Υπολογιστική Γεωμετρία

1ο Μέρος (β): Κυρτότητα σε γενική διάσταση

Γιάννης Εμίρης

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εαρ. 2015

Περιεχόμενα

1. Πολύεδρα γενικής διάστασης
   - Φημισμένα πολύεδρα
   - Ορισμοί
   - Είδη Πολυέδρων
   - Πολυπλοκότητα Πολυέδρων
2. ΚΠ3 και ΚΠd
   - Beneath-Beyond για το ΚΠ3
   - Beneath-Beyond για το ΚΠd
   - Gift wrapping
3. Εφαρμογή στην Θεωρία παιγνίων

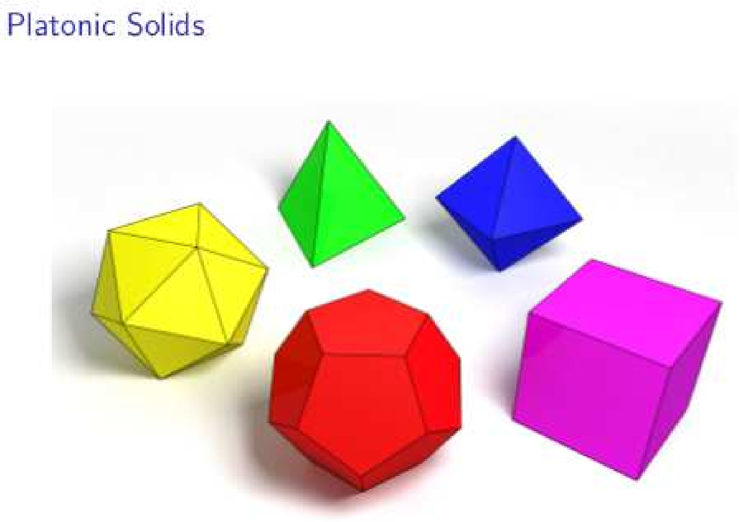
Outline

1. Πολύεδρα γενικής διάστασης
   - Φημισμένα πολύεδρα
   - Ορισμοί
   - Είδη Πολυέδρων
   - Πολυπλοκότητα Πολυέδρων

2. ΚΠ3 και ΚΠd
   - Beneath-Beyond για το ΚΠ3
   - Beneath-Beyond για το ΚΠd
   - Gift wrapping

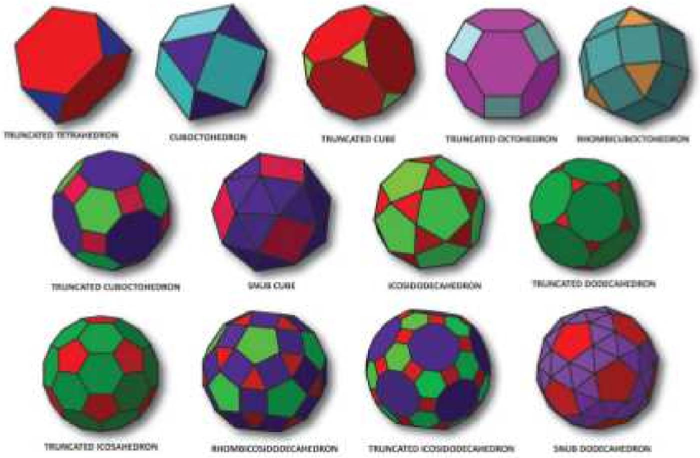
3. Εφαρμογή στην Θεωρία παιγνίων

Από τον Πλάτωνα. . .



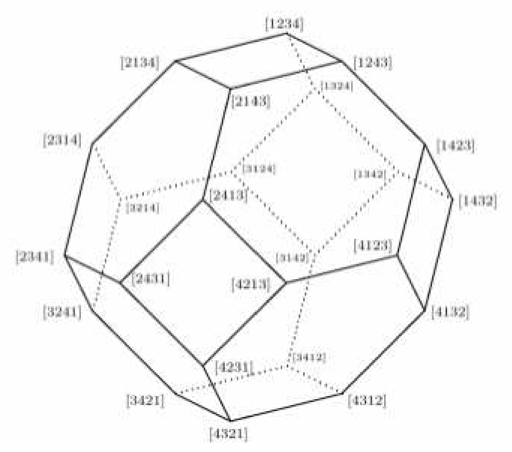
. . . στον Αρχιμήδη

Archimedean Solids



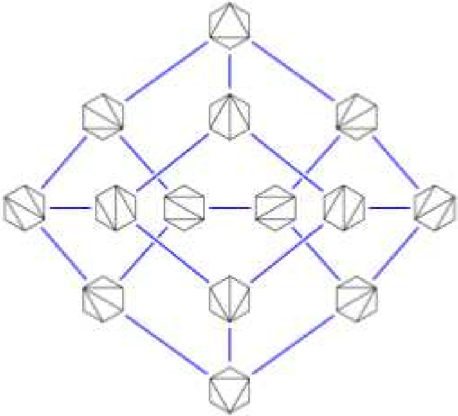
Μεταθέσεις

Permutahedron

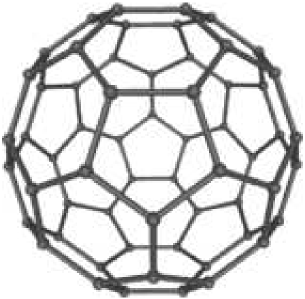


Τριγωνοποιήσεις

Associahedron



Το πολύεδρο της φουλερενίου (fullerene)



ΚΠ3 60 κορυφών, 32 εδρών (κανονικά πεντάγωνα και 20 εξάγωνα).
Χάρισε στους ερευνητές που το ανακάλυψαν ('85) το Nobel Χημείας '96.
Πόσες είναι οι ακμές;

Outline

1. Πολύεδρα γενικής διάστασης
   - Φημισμένα πολύεδρα
   - Ορισμοί
   - Είδη Πολυέδρων
   - Πολυπλοκότητα Πολυέδρων
2. ΚΠ3 και ΚΠd
   - Beneath-Beyond για το ΚΠ3
   - Beneath-Beyond για το ΚΠd
   - Gift wrapping
3. Εφαρμογή στην Θεωρία παιγνίων

(Υπερ)επίπεδο, ως σημειοσύνολο

Ορισμός (Αλγεβρικός)

(Υπερ)επίπεδο: Ορίζεται ως το σημειοσύνολο που ικανοποιεί μια γραμμική εξίσωση

$$f(x_1, \ldots, x_d) = k_1 x_1 + \cdots + k_d x_d + k_0 = 0, \;\; k_i \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα

Ευθεία $\{(x_1, x_2) : 2x_1 - x_2 = 3\} \subset \mathbb{R}^2$,
επίπεδο $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = -1\} \subset \mathbb{R}^3$.
υπερεπίπεδο $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 1\} \subset \mathbb{R}^4$.

(Υπερ)επίπεδα

Ορισμός

Ισοδύναμα, μέσω του κάθετου διανύσματος v στο (υπερ)επίπεδο, και της απόστασης $k_0/\|v\|$ του (υπερ)επιπέδου από την αρχή των αξόνων:

$$f = v \cdot (x_1, \ldots, x_d) + k_0.$$

Π.χ. Για $k_0 = 0$ το (υπερ)επίπεδο περνά από την αρχή των αξόνων.
Για $v = (2, -1)$, $k_0 = -3$, παίρνουμε $f = 2x_1 - x_2 - 3$.

$$\text{Για γνωστό } f(x_1, \ldots, x_d) = k_1 x_1 + \cdots + k_d x_d + k_0 = 0,$$

$$\text{το κάθετο διάνυσμα είναι } \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}\right) = (k_1, \ldots, k_d).$$

Διάσταση

Ορισμός (Παραμετρικός)

Ισοδύναμα, όλα τα σημεία $\in \mathbb{R}^d$ που παράγονται από $d-1$ ανεξάρτητα διανύσματα.
Π.χ. ευθεία $(x_1, x_2) = t(1,2) - (0,3),\ t \in \mathbb{R}$.
επίπεδο $(x_1, x_2, x_3) = t(1,0,1) + s(0,1,2) + (0,0,1),\ t, s \in \mathbb{R}$.

Λήμμα

Το υπερεπίπεδο σε χώρο $\mathbb{R}^d$ έχει διάσταση $d-1$.

Ημιχώροι

Ορισμός

Ημιχώρος: η μία «πλευρά» δεδομένου υπερεπιπέδου: έχει διάσταση d.
Π.χ. ημιεπίπεδο $\{(x_1, x_2) : 2x_1 - x_2 > 3\} \subset \mathbb{R}^2$, ημιχώρος $\subset \mathbb{R}^3$.

Ορίζεται ως το σημειοσύνολο που δίνει θετικό/αρνητικό πρόσημο στο πολυώνυμο του υπερεπιπέδου:

$$\{(x_1, \ldots, x_d) : \ f(x_1, \ldots, x_d) \,\Box\, 0\}, \quad \Box \in \{>, \geq, <, \leq\}.$$

Ισοδύναμα, δίνει θετικό/αρνητικό πρόσημο στο:

$$\nabla f \cdot (x_1, \ldots, x_d) + k_0.$$

Κλειστός ή ανοικτός ημιχώρος $\iff$ περιλαμβάνει ή όχι το υπερεπίπεδο $\iff$ $\Box \in \{\geq, \leq\}$ ή $\Box \in \{>, <\}$, αντίστοιχα.

ΚΠ ως τομή ημιχώρων

Ορισμός

Κυρτό πολύτοπο (polytope) ή πολύεδρο (polyhedron) είναι η Τομή πεπερασμένου πλήθους ημιχώρων.

Καθώς μεγαλώνει το σύνολο των ημιχώρων, η τομή τους είτε δεν αλλάζει είτε μικραίνει, και μπορεί να φτάσει στο $\emptyset$.

Π.χ. Κάθε ΚΠ2 εκφράζεται ως τομή ημιεπιπέδων. Αρκούν τα ημιεπίπεδα των ακμών, μπορεί να υπάρχουν πλεονάζοντα ημιεπίπεδα (δεν αλλάζουν το ΚΠ2).

Ορισμός

Φραγμένο/μη ανν δεν/εκτείνεται στο άπειρο ανν δεν/περιέχει ημιευθεία.
Π.χ. στο $\mathbb{R}^2$, τα κυρτά πολύγωνα είναι τα φραγμένα κυρτά πολύεδρα
Ορισμός: πολύτοπο = φραγμένο πολύεδρο.

ΚΠ σημείων

Ορισμός

Έστω σημεία $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^d$. Το Κυρτό Περίβλημα ΚΠ$(A_1, \ldots, A_n)$ είναι το μικρότερο (ως προς όγκο ή ως σημειοσύνολο) κυρτό πολύεδρο (τομή ημιχώρων), που περιέχει τα $A_1, \ldots, A_n$.

Λήμμα

Το Κυρτό Περίβλημα πεπερασμένου πλήθους σημείων είναι μη κενό και φραγμένο.

ΚΠ μέσω κυρτών συνδυασμών

Πόρισμα

- *Οι κορυφές $P_1, \ldots, P_k$ του ΚΠd ανήκουν στο $\{A_1, \ldots, A_n\}$.*
- *Τα σημεία του ΚΠ είναι κυρτοί συνδυασμοί των κορυφών:* $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k,\ \sum_i \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$.
- *[Καραθεοδωρής] Κάθε σημείο Κυρτού Πολυέδρου στο $\mathbb{R}^d$ είναι κυρτός συνδυασμός κάποιων $d+1$ κορυφών του.*

Λήμμα (Άσκηση)

Αν το d-πολύεδρο έχει $O(d)$ κορυφές, τότε ο υπολογισμός των $d+1$ κορυφών που 'παράγουν' δοσμένο σημείο γίνεται σε $O(d^4)$ μέσω γραμμικής άλγεβρας.

Υπερεπίπεδο στήριξης

Ορισμός

Υπερεπίπεδο στήριξης (supporting hyperplane) πολυέδρου P: τέμνει το P μόνο σε σημεία που ανήκουν σε ένα ή περισσότερα από τα κρίσιμα (critical) υπερεπίπεδα που ορίζουν το P (όπου το P αλλάζει αν λείπει ένα κρίσιμο υπερεπίπεδο).

Ισοδύναμα, το υπερεπίπεδο στήριξης έχει μη-κενή τομή με το κλειστό πολύεδρο, αλλά κενή τομή με το ανοικτό πολύεδρο (δηλ. την τομή των ανοικτών ημιχώρων).

Παράδειγμα

$\mathbb{R}^2$: κάθε ευθεία όπου ανήκει μια ακμή/κορυφή ενός ΚΠ2.
$\mathbb{R}^3$: κάθε επίπεδο όπου ανήκει μια έδρα/ακμή/κορυφή ενός ΚΠ3.

Όψεις, έδρες, κλπ

Ορισμός

Όψη (face): τομή πολυέδρου με ένα/περισσότερα επίπεδα στήριξης.

Ορισμός (Διάσημες όψεις)

- Κορυφή (vertex) (διάσταση 0),
- Ακμή (edge) (διάσταση 1),
- Έδρα (facet) (διάσταση $d-1$),
- Ράχη (ridge) (διάσταση $d-2$).
- Το d-διάστατο πολύεδρο θεωρείται όψη διάστασης d.
- Το $\emptyset$ θεωρείται όψη διάστασης -1 κάθε πολυέδρου.

Υπερεπίπεδα στήριξης (ξανά)

Υπερεπίπεδα στήριξης όψεων

- Κάθε έδρα έχει μοναδικό υπερεπίπεδο στήριξης, οι άλλες όψεις άπειρα.
- Για $k = 0$ (κορυφή), το σύνολο (υπερ)επιπέδων στήριξης έχει διάσταση: 1 στο επίπεδο (διαγράφει μια γωνία), 2 στον 3-διάστατο χώρο (δύο γωνίες), $d - 1$ γενικά. Είναι όλα τα (υπερ)επιπεδα με καθέτους στον κώνο των καθέτων των εδρών που προσπίπτουν στην κορυφή.
- Το σύνολο (υπερ)επιπέδων στήριξης μιας k-όψης έχει διάσταση $d - k - 1$.
- Για τη μελέτη των (υπερ)επιπέδων στήριξης, θεωρήστε τις καθέτους τους, π.χ. τις εξωτερικές καθέτους (προς το εξωτερικό του πολυέδρου).

Outline

1. Πολύεδρα γενικής διάστασης
   - Φημισμένα πολύεδρα
   - Ορισμοί
   - Είδη Πολυέδρων
   - Πολυπλοκότητα Πολυέδρων
2. ΚΠ3 και ΚΠd
   - Beneath-Beyond για το ΚΠ3
   - Beneath-Beyond για το ΚΠd
   - Gift wrapping
3. Εφαρμογή στην Θεωρία παιγνίων

Άπλοκα

Ορισμός

d-άπλοκο (simplex): Κυρτό πολύεδρο ΚΠ$(A_0, \ldots, A_d)$ τ.ώ. τα $A_i \in \mathbb{R}^d$ είναι αφινικώς ανεξάρτητα δηλ. τα $A_i - A_0$ γραμμικώς ανεξάρτητα.

Λήμμα

Κάθε άπλοκο έχει

- $d + 1 = \binom{d+1}{d}$ *έδρες, κάθε* d *κορυφές ορίζουν έδρα.*
- $\binom{d+1}{2}$ *ακμές: κάθε ζεύγος κορυφών ορίζει ακμή.*
- *Κάθε* $k+1$ *κορυφές ορίζουν* $k-$*άπλοκο:* $\binom{d+1}{k+1}$ *όψεις διάστασης* k*.*

Παράδειγμα

Ευθύγραμμο τμήμα στο $\mathbb{R}$, τρίγωνο στο $\mathbb{R}^2$, τετράεδρο στο $\mathbb{R}^3$.

Είδη Κυρτών Πολυέδρων

Ορισμός

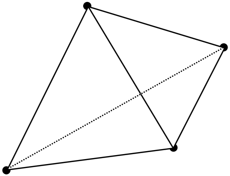
Απλό (simple) d-πολύεδρο: σε κάθε κορυφή τέμνονται ακριβώς d έδρες (d υπερεπίπεδα στήριξης).

Απλοειδές (simplicial) d-πολύεδρο: $\forall$ έδρα άπλοκο διάστασης $d-1$.

Λήμμα (Άσκηση)

- *Στο επίπεδο, κάθε πολύγωνο είναι απλό και απλοειδές.*
- *Το μοναδικό απλό και απλοειδές πολύεδρο σε ≥ 3 διαστάσεις είναι το άπλοκο.*
- *Κάθε πολύεδρο γίνεται απλοειδές αν τριγωνοποιήσουμε τις έδρες του. Για γενικό d, τριγωνοποίηση σημαίνει υποδιαίρεση σε άπλοκα.*
- *Βρείτε πολύεδρο που είναι: απλό αλλά όχι απλοειδές, απλοειδές αλλά όχι απλο, τίποτα εκ των δύο.*

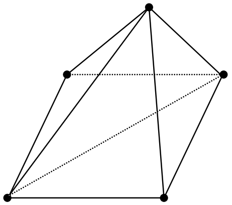
Τετράεδρο



Τετράεδρο (άπλοκο) στον τρισδιάστατο χώρο: απλό κι απλοειδές

Περαιτέρω παραδείγματα: Πλατωνικά στερεά.

Είδη Πολυέδρων



Τετραγωνική πυραμίδα (του Χέοπος) στο $\mathbb{R}^3$.

Διαταράσσω απειροελάχιστα και τυχαία τις κορυφές ώστε να προκύψει τριγωνοποιημένη βάση, άρα απλοειδές.
Γενικά: μια τυχαία απειροελάχιστη διαταραχή σε οποιοδήποτε πολύεδρο το μετατρέπει σε απλοειδές.

Outline

1. Πολύεδρα γενικής διάστασης
   - Φημισμένα πολύεδρα
   - Ορισμοί
   - Είδη Πολυέδρων
   - Πολυπλοκότητα Πολυέδρων
2. ΚΠ3 και ΚΠd
   - Beneath-Beyond για το ΚΠ3
   - Beneath-Beyond για το ΚΠd
   - Gift wrapping
3. Εφαρμογή στην Θεωρία παιγνίων

Θεώρημα άνω φράγματος (upper bound)

Θεώρημα (McMullen)

Οποιοδήποτε d–πολύεδρο με n κορυφές (ή n έδρες) περιέχει

$$O\left(n^{\lfloor d/2 \rfloor}\right)$$

k-διάστατες όψεις, όπου διάσταση $k = 0, \ldots, d-1$.

Το φράγμα είναι σφιχτό στα «κυκλικά» πολύεδρα: $K\Pi(A_1, \ldots, A_n)$, για $A_i = (i, i^2, \ldots, i^d) \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \ldots, n$.

Πόρισμα

$d = 2$: $O(n)$ ακμές, κορυφές.
$d = 3$: $O(n)$ έδρες, ακμές, κορυφές.
$d = 4$: $O(n^2)$ έδρες, ακμές, για n κορυφές.

Πολυπλοκότητες

Λήμμα

Για n δοσμένα σημεία στο επίπεδο, $K\Pi 2 = \Omega(n \log n)$.

Πόρισμα

Ο υπολογισμός του κυρτού περιβλήματος n σημείων στο $\mathbb{R}^d$ *έχει χρονική πολυπλοκότητα χείριστης περίπτωσης* $K\Pi d = \Omega(n \log n + n^{\lfloor d/2 \rfloor})$.

Η αποθήκευση του γράφου πρόσπτωσης ή γειτνίασης έχει χωρική πολυπλοκότητα $\Omega(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$.

Πόρισμα

Το συνολικό πλήθος όψεων όλων των διαστάσεων, για $d = O(1)$, *είναι* $O\left(n^{\lfloor d/2 \rfloor}\right)$.

$\#$*ζευγών προσπιπτουσών όψεων όλων των διαστάσεων* $= O\left(n^{\lfloor d/2 \rfloor}\right)$.

Outline

1. Πολύεδρα γενικής διάστασης
   - Φημισμένα πολύεδρα
   - Ορισμοί
   - Είδη Πολυέδρων
   - Πολυπλοκότητα Πολυέδρων
2. ΚΠ3 και ΚΠd
   - Beneath-Beyond για το ΚΠ3
   - Beneath-Beyond για το ΚΠd
   - Gift wrapping
3. Εφαρμογή στην Θεωρία παιγνίων

Γενικό πλαίσιο

1. Έχοντας το ΚΠ k σημείων, «εισάγουμε» ένα νέο σημείο p:
2. Εντόπισε το p ως προς το ΚΠ και αγνόησέ το αν είναι εσωτερικό.
3. Αλλιώς υπολόγισε μια απόδειξη (certificate) πως το p είναι εξωτερικό σημείο.
4. Χρησιμοποίησε την απόδειξη για να ανανεώσεις το ΚΠ (υπολόγισε το μέρος του ΚΠ που διατηρείται μαζί με το p, και το μέρος που διαγράφεται)

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^3$, σε γενική θέση.
Έξοδος: το κυρτό περίβλημά τους (π.χ. ως γράφος γειτνίασης).

1. Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα x_1: $p_1, \ldots, p_n$.
2. Αρχικοποίηση: τρέχον $\leftarrow$ τετράπλευρο 4 δεξιότερων σημείων.
3. Για το p_k, $k = 5, \ldots, n$:
   - Εξέτασε τις έδρες που προσπίπτουν στην p_{k-1}: υπάρχει κόκκινη.
   - Βρες όλες τις κόκκινες έδρες κι όλες τις βυσσινί ακμές.
   - Διέγραψε από τρέχον πολύεδρο κόκκινες έδρες, ακμές, κορυφές.
   - Εισήγαγε νέες έδρες (ακμές) που ορίζονται από: p_k και βυσσινί ακμές (κορυφές).
4. Επέστρεψε το τρέχον πολύεδρο.

Ορθότητα αλγορίθμου Beneath-Beyond

Λήμμα (Κατηγόρημα)

Για κάθε έδρα του τρέχοντος πολυέδρου τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- *η έδρα είναι είτε γαλάζια είτε κόκκινη,*
- *η έδρα δεν / είναι ορατή από το νέο σημείο,*
- *το νέο σημείο κείται στο ίδιο / διαφορετικό ημιχώρο ως προς το επίπεδο στήριξης της έδρας,*
- *το πρόσημο του κατηγορήματος Προσανατολισμού για τις κορυφές της έδρας με το νέο σημείο είναι ίδιο / διαφορετικό απ΄ό,τι με οποιοδήποτε σημείο (κορυφή ή εσωτερικό) του τρέχοντος πολυέδρου.*

Κατηγόρημα

Λήμμα

Ο προσανατολισμός των $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, \dots, 3$ *ανάγεται στο πρόσημο της ορίζουσας:*

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Μηδενίζεται ανν τα 4 σημεία είναι συνεπίπεδα. Αλλιώς δηλώνει σε ποιον ημιχώρο που ορίζεται από το επιπεδο των p_{i_1,i_2,i_3} *βρίσκεται το* p_{i_0}, *όπου* $\{i_0, \dots, i_3\} = \{0, \dots, 3\}$.

Λήμμα

Σε κάθε αυξητικό βήμα,

- *το σύνολο βυσσινί ακμών/κορυφών είναι τοπολογικά ισοδύναμο με ένα κυρτό πολύγωνο στο επίπεδο,*
- *το πολύγωνο αυτό είναι κυρτό περίβλημα $\leq n$ σημείων, άρα μεγέθους $O(n)$,*
- *το σύνολο νέων εδρών/ακμών αντιστοιχεί με τρόπο 1-1 στο σύνολο βυσσινί ακμών/κορυφών.*

Πολυπλοκότητα αυξητικού αλγορίθμου για το ΚΠ3

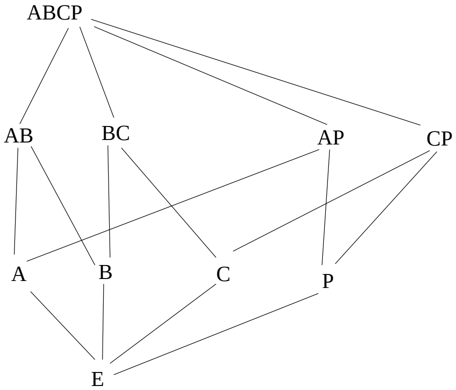
- Αρχική ταξινόμηση $= O(n \log n)$.
- Κόστος εξαρτάται από:
    - συνολικό #κόκκινων εδρών/ακμών, το οποίο φράσσεται από το συνολικό #εδρών/ακμών που κατασκευάζονται $= O(n^2)$,
    - συνολικό #κόκκινων κορυφών $\leq n$,
    - #βυσσινί ακμών/κορυφών $= O(n)$ ανά βήμα,
    - #εδρών/ακμών που κατασκευάζονται $= O(n)$ ανά βήμα.
- Συνολική πολυπλοκότητα $= O(n^2)$.

Suboptimal

Υπάρχει αλγόριθμος Beneath-Beyond σε $O(n \log n)$ αν χρησιμοποιήσουμε εισαγωγή/εντοπισμό σημείων (χωρίς το αρχικό στάδιο ταξινόμησης) ώστε να μην αλλάζουν το ΚΠ όλα τα σημεία.

Αναπαράσταση με γράφο πρόσπτωσης (incidence)

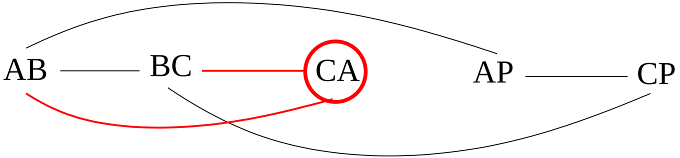
- ένας κόμβος ανά όψη,
- ακμή γράφου ανά πρόσπτωση όψεων: διαστάσεις διαφέρουν 1, σχέση υποσυνόλου/υπερσυνόλου.
- Παράδειγμα γράφου τετραπλεύρου $ABCP$:



Αναπαράσταση με γράφο γειτνίασης (adjacency)

Οικονομικότερη αναπαράσταση:

- ένας κόμβος ανά έδρα (ακμή στο $\mathbb{R}^2$),
- ακμή γράφου εκφράζει γειτνίαση εδρών (ράχη),
- πίνακας κορυφών, όπου «δείχνουν» οι έδρες (pointers).
- Π.χ.: Τρίγωνο ABC «αυξάνεται» σε τετράπλευρο $ABCP$: κόκκινη ακμή CA (κόμβος γράφου), βυσσινί κορυφές A, C (ακμές γράφου):



Outline

1. Πολύεδρα γενικής διάστασης
   - Φημισμένα πολύεδρα
   - Ορισμοί
   - Είδη Πολυέδρων
   - Πολυπλοκότητα Πολυέδρων
2. ΚΠ3 και ΚΠd
   - Beneath-Beyond για το ΚΠ3
   - Beneath-Beyond για το ΚΠd
   - Gift wrapping
3. Εφαρμογή στην Θεωρία παιγνίων

Γενική διάσταση

- ΚΠ$' =$ ΚΠ$(C \cup \{p\})$.
- Έδρες του C διαιρούνται σε 2 κατηγορίες: $F =$ γαλάζια / κόκκινη αν δεν/είναι ορατή από $p \Leftrightarrow p \in$ ίδιο/διαφορετικό ημιχώρο του υπερεπιπέδου στήριξης της F ως προς C.
- Γενική θέση $\Rightarrow p \notin$ υπερεπίπεδο στήριξης, ενώ κάθε k-όψη = τομή $\geq d - k$ εδρών, $k = 0, \ldots, d-1$.
- Όψεις διάστασης $\leq d - 2$ χωρίζονται σε:
  - κόκκινη, ανήκει στην τομή μόνο κόκκινων εδρών,
  - γαλάζια, ανήκει στην τομή μόνο γαλάζιων εδρών,
  - βυσσινί, ανήκει στην τομή κόκκικων και γαλάζιων εδρών.

Κατηγόρημα

Λήμμα

Ο προσανατολισμός των $p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{id})$, $i = 0, \ldots, d$ *ανάγεται στο πρόσημο της ορίζουσας:*

$$\det \begin{bmatrix} 1 & p_{01} & \cdots & p_{0d} \\ 1 & p_{11} & \cdots & p_{1d} \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & p_{d1} & \cdots & p_{dd} \end{bmatrix}.$$

Μηδενίζεται ανν τα $d+1$ *σημεία ανήκουν στο ίδιο υπερεπίπεδο, δηλ. είναι αφινικώς εξαρτημένα. Αλλιώς δηλώνει σε ποιον ημιχώρο που ορίζεται από το υπερεπιπεδο των* $p_{i_1}, \ldots, p_{i_d}$ *βρίσκεται το* p_{i_0}*, όπου* $\{i_0, \ldots, i_d\} = \{0, \ldots, d\}$.

Αυξητικό στάδιο ΚΠd

Είσοδος: γράφος γειτνίασης του κυρτού περιβλήματος C, νέο σημείο $p \notin C$, τελευταία κορυφή $q \in C$.
Έξοδος: γράφος γειτνίασης ΚΠ$(C \cup \{p\})$.

1. Βρες μία κόκκινη έδρα του C εξετάζοντες τις έδρες που προσπίπτουν στο q.
2. Υπόλοιπες κόκκινες έδρες: γειτονικές της αρχικής. Συνέχισε αναζήτηση έως ότου βρεθεί γαλάζια έδρα.
3. Χρωμάτισε κόκκινες έδρες/ράχες και βυσσινί ράχες.
4. Ανανέωση: κόκκινες έδρες/ράχες αφαιρούνται. Για κάθε βυσσινί ράχη, πρόσθεσε νέα έδρα: ένωση ράχης με p. Για κάθε 2 νέες έδρες, δημιούργησε μία κοινή νέα ράχη.

Πολυπλοκότητα Beneath-Beyond

- Αρχικοποίηση: $= O(n \log n + d) = O(n \log n)$
- 1η φάση: εύρεση κόκκινης, κόστος ανάλογο
  - #εδρών από προηγούμενο $= O(n^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor})$ για $(d-1)$-πολύεδρο
  - για $O(n)$ φάσεις: $O(n^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor})$.
- 2η φάση: χρωματισμός, κόστος ανάλογο
  - #κόκκινων εδρών και #γειτονικών γαλάζιων εδρών.
  - #γειτονικών γαλάζιων εδρών $\leq$ #κόκκινων
  - #κόκκινων εδρών συνολικά $\leq$ #νέων εδρών $= O(n^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor})$
  - #βυσσινί ραχών $=$ #νέων εδρών.
- 3η φάση: ανανέωση, κόστος ανάλογο
  - #κόκκινων όψεων ανάλογο #όψεων που δημιουργούνται.
  - #βυσσινί όψεων φράσσεται από #όψεων που δημιουργούνται.
  - υπογράφος που σχηματίζεται: ισόμορφος με βυσσινί όψεις

Χρονική Πολυπλοκότητα

Θεώρημα

Δίνονται n σημεία στο $\mathbb{R}^d$. Η συνολική χρονική πολυπλοκότητα του παραπάνω αυξητικού αλγορίθμου για την κατασκευή του ΚΠd είναι

$$O\left(n \log n + n^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor}\right),$$

άρα βέλτιστος μόνο για άρτιες διαστάσεις.

Τυχαιοκρατική τεχνική αναμενόμενου κόστους $O(n \lg n + n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ [Seidel]

Πιο περίπλοκη ντετερμινιστική προσέγγιση με πολυπλοκότητα χείριστης περίπτωσης $O(n \log n + n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ [Chazelle]. Βέλτιστη χείριστης περίπτωσης σε κάθε διάσταση.

Πολυπλοκότητα και Υλοποίηση

Λήμμα

Ο χώρος αποθήκευσης είναι ανάλογος με το μέγεθος του γράφου πρόσπτωσης ή γειτνίασης $= O\left(n^{\lfloor d/2 \rfloor}\right)$.

Υλοποίηση

Polymake [Joswig]
CGAL/triangulate [Boissonnat,Hornus,Devillers]

Outline

1. Πολύεδρα γενικής διάστασης
   - Φημισμένα πολύεδρα
   - Ορισμοί
   - Είδη Πολυέδρων
   - Πολυπλοκότητα Πολυέδρων

2. ΚΠ3 και ΚΠd
   - Beneath-Beyond για το ΚΠ3
   - Beneath-Beyond για το ΚΠd
   - Gift wrapping

3. Εφαρμογή στην Θεωρία παιγνίων

Προσέγγιση περιτύλιξης

- n σημεία σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^d$: καθε d σημεία ορίζουν υπερεπίπεδο, κάθε $d+1$ σημεία $\notin$ στο ίδιο υπερεπίπεδο.
- Αυξητικός αλγόριθμος ως προς τις έδρες: σύνολο γνωστών εδρών συνεκτικό (άρα και σύνολο άγνωστων εδρών συνεκτικό).
- Δομή δεδομένων ΡΑΧ περιέχει γνωστές ράχες προς εξέταση (γνωρίζουμε μία από τις δύο έδρες).
- Ράχες αποθηκεύονται ως $(F - \{x\}, x)$
  F : $d+1$ σημεία ορίζουν (γνωστή) έδρα που περιέχει τη ράχη,
  $x =$ κορυφή έδρας που δεν ανήκει στη ράχη,
  $F - \{x\}$: οι κορυφές της ράχης.

Συνάρτηση ΑΛΛΗ–ΕΔΡΑ

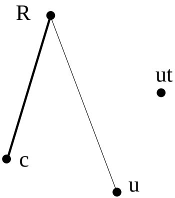
Είσοδος: Ράχη R και κορυφή $c \notin R$: $R \cup \{c\}$ αποτελεί έδρα του ΚΠ.
Έξοδος: Έδρα ΚΠ που περιέχει την R και δεν είναι η $R \cup \{c\}$.

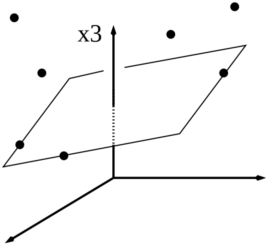
1. Έστω υποψήφιο σημείο u από τα σημεία εισόδου, εκτός των $R \cup \{c\}$. Ορίζει υποψήφια έδρα $R \cup \{u\}$.
2. Για κάθε $t \notin R \cup \{c, u\}$:
   Αν c, t σε διαφορετικούς ημιχώρους ως προς το υπερεπίπεδο της υποψήφιας έδρας $R \cup \{u\} \Rightarrow u \leftarrow t$.
3. Επέστρεψε έδρα $R \cup \{u\}$.

Γενικεύει τον αλγόριθμο Jarvis που διατυπώθηκε στο $\mathbb{R}^2$.

Πολυπλοκότητα $= O(n)$ κατηγορήματα Προσανατολισμού, άρα $O(nd^3) = O(n)$ για $d = O(1)$.

Παράδειγμα εύρεσης έδρας





- Αριστερά: Εκτέλεση συνάρτησης ΑΛΛΗ–ΕΔΡΑ(R, c) στο $\mathbb{R}^2$, όπου η ράχη R είναι κορυφή.
- Δεξιά: Εύρεση 1ης έδρας του ΚΠ στο $\mathbb{R}^3$ (στο κάτω Περίβλημα)

Αρχικοποίηση: αναζήτηση υπερεπιπέδου

- Εστω η εξίσωση του υπερεπιπέδου της πρώτης (άγνωστης) έδρας:

$$k_1 x_1 + \cdots + k_{d-1} x_{d-1} + k_d x_d + \lambda,\ k_1, \ldots, k_d, \lambda \in \mathbb{Q}.$$

- Αναζητούμε έδρα μη-παράλληλη με άξονα x_d, δηλ. υπερεπίπεδο τέμνει άξονα $\Rightarrow k_d \neq 0$, άρα γράφεται:

$$x_d = k_1 x_1 + \cdots + k_{d-1} x_{d-1} + \lambda, k_1, \ldots, k_{d-1}, \lambda \in \mathbb{Q}.$$

$\exists$ τέτοια έδρα εφόσον όγκος(ΚΠ) > 0 στο $\mathbb{R}^d$.

Αρχικοποίηση: περιορισμοί υπερεπιπέδου

- Για κάθε δεδομένο σημείο $p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{id})$, $i = 1, \ldots, n$:

$$k_1 p_{i,1} + \cdots + k_{d-1} p_{i,d-1} + \lambda \leq p_{i,d}.$$

  Τα p_i με ισότητα ανήκουν στην έδρα, τα υπόλοιπα άνωθεν.
- ΚΠ φραγμένο $\Rightarrow$ τέτοια έδρα φράσσει ΚΠ από «κάτω», δηλ. ανήκει στο κάτω Περίβλημα.
- Τομή υπερεπιπέδου με x_d-άξονα όσο το δυνατόν ψηλότερα, δηλ. με λ μέγιστο: ορίζεται μοναδικό υπερεπίπεδο.

Άσκηση

Εφαρμόστε την αρχικοποίηση αυτή σε δύο διαστάσεις: ποια έδρα (ακμή) υπολογίζεται;

Ορισμός Προβλήματος

- Υπάρχουν d άγνωστες ποσότητες $k_1, \ldots, k_{d-1}, \lambda$.
- Δεδομένα $p_{i,j} \in \mathbb{R} : i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, d$, ορίζουν n γραμμικές ανισότητες (περιορισμούς)

$$k_1 p_{i,1} + \cdots + k_{d-1} p_{i,d-1} + \lambda \leq p_{i,d}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Αντικειμενική συνάρτηση

$$f(k_1, \ldots, k_{d-1}, \lambda) = -\lambda.$$

- Ζητείται σημείο $(k_1, \ldots, k_{d-1}, \lambda)$, που ικανοποιεί τους n περιορισμούς και ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

Πολυπλοκότητα ΓΠ

Πολυωνυμική πολυπλοκότητα

Μέθοδοι εσωτερικού σημείου ή Ελλειψοειδής αλγόριθμος: Ασθενώς πολυωνυμικοί, δηλ. πολυωνυμική πολυπλοκότητα ως προς n, d, bitsize.

Μια σταθερή παράμετρος

Εδώ υπάρχει σταθερό πλήθος αγνώστων $d = O(1)$.

- Ο αυξητικός αλγόριθμος [Megiddo'84] κοστίζει $O(n)$, για $d = O(1)$, εκθετικός ως προς d. (βλ. παρακάτω).
- Ο Δυϊσμός δίνει: $O(d)$, αν $n = O(1)$.
- Απλούστερος πιθανοκρατικός $= O(d!\, n)$ [Seidel'91].

Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠd

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^d$ σε γενική θέση.
Έξοδος: Το κυρτό τους περίβλημα σε κατάλληλη αναπαράσταση.

1. Υπολόγισε και τύπωσε μία πρώτη έδρα F του ΚΠ.
2. Αρχικοποίησε δομή ΡΑΧ με ράχες $(F - \{x\}, x)$, $\forall x \in F$.
3. Όσο ή δομή ΡΑΧ έχει στοιχεία, έστω $(R, c) \in$ ΡΑΧ.
   Υπολόγισε και τύπωσε $F \leftarrow$ ΑΛΛΗ–ΕΔΡΑ(R, c).
   Για κάθε κορυφή $x \in F$:
   α. Αν $\exists$σημείο y: ράχη $(F - \{x\}, y) \in$ ΡΑΧ, διέγραψέ την από ΡΑΧ
   β. Αλλιώς, εισήγαγε $(F - \{x\}, x)$ στη δομή ΡΑΧ.

[Chand-Kapur]

Πολυπλοκότητα περιτύλιξης για το ΚΠd

- Βήμα1: Γραμμικός Προγραμματισμός n περιορισμών σε $d = O(1)$ διαστάσεις, έχει πολυπλοκότητα $O(n)$ [Meggido].
- Βήμα2: Αρχικοποίηση ΡΑΧ $= O(d)$.
- Βήμα3:
  - Αναζήτηση, προσθήκη ράχης στη ΡΑΧ $= O(\log n^{\lfloor d/2 \rfloor}) = O(d \log n)$
  - Κόστος κάθε βήματος για ΑΛΛΗ–ΕΔΡΑ $= O(nd^3)$.
  - Γενική θέση (απλοειδές πολύεδρο): Υπάρχουν $O(d)$ σημεία $x \in F \Rightarrow$ κόστος $= O(d^2 \log n)$.

Συνολικός χρόνος $= O(n\, H\, d^3) = O(nH)$, $H = \#$εδρών ΚΠ, δηλ. ευαίσθητος εξόδου.

Χωρική πολυπλοκότητα $= O(dn^{\lfloor d/2 \rfloor})$, αναιρεί ευαισθησία εξόδου.

Μέθοδος Αντίστροφης αναζήτησης

- Πρόβλημα: απαρίθμηση κόμβων τυχαίου γράφου (με μικρή κατανάλωση μνήμης).
- Ιδέα 0: Ορίζουμε μια ολική διάταξη στους κόμβους.
- Ιδέα 1: Θα ορίσουμε επικαλύπτον δένδρο στους κόμβους και θα το διασχίσουμε κατά βάθος (depth first).
- Ολικό ελάχιστο = ρίζα = έναρξη αναζήτησης.
- Για κάθε κόμβο (με τιμή λ), μπορεί να υπολογιστεί ο μοναδικός γονέας (έχει τιμή $< \lambda$), καθώς και το παιδί με ελάχιστη τιμή από τους μη-εξερευνημένους γείτονες (που έχουν τιμή $> \lambda$).
- Χρόνος διάσχισης: γραμμικός. Αρκεί να γνωρίζω τον κόμβο όπου βρίσκομαι και ποιον επισκεφτηκα τελευταίο (τοπική πληροφορία)

Αντίστροφη αναζήτηση κορυφών

Simplex

- Ο αλγόριθμος Simplex [Dantzig] επιλύει το πρόβλημα ΓΠ ξεκινώντας από οποιαδήποτε κορυφή του εφικτού πολυέδρου και μετακινούμενος σε μοναδικά ορισμένη γειτονική κορυφή με βελτιωμένη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης.
- Ο Simplex ορίζει επικαλύπτον δένδρο στις κορυφές του εφικτού πολυέδρου, καθώς μπορεί να ξεκινήσει σε οποιανδήποτε και πάντα καταλήγει στη (μοναδική) βέλτιστη κορυφή, όπου τα μονοπάτια δεν τέμνονται.
- Η μοναδική βέλτιστη κορυφή είναι η καταβόθρα του Simplex δηλ. ρίζα του επικαλύπτοντος δένδρου.
- Αντίστροφη αναζήτηση: ακολουθεί αντίστροφα βέλη (αντιστρέφει αναζήτηση κατά Simplex), σε αναζήτηση κατά βάθος, επιλέγοντας γείτονα με ελάχιστο κριτήριο από τους μη-εξερευνημένους.

Αντίστροφη αναζήτηση εδρών

Αλγόριθμος περιτύλιξης [Avis-Fukuda'92]

- Ορίζουμε μια ολική διάταξη στις έδρες (π.χ. ως προς τομή λ με τον άξονα x_d ή, καλύτερα, με μια γενική ευθεία).
- Οι έδρες θεωρούνται κόμβοι γράφου, όπου ορίζεται κατευθυνόμενος άκυκλος γράφος με ρίζα το ολικό ελάχιστο (έναρξη αναζήτησης).
- Για κάθε κόμβο με τιμή λ_0 ένα ή περισσότερα εξερχόμενα βέλη οδηγούν στα παιδιά ($\lambda > \lambda_0$), και υπάρχει μοναδικός γονιός ($\lambda < \lambda_0$), ο οποίος ορίζει εισερχόμενο βέλος.
- Τα παιδιά και ο γονιός είναι γειτονικές έδρες, αλλά μπορεί να υπάρχει γειτονική που δεν είναι ούτε παιδί ούτε γονιός.
- Ο γονιός έχει τιμή $\min_L\{\lambda < \lambda_0\}$ όπου L το σύνολο των γειτονικών εδρών κι έχουμε ταυτίσει την έννοια του κόμβου και της τιμής του,

Πολυπλοκότητα Αντίστροφης αναζήτησης

Περιτύλιξη πολυέδρου [Avis-Fukuda'92]

- Η διάσχιση αποθηκεύει μόνο την τρέχουσα έδρα και την τιμή της τελευταίας εκτυπωμένης έδρας.
- Αρα συνολική χωρική πολυπλοκότητα $= O(d)$.
- Ο χρόνος εκτέλεσης πολλαπλασιάζεται με $O(1)$.

Υλοποίηση

lrs: lexicographic reverse search [Avis]

Άσκηση

Παράδειγμα αναζήτησης γράφου.

Ισορροπίες Nash

Έστω 2 παίκτες και συμμετρικό παίγνιο με n στρατηγικές ανά παίκτη, δηλ. ο $n \times n$ πίνακας απόδοσης A είναι κοινός και για τους δύο.

Το διάνυσμα πιθανοτήτων z που ορίζει μια μικτή στρατηγική έχει άθροισμα συντεταγμένων $= 1$. Οι ισορροπίες Nash αντιστοιχούν σε κορυφές του πολυέδρου που ορίζεται ως τομή των ημιχώρων:

$$z \geq 0, \quad Az \leq 1, \qquad z \in \mathbb{R}^n,$$

όπου έχουμε κανονικοποιήσει τη συνολική απόδοση σε 1.
Κάθε κορυφή αντιστοιχεί σε μικτή στρατηγική εκτός από την $z = 0$.

Για παίγνια σε γενική θέση το πολύεδρο είναι απλό. Σε μη γενική θέση, μια απειροελάχιστη διαταραχή το κάνει απλό (όπως στον αλγόριθμο Simplex).

Θεωρία παιγνίων: αλγόριθμος

Έστω κορυφή z που αντιστοιχεί σε ισορροπία Nash: το διάνυσμα $z/|z|_1$ είναι διάνυσμα πιθανοτήτων. Η αντίστοιχη συνολική απόδοση θα είναι $1/|z|_1$.

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος Lemke-Howson ξεκινά στο $z = 0$ και «βελτιώνοντας» (pivoting) την εκάστοτε στρατηγική καταλήγει σε ισορροπία Nash. Πολυπλοκότητα εκθετική στην χειρότερη περίπτωση, ικανοποιητική στην πράξη. Παρατήρησε αντιστοιχία με τον αλγόριθμο Simplex.

Λήμμα

Κάθε κορυφή z έχει ετικέτα πολυσύνολο e με n στοιχεία τ.ώ. $i \in e \iff z_i = 0$ ή $A_i z = 0$ (ή αμφότερα). Ο κανόνας βελτίωσης είναι να επιδιώκουμε μετατροπή του πολυσυνόλου σε σύνολο. Μια ισορροπία Nash αντιστοιχεί σε «πλήρη» ετικέτα $\{1, \ldots, n\}$.

Παράδειγμα

Μελετήστε το παίγνιο με

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

και δείξτε πως το πολύεδρο έχει 8 κορυφές και 6 έδρες. Ποια ειναι η ισορροπία Nash και πώς εντοπίζεται ξεκινώντας από το 0;