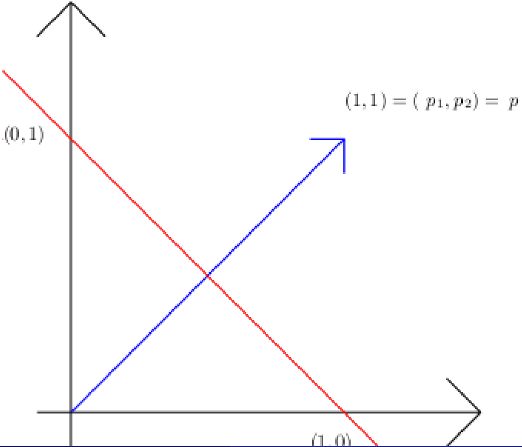
Για $p_1 = (p_1, 0)$ η $p_1^* : x = 1/p_1$ είναι κάθετη στον x-άξονα στο $(1/p_1, 0)$.
Για $q = (0, p_2)$, η $q^* : y = 1/p_2$ είναι κάθετη στον y-άξονα στο $(0, 1/p_2)$.



Παράδειγμα II

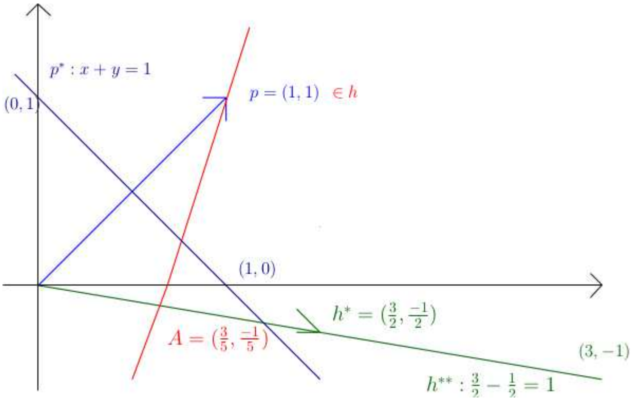
Για $p = (p_1, p_1)$, η p^* περιέχει τα $(x, y) : xp_1 + yp_1 = 1$, δηλ. κάθετη στην ευθεία $x = y$ στο $(1/2p_1, 1/2p_2)$.

Παράδειγμα για $p = (1, 1)$:



Παράδειγμα III

Έστω η ευθεία $h : 3x - y - 2 = 0$. Αυτή αντιστοιχεί στο σημείο $h^* = (\frac{3}{2}, \frac{-1}{2})$ και αυτό στην ευθεία $h^{**} : \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y = 1$.



Ιδιότητες της Απλής Πόλωσης

Λήμμα

Για το μετασχηματισμό απλής πόλωσης ισχύει:

- $(p^*)^* = p, (h^*)^* = h$, *άρα η πόλωση αποτελεί μετασχηματισμό δυϊσμού,*
- $p \in h \Leftrightarrow h^* \in p^*$,
- $p \in$ *ημιχώρο του* h *που περιλαμβάνει το* O *ανν* $h^* \in$ *αντίστοιχο ημιχώρο του* p^*.

Απόδειξη.

Στο επίπεδο:

$$p = (p_1, p_2) \mapsto p^* : p_1 x + p_2 y = 1 \mapsto p^{**} = (p_1, p_2),$$

$$h : h_1 x + h_2 y + h_0 = 0 \mapsto h^* = (\frac{h_1}{h_0}, \frac{h_2}{h_0}) \mapsto h^{**} : \frac{h_1}{h_0} x + \frac{h_2}{h_0} y = 1.$$

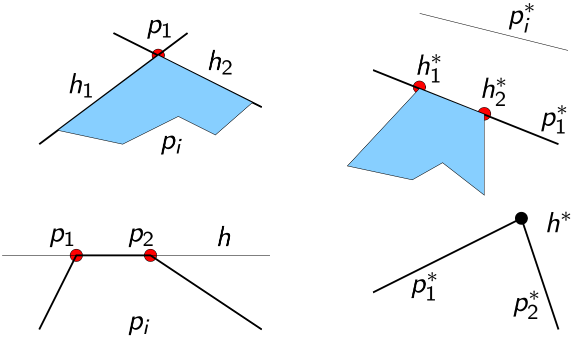
$\square$

ΚΠ

Θεώρημα

Ο υπολογισμός της τομής n ημιχώρων στον $\mathbb{R}^d$ είναι υπολογιστικά ισοδύναμος με το ΚΠ n σημείων $\in \mathbb{R}^d$.

Απόδ. Δυϊσμός μεταξύ κορυφών και ακμών άνω περιβλήματος σημείων και μη φραγμένου πολυγώνου που ορίζεται ως τομή ημιεπιπέδων:



Outline

1. Δυϊσμός
   - Απλή Πόλωση
   - Γενίκευση της Πόλωσης
2. Γραμμική βελτιστοποίηση / ΓΠ
   - Εισαγωγή
   - Αλγόριθμοι

Γενίκευση σε ημιχώρους

Ορισμός

$p^{\#}$ = Δυϊκό σημείου p = ημιχώρος του p^*, που περιλαμβάνει O στον δυϊκό χώρο:

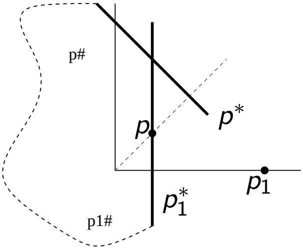
$$p^{\#} := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ x \cdot p \leq 1\}.$$

$P^{\#}$ = Δυϊκό συνόλου σημείων $P \subset \mathbb{R}^d$:

$$P^{\#} := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ x \cdot p \leq 1, \ \forall p \in P\} = \bigcap_{p \in P} p^{\#}.$$

Παράδειγμα

Για το $p_1 = (2,0)$ η ευθεία p_1^* είναι η $p_1^* : x = \frac{1}{2}$, ενώ για το $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ η ευθεία p^* είναι η $p^* : \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 1$ που περνά από το $(1,1)$. Τα ημιεπίπεδα $p^\#, p_1^\#$ είναι προς τα αριστερά των αντίστοιχων ευθειών. Το μη φραγμένο πολύγωνο $\{p_1, p\}^\# = p_1^\# \cap p^\#$ σημειώνεται με την καμπύλη γραμμή.



Ιδιότητες Γενικευμένης Πόλωσης

Λήμμα

$p_1, \ldots, p_n$ *οι κορυφές του* $P \Leftrightarrow p_i^*$ *τα υπερεπίπεδα των εδρών του* $P^\#$:

$$P = \mathrm{K\Pi}(p_1, \ldots, p_n) \Leftrightarrow P^\# = \bigcap_i p_i^\# .$$

$h_1, \ldots, h_m$ *υπερεπίπεδα εδρών του* $P : O \in P \Leftrightarrow h_i^*$ *οι κορυφές του* $P^\#$:

$$P = \bigcap_i h_i(\leq 1) \;\Leftrightarrow\; P^\# = \mathrm{K\Pi}(h_1^\#, \ldots, h_m^\#),$$

με κορυφές τα h_i^*, *όπου* $h_i(\leq 1) := \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot h_i^* \leq 1\}$.

Συνέπειες

Θεώρημα

Ο υπολογισμός της τομής n ημιχώρων στον $\mathbb{R}^d$ *είναι υπολογιστικά ισοδύναμος με τον υπολογισμό ΚΠ n σημείων* $\in \mathbb{R}^d$.

Πόρισμα

Ο υπολογισμός του γράφου των κορυφών πολυέδρου, το οποίο δίνεται ως τομή n ημιχώρων στο $\mathbb{R}^d$*, έχει πολυπλοκότητα* $\Omega(n \log n + n^{\lfloor d/2 \rfloor})$.

Οι αλγόριθμοι υπολογισμού του ΚΠd, για n δεδομένα σημεία, εφαρμόζουν στον υπολογισμό του γράφου των κορυφών από την τομή n ημιχώρων.

Θεώρημα (Minkowski-Weyl)

Η αυστηρή ισοδυναμία πρέπει να λάβει υπόψη πως το ΚΠ σημείων είναι φραγμένο ενώ η τομή ημιχώρων δύναται να είναι μη-φραγμένη.

Ασκήσεις

Άσκηση

- Ποιο είναι το πολικό αντικείμενο μιας σφαίρας;
- Υπό ποιες συνθήκες η πόλωση της σφαίρας ταυτίζεται με την αρχική σφαίρα;

Άσκηση

Έστω πολύεδρο $P \subset \mathbb{R}^d$ και $b \subset P \subset B$ για εγγεγραμμένη και περιγεγραμμένη σφαίρα b και B. Τότε δείξτε πως $B^* \subset P^* \subset b^*$, όπου B^*, b^* η εγγεγραμμένη και περιγεγραμμένη σφαίρα του P^*, αντίστοιχα.

Outline

Ορισμός (Προβλήματος)

Το πρόβλημα της ΓΒ ορίζεται σε (γεωμετρικο) χώρο d διαστάσεων:

- Υπάρχουν άγνωστες ποσότητες $x_1, \ldots, x_d$.
- Δεδομένα $a_{i,j} \in \mathbb{R} : i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, d$, ορίζουν n γραμμικές εξισώσεις ή ανισότητες, δηλ. περιορισμούς

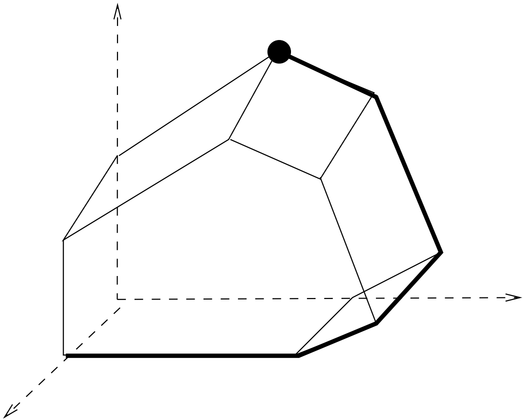
$$x_1 a_{i,1} + \cdots + x_d a_{i,d} \otimes_i b_i, \quad \otimes_i \in \{<, \leq, =, \geq, >\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Αντικειμενική συνάρτηση

$$f(x_1, \ldots, x_d) = x_1 c_1 + \cdots + x_d c_d$$

- Ζητείται σημείο $x \in \mathbb{R}^d$, που ικανοποιεί τους n περιορισμούς και ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

Παράδειγμα



Σχήμα: Τρισδιάστατο «εφικτό» πολύεδρο (που ορίζεται από τους περιορισμούς) και υπολογισμός βέλτιστης κορυφής (με Simplex).

Παράδειγμα

8 περιορισμοί ανισοτήτων και συνάρτηση βελτιστοποίησης [Καρασούλου]:

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 &\leq 5 \\
x_1 + 4x_2 &\leq 45 \\
2x_1 + x_2 &\leq 27 \\
3x_1 - 4x_2 &\leq 24 \\
x_3 &\leq 4 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$\max f = x_1 + x_2 + x_3 \Leftrightarrow \min f = -x_1 - x_2 - x_3.$$

Ιδιότητες

Ορισμός

- Εφικτή περιοχή $=$ σύνολο σημείων: ικανοποιούν τους περιορισμούς
- Γραμμικοί περιορισμοί $\Rightarrow$ εφικτή περιοχή $=$ τομή κλειστών ημιχώρων, ανοικτών ημιχώρων κ΄ υπερεπιπέδων. $\Rightarrow$ Εφικτή περιοχή $=$ πολύεδρο, όχι απαραίτητα φραγμένο.
- Περιορισμοί εφικτοί/μη ανν εφικτή περιοχή μη/κενή.
- Πρόβλημα μη φραγμένο ανν $\nexists$ φραγμένη λύση, δηλ. βέλτιση τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $\rightarrow \pm\infty$.
- Αν υπάρχει βέλτιστη λύση και η Αντικειμενική συνάρτηση αρκετά γενική $\Rightarrow$ Μοναδική βέλτιστη λύση: Κορυφή πολυέδρου εφικτής περιοχής.

Outline

1. Δυϊσμός
   - Απλή Πόλωση
   - Γενίκευση της Πόλωσης

2. Γραμμική βελτιστοποίηση / ΓΠ
   - Εισαγωγή
   - Αλγόριθμοι

Simplex

Αλγόριθμος Simplex [Dantzig'63]

- Βρίσκει κορυφή της εφικτής περιοχής, κινείται προς κορυφή με μικρότερη τιμή για τη συνάρτηση ελαχιστοποίησης.
- $\nexists$ καλύτερη γειτονική κορυφή $\Rightarrow$ βρέθηκε βέλτιστο.
- Χείριστη περίπτωση: εκθετικός ως προς d λόγω πολυπλοκότητας εφικτής περιοχής, από θεώρημα MacMullen για πολύεδρο n εδρών, πολυωνυμικός ως προς n.
- Δυϊσμός: εκθετικός ως προς n, πολυωνυμικός ως προς d.
- Στην πράξη είναι «συνήθως» ταχύς. Ανοικτό πρόβλημα η αναμενόμενη πολυπλοκότητα.

Πολυωνυμικοί αλγόριθμοι

(Ασθενώς) πολυωνυμικοί δηλ. ως προς d, n, bitsize.

Ελλειψοειδής [Khachiyan'79]

- Γενική αναπαράσταση εφικτής περιοχής, ακόμα και μέσω Μαντείου (membership oracle).
- Υπάρχει φράγμα σε συνάρτηση της ακτίνας της περιγεγραμμένης και της εγγεγραμμένης σφαίρας που αποφεύγει το bitsize.

Εσωτερικών σημείων [Karmarkar'84]

- Ταχύτερος.
- Αναπαράσταση εισόδου ως τομή ημιχώρων.

Ανοικτό

$\exists$ ισχυρά πολυωνυμικός αλγόριθμος; δηλ. ως προς d, n;

Μια σταθερή παράμετρος

Αυξητικός αλγόριθμος [Megiddo'84]

- Αυξητικός γεωμετρικός $= O(n)$, για $d = O(1)$, εκθετικός ως προς d (βλ. παρακάτω).
- Ο Δυϊσμός δίνει: $O(d)$, αν $n = O(1)$.
- Απλούστερος πιθανοκρατικός $= O(d!\, n)$ [Seidel'91].

Ακραία σημεία ΚΠ

Αναγωγή σε ΓΒ

Σημείο p_j ειναι εσωτερικό του ΚΠ$(p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n)$ ανν είναι κυρτός συνδυασμός τους, δηλ. ανν

$$\exists\, \lambda_i \geq 0 \,:\, p_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i p_i, \quad \sum_{i \neq j} \lambda_i = 1.$$

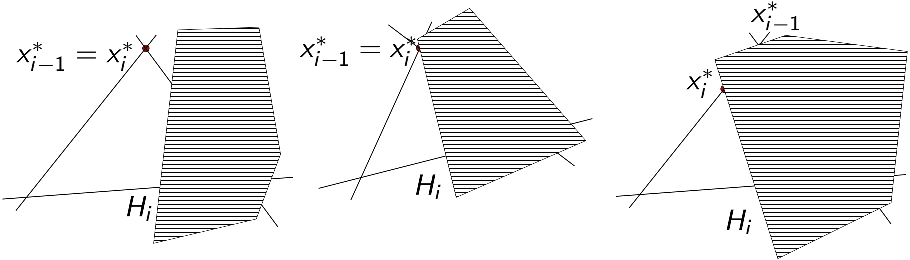
Πρόκειται για $n-1$ ανισότητες και $d+1$ εξισώσεις.

Πόρισμα

Το παραπανω είναι ένα πρόβλημα ΓΒ (ερώτημα αν η εφικτή περιοχή ειναι κενή ή όχι). Άρα υπάρχει (ασθενώς) πολυωνυμικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό των ακραίων σημείων συνόλου $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$.

Αυξητικός

Τρεις θέσεις του τρέχοντος βέλτιστου x^*_{i-1} ως προς το νέο περιορισμό H_i (εκτός γραμμοσκιασμένου), όπου x^*_i το νέο βέλτιστο:



Η μεσαία περίπτωση είναι εκφυλισμένη. Σε όλες τις περιπτώσεις η νέα εφικτή περιοχή είναι γνήσιο υποσύνολο της τρέχουσας.