Υπολογιστική Γεωμετρία

1ο Μέρος (α): Κυρτότητα στο επίπεδο

Γιάννης Εμίρης

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εαρ.2015

Περιεχόμενα

Υπολογιστικό μοντέλο

Πραγματική (real) RAM (Random Access Machine):

- Ακριβής αναπαράσταση, αποθήκευση πραγματικών σε χώρο $O(1)$
- Μοναδιαίος χρόνος για προσπέλαση μνήμης.
- Μοναδιαίος χρόνος, απόλυτη ακρίβεια για βασικές πράξεις στο $\mathbb{R}$

Μια ικανοποιητική υλοποίηση του μοντέλου είναι η βιβλιοθήκη CGAL.

Outline

Κυρτό σύνολο

Ορισμός (Κυρτότητα)

Το σύνολο S είναι κυρτό (convex) ανν $a, b \in S \Rightarrow$ το ευθύγραμμο τμήμα $(a, b) \subset S$.

Ασκηση

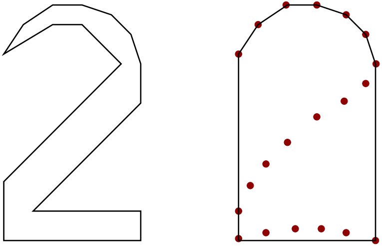
Ισοδύναμα, το S είναι κυρτό ανν $\forall$ σημείο $p \in S$ «φαίνονται» όλα τα σημεία του S, δηλ. συνδέονται με το p με ευθύγραμμο τμήμα εντός του S.

Κυρτό Περίβλημα σε 2 διαστάσεις

Ορισμός (ΚΠ2)

- n σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_n$ στο $\mathbb{R}^2$.
- Το κυρτό περίβλημα (ΚΠ) συνόλου σημείων είναι το μικρότερο (ως προς επιφάνεια, ως προς περίμετρο, ή ως σημειοσύνολο: άσκηση) κυρτό σύνολο (πολύγωνο), το οποίο περιλαμβάνει όλα τα A_i.

Κυρτό Περίβλημα σε 2 διαστάσεις



Μη κυρτό πολύγωνο και κατασκευή ΚΠ σημείων στο επίπεδο.

Συνδυασμοί σημείων

Παρατήρηση

Συχνά θα ταυτίζουμε ένα σημείο A με το διάνυσμα $(0, A)$, το οποίο δεν είναι «ελεύθερο», δε μετακινείται στον χώρο.

Ορισμός (Συνδυασμοί σημείων/διανυσμάτων A_i)

- Γραμμικός συνδυασμός $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n, \;\; \lambda_i \in \mathbb{R}$.
- Θετικός (κωνικός) συνδυασμός $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n, \;\; \lambda_i \geq 0$.
- Αφινικός συνδυασμός $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n, \; \sum_i \lambda_i = 1$.
- Κυρτός συνδυασμός $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n, \; \sum_i \lambda_i = 1, \;\; \lambda_i \geq 0$.

Αφινικός συνδυασμός

Παρατήρηση

Εστω αφινικός συνδυασμός των $A_1, \ldots, A_n$ το σημείο

$$P = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n, \quad \sum_i \lambda_i = 1.$$

Ισοδύναμα

$$P = A_n + \lambda_1 (A_1 - A_n) + \cdots + \lambda_{n-1} (A_{n-1} - A_n),$$

για οποιαδήποτε $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$. Αν θέσουμε το A_n ως αρχή των αξόνων $A_n = 0$ τότε το P είναι γραμμικός συνδυασμός των $A_1, \ldots, A_{n-1}$.

Συνδυασμοί σημείων: παράδειγμα

Παράδειγμα (Συνδυασμοί)

Εστω τα $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^2$ γραμμικώς ανεξάρτητα:

- Γραμμικός: $\{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 : \lambda_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.
- Θετικός: $\{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2,\ \lambda_i \geq 0\} =$ κώνος των A_1, A_2, κορυφή $(0,0)$
- Αφινικός συνδυασμός: $\{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 :\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\} =$ ευθεία που περνά από τα A_1, A_2.
- Κυρτός συνδυασμός: $\{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 :\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_i \geq 0\} =$ ευθύγραμμο τμήμα (A_1, A_2).

Ιδιότητες ΚΠ

Πόρισμα

- *Οι κορυφές* $P_1, \dots, P_k$ *του ΚΠ ανήκουν στην είσοδο* $A_1, \dots, A_n$.
- *Τα σημεία του ΚΠ είναι κυρτοί συνδυασμοί των κορυφών:* $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k,\ \sum_i \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0$, *άρα και των* A_i.
- *Κάθε κυρτός συνδυασμός των* P_i, *ή των* A_i, *ανήκει στο ΚΠ.*

Πρόταση (Καραθεοδωρής)

Κάθε σημείο του ΚΠ είναι κυρτός συνδυασμός κάποιων 3 κορυφών: $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3,\ \sum_i \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0$.

Outline

Κατηγόρημα προσανατολισμού - CCW

- Κατηγόρημα (predicate) καλείται ο έλεγχος μιας ιδιότητας πάνω σε ορισμένα γεωμετρικά δεδομένα. Η έξοδος του κατηγορήματος παίρνει (2 ή 3) διακριτές τιμές.

Κατηγόρημα προσανατολισμού - CCW

- Κατηγόρημα (predicate) καλείται ο έλεγχος μιας ιδιότητας πάνω σε ορισμένα γεωμετρικά δεδομένα. Η έξοδος του κατηγορήματος παίρνει (2 ή 3) διακριτές τιμές.
- Το κατηγόρημα προσανατολισμού (orientation) έχει ως όρισμα 3 σημεία $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$.

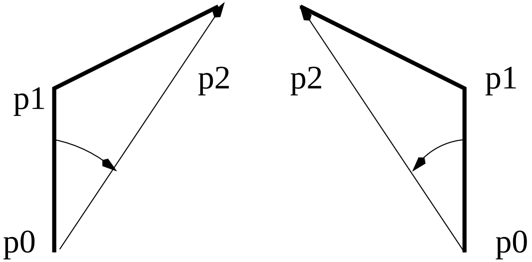
Κατηγόρημα προσανατολισμού - CCW

- Κατηγόρημα (predicate) καλείται ο έλεγχος μιας ιδιότητας πάνω σε ορισμένα γεωμετρικά δεδομένα. Η έξοδος του κατηγορήματος παίρνει (2 ή 3) διακριτές τιμές.
- Το κατηγόρημα προσανατολισμού (orientation) έχει ως όρισμα 3 σημεία $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$.
- Αποφασίζει αν τα διανύσματα $v_1 = (p_0, p_1)$, $v_2 = (p_0, p_2)$ ορίζουν θετική ή αρνητική στροφή (Κανόνας Δεξιού Χεριού).

Κατηγόρημα προσανατολισμού - CCW

Διανύσματα $v_i = (p_0, p_i)$, η στροφή τους είναι

- Αρνητική ανν $v_1 \times v_2$ με 3η συντεταγμένη < 0 (ClockWise, CW).
- Θετική ανν $v_1 \times v_2$ με 3η συντεταγμένη > 0 (CounterClockWise).
- Μη ορισμένη ανν $v_1 \times v_2$ με 3η συντεταγμένη $= 0$ (3 συνευθειακά p_i δηλ. παράλληλα v_i).



Υπολογισμός CCW

Λήμμα

Το CCW των $p_i = (x_i, y_i)$ *ανάγεται σε πρόσημο ορίζουσας:*

$$\det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix}.$$

Υπολογισμός CCW

Λήμμα

Το CCW των $p_i = (x_i, y_i)$ *ανάγεται σε πρόσημο ορίζουσας:*

$$\det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix}.$$

Λήμμα

- *Το CCW υπολογίζει σε ποιά πλευρά (ημιεπίπεδο) της ευθείας των* p_0, p_1 *ανήκει το* p_2. *Ισοδύναμα, σε ποιο ημιεπίπεδο των* p_1, p_2 *ανήκει το* p_0.
- *Το CCW υπολογίζει την φορά της στροφής που ορίζουν τα* p_0, p_1, p_2 *σε αυτή τη σειρά.*

Outline

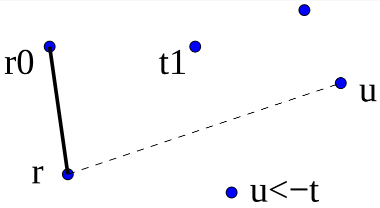
1 Εισαγωγικά

2 Κυρτό Περίβλημα σε δύο διαστάσεις
- Ορισμός ΚΠ2
- Κατηγόρημα προσανατολισμού - CCW
- Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2
- Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2
- Γενική θέση vs εκφυλισμένα δεδομένα
- Περαιτέρω αλγόριθμοι

Περιτύλιξη CCW

Ιδέα Jarvis

- r_0 η αριστερότερη, r η τελευταία (πιο πρόσφατη) κορυφή:
- u το υποψήφιο σημείο για να γίνει επόμενη κορυφή του ΚΠ.
- Δοκιμάζουμε όλα τα σημεία $t1, t, \dots$: στην εικόνα, το t ανανεώνει / βελτιώνει το u, ενώ το $t1$ έπαιξε τον ρόλο του t προηγουμένως



http://www.di.uoa.gr/∼compgeom/pycgalvisual/whypython.shtml

Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2

Είσοδος: Σύνολο n σημείων $S \subset \mathbb{R}^2$.
Έξοδος: CCW αλυσίδα κορυφών του ΚΠ.

1. Αρχικοποίησε κορυφή $r = r_0 =$ αριστερότερο σημείο $(\min x)$.
   Αν $\exists$ περισσότερα, επέλεξε λεξικογραφικά μικρότερο $(\min\ y)$.
   Αρχικοποίησε αλυσίδα κορυφών με r.

Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2

Είσοδος: Σύνολο n σημείων $S \subset \mathbb{R}^2$.
Έξοδος: CCW αλυσίδα κορυφών του ΚΠ.

1. Αρχικοποίησε κορυφή $r = r_0 =$ αριστερότερο σημείο $(\min x)$.
   Αν $\exists$ περισσότερα, επέλεξε λεξικογραφικά μικρότερο $(\min\ y)$.
   Αρχικοποίησε αλυσίδα κορυφών με r.
2. $r =$ τρέχουσα κορυφή, $u \in S$ δεν έχει επιλεγεί ως κορυφή.
   Για κάθε $t \neq u$, $t \in S$, θέσε $u \leftarrow t$ αν:

Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2

Είσοδος: Σύνολο n σημείων $S \subset \mathbb{R}^2$.
Έξοδος: CCW αλυσίδα κορυφών του ΚΠ.

1. Αρχικοποίησε κορυφή $r = r_0 =$ αριστερότερο σημείο $(\min x)$.
   Αν $\exists$ περισσότερα, επέλεξε λεξικογραφικά μικρότερο $(\min\ y)$.
   Αρχικοποίησε αλυσίδα κορυφών με r.
2. $r =$ τρέχουσα κορυφή, $u \in S$ δεν έχει επιλεγεί ως κορυφή.
   Για κάθε $t \neq u$, $t \in S$, θέσε $u \leftarrow t$ αν:
   - ισχύει $CW(r, u, t)$ ή

Είσοδος: Σύνολο n σημείων $S \subset \mathbb{R}^2$.
Έξοδος: CCW αλυσίδα κορυφών του ΚΠ.

1. Αρχικοποίησε κορυφή $r = r_0 =$ αριστερότερο σημείο ($\min x$). Αν $\exists$ περισσότερα, επέλεξε λεξικογραφικά μικρότερο ($\min\ y$). Αρχικοποίησε αλυσίδα κορυφών με r.
2. $r =$ τρέχουσα κορυφή, $u \in S$ δεν έχει επιλεγεί ως κορυφή. Για κάθε $t \neq u$, $t \in S$, θέσε $u \leftarrow t$ αν:
   - ισχύει $CW(r, u, t)$ ή
   - r, u, t συνευθειακά, u εσωτερικό του (r, t),

Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2

Είσοδος: Σύνολο n σημείων $S \subset \mathbb{R}^2$.
Έξοδος: CCW αλυσίδα κορυφών του ΚΠ.

1. Αρχικοποίησε κορυφή $r = r_0 =$ αριστερότερο σημείο ($\min x$).
   Αν $\exists$ περισσότερα, επέλεξε λεξικογραφικά μικρότερο ($\min\ y$).
   Αρχικοποίησε αλυσίδα κορυφών με r.
2. $r =$ τρέχουσα κορυφή, $u \in S$ δεν έχει επιλεγεί ως κορυφή.
   Για κάθε $t \neq u$, $t \in S$, θέσε $u \leftarrow t$ αν:
   - ισχύει $CW(r, u, t)$ ή
   - r, u, t συνευθειακά, u εσωτερικό του (r, t),
3. Αν $u = r_0$ τερμάτισε, αλλιώς:
   $r \leftarrow u, S \leftarrow S - \{r\}$, πρόσθεσε στις κορυφές το r, συνέχισε στο 2.

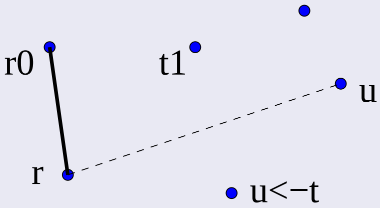
Ορθότητα

Λήμμα

Αν ισχύει $CCW(r,u,t_1)$ και $CW(r,u,t)$ τότε ισχύει $CCW(r,t,t_1)$.

Απόδειξη.

Η γωνία $(r_0 \widehat{r} u)$ μεγαλώνει με κάθε ανανέωση του u και είναι πάντα μεγαλύτερη από την $(r_0 \widehat{r} t)$, για οποιοδήποτε t έχει εξεταστεί.



□

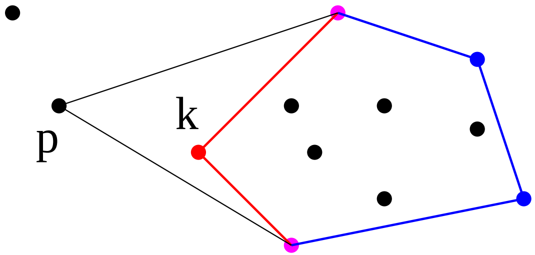
Πολυπλοκότητα αλγορίθμου περιτύλιξης

- Αρχικοποίηση $= O(n)$.
- $H = \#$ κορυφών/ακμών στην έξοδο.
- Βήμα 3 εκτελείται H φορές, καθεμιά με πολυπλοκότητα $O(n)$.
- Κόστος κατηγορήματος $CCW = O(1)$.
- Συνολικός χρόνος $= O(n) + O(Hn) = O(Hn) = O(n^2)$.

Ερώτημα. Αποδείξτε ΚΠ2 $= \Omega(n \log n)$.
Εξηγήστε το παράδοξο ο αλγόριθμος περιτύλιξης να είναι ταχύτερος για $H = O(1)$.

Outline

Αυξητικός αλγόριθμος για το ΚΠ2



Παράδειγμα: Ανανέωση ΚΠ(10 σημείων) με το επόμενο σημείο p, όπου η τελευταία/πρόσφατη κορυφή είναι η k.

Ορισμός κόκκινων/γαλάζιων ακμών/κορυφών και βυσσινί κορυφών.

Νέα κορυφή

Αυξητικός αλγόριθμος

Κάθε βήμα εξετάζει ένα σημείο (προσθέτει μια κορυφή).

Γενικά ο αλγόριθμος αποφασίζει αν το νέο σημείο βρίσκεται εντός / εκτός του τρέχοντος πολυγώνου.

Προσέγγιση

Διέταξε τα σημεία (κατά φθίνουσα τετμημένη), άρα:
– κάθε νέο σημείο εκτός πολυγώνου (συνεπώς κορυφή),
– υπάρχει κόκκινη ακμή προσπίπτουσα στο προηγούμενο σημείο/κορυφή

Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^2$, σε γενική θέση.
Έξοδος: αλυσίδα ακμών και κορυφών ΚΠ.

1. Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα x: $p_1, \ldots, p_n$.

Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^2$, σε γενική θέση.
Έξοδος: αλυσίδα ακμών και κορυφών ΚΠ.

1. Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα x: $p_1, \ldots, p_n$.
2. Αρχικοποίηση: τρέχον πολύγωνο ← τρίγωνο (p_1, p_2, p_3).

Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^2$, σε γενική θέση.
Έξοδος: αλυσίδα ακμών και κορυφών ΚΠ.

1. Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα x: $p_1, \ldots, p_n$.
2. Αρχικοποίηση: τρέχον πολύγωνο $\leftarrow$ τρίγωνο (p_1, p_2, p_3).
3. Για το σημείο p_k, $k = 4, \ldots, n$:

Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^2$, σε γενική θέση.
Έξοδος: αλυσίδα ακμών και κορυφών ΚΠ.

1. Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα x: $p_1, \ldots, p_n$.
2. Αρχικοποίηση: τρέχον πολύγωνο $\leftarrow$ τρίγωνο (p_1, p_2, p_3).
3. Για το σημείο p_k, $k = 4, \ldots, n$:
    - Εξέτασε τις ακμές που προσπίπτουν στο p_{k-1}: υπάρχει κόκκινη.

Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^2$, σε γενική θέση.
Έξοδος: αλυσίδα ακμών και κορυφών ΚΠ.

1. Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα x: $p_1, \ldots, p_n$.
2. Αρχικοποίηση: τρέχον πολύγωνο $\leftarrow$ τρίγωνο (p_1, p_2, p_3).
3. Για το σημείο p_k, $k = 4, \ldots, n$:
   - Εξέτασε τις ακμές που προσπίπτουν στο p_{k-1}: υπάρχει κόκκινη.
   - Χρωματισμός: Ξεκινώντας από κόκκινη ακμή, βρες όλες τις κόκκινες ακμές και 2 γαλάζιες ακμές δηλ. 2 βυσσινί κορυφές

Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^2$, σε γενική θέση.
Έξοδος: αλυσίδα ακμών και κορυφών ΚΠ.

1. Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα x: $p_1, \ldots, p_n$.
2. Αρχικοποίηση: τρέχον πολύγωνο $\leftarrow$ τρίγωνο (p_1, p_2, p_3).
3. Για το σημείο p_k, $k = 4, \ldots, n$:
   - Εξέτασε τις ακμές που προσπίπτουν στο p_{k-1}: υπάρχει κόκκινη.
   - Χρωματισμός: Ξεκινώντας από κόκκινη ακμή, βρες όλες τις κόκκινες ακμές και 2 γαλάζιες ακμές δηλ. 2 βυσσινί κορυφές
   - Αντικατέστησε κόκκινες ακμές με 2 νέες: κάθε μία ορίζεται από p_k και βυσσινί κορυφή.

Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2

Είσοδος: n σημεία στο $\mathbb{R}^2$, σε γενική θέση.
Έξοδος: αλυσίδα ακμών και κορυφών ΚΠ.

1. Διέταξε τα σημεία λεξικογραφικά κατά φθίνουσα x: $p_1, \ldots, p_n$.
2. Αρχικοποίηση: τρέχον πολύγωνο $\leftarrow$ τρίγωνο (p_1, p_2, p_3).
3. Για το σημείο p_k, $k = 4, \ldots, n$:
   - Εξέτασε τις ακμές που προσπίπτουν στο p_{k-1}: υπάρχει κόκκινη.
   - Χρωματισμός: Ξεκινώντας από κόκκινη ακμή, βρες όλες τις κόκκινες ακμές και 2 γαλάζιες ακμές δηλ. 2 βυσσινί κορυφές
   - Αντικατέστησε κόκκινες ακμές με 2 νέες: κάθε μία ορίζεται από p_k και βυσσινί κορυφή.
4. Επέστρεψε το τρέχον πολύγωνο.

Πολυπλοκότητα αυξητικού αλγορίθμου

- Αρχικοποίηση $= O(n \log n)$.

Πολυπλοκότητα αυξητικού αλγορίθμου

- Αρχικοποίηση $= O(n \log n)$.
- $\forall$ νέο σημείο:

Πολυπλοκότητα αυξητικού αλγορίθμου

- Αρχικοποίηση $= O(n \log n)$.
- $\forall$ νέο σημείο:
    - Εύρεση κόκκινης ακμής $= O(1) \Rightarrow$ Συνολικά $= O(n)$.

Πολυπλοκότητα αυξητικού αλγορίθμου

- Αρχικοποίηση $= O(n \log n)$.
- $\forall$ νέο σημείο:
  - Εύρεση κόκκινης ακμής $= O(1) \Rightarrow$ Συνολικά $= O(n)$.
  - Χρωματισμός όλων των κόκκινων ακμών $\leq \#$νέων ακμών $\leq 2n$.

Πολυπλοκότητα αυξητικού αλγορίθμου

- Αρχικοποίηση $= O(n \log n)$.
- $\forall$ νέο σημείο:
  - Εύρεση κόκκινης ακμής $= O(1) \Rightarrow$ Συνολικά $= O(n)$.
  - Χρωματισμός όλων των κόκκινων ακμών $\leq$ #νέων ακμών $\leq 2n$.
  - Κατασκευή δύο νέων ακμών $= O(1) \Rightarrow$ Συνολικά $= O(n)$.

Πολυπλοκότητα αυξητικού αλγορίθμου

- Αρχικοποίηση $= O(n \log n)$.
- $\forall$ νέο σημείο:
  - Εύρεση κόκκινης ακμής $= O(1) \Rightarrow$ Συνολικά $= O(n)$.
  - Χρωματισμός όλων των κόκκινων ακμών $\leq$ #νέων ακμών $\leq 2n$.
  - Κατασκευή δύο νέων ακμών $= O(1) \Rightarrow$ Συνολικά $= O(n)$.
- Συνολικός χρόνος $= O(n \log n) + O(n) = O(n \log n)$.

Outline

1 Εισαγωγικά

2 Κυρτό Περίβλημα σε δύο διαστάσεις
- Ορισμός ΚΠ2
- Κατηγόρημα προσανατολισμού - CCW
- Αλγόριθμος περιτύλιξης για το ΚΠ2
- Αλγόριθμος Beneath-Beyond για το ΚΠ2
- Γενική θέση vs εκφυλισμένα δεδομένα
- Περαιτέρω αλγόριθμοι

Υπόθεση γενικής θέσης

Υπόθεση γενικής θέσης

Η υπόθεση διευκολύνει τον σχεδιασμό του αλγορίθμου, αλλά δυσκολεύει την υλοποίησή του. Γιαυτό χρησιμοποιούνται μέθοδοι διαταραχής που προσωμοιάζουν την γενική θέση [Υπολογ.Γεωμ:Ενότ.6.3].

Ορισμός γενικής θέσης

Ο ορισμός εξαρτάται από το πρόβλημα, αλλά κάποτε και από τον αλγόριθμο (και τα κατηγορήματα): π.χ. ένας αλγόριθμος σάρωσης του $\mathbb{R}^2$ ίσως υποθέτει πως δεν υπάρχουν 2 σημεία στην ίδια κατακόρυφο

Γενική θέση για το ΚΠd

Ορισμός

Σημειοσύνολο $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathbb{R}^d$ βρίσκεται σε γενική θέση (generic position, non-degenerate), ως προς το πρόβλημα ΚΠd, ανν τα A_i σε κάθε υποσύνολο $d+1$ σημείων, π.χ. $\{A_1, \ldots, A_{d+1}\}$, είναι αφινικώς ανεξάρτητα, δηλ. είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τα

$$A_1 - A_{d+1}, \ldots, A_d - A_{d+1}.$$

Λήμμα

Τα $A_1, \ldots, A_n$ βρίσκονται σε γενική θέση ως προς ΚΠd ανν κάθε κατηγόρημα CCW στο $\mathbb{R}^d$ δίνει μη-μηδενικό πρόσημο. Τότε, κάθε $k+1$ σημεία θα είναι αφινικώς ανεξάρτητα στο $\mathbb{R}^k$, για $1 \leq k \leq d$.

Γενική θέση για το ΚΠ2

Παράδειγμα

- 4 σημεία στο $\mathbb{R}^3$: αφινικώς ανεξάρτητα ανν δεν είναι συνεπίπεδα.
- 3 σημεία στο $\mathbb{R}^2$: αφινικώς ανεξάρτητα ανν δεν είναι συνευθειακά.
- 2 σημεία στην ευθεία: αφινικώς ανεξάρτητα ανν δεν ταυτίζονται.

Παράδειγμα

Η διατύπωση που δώσαμε για τον αλγόριθμο Beneath Beyond στο ΚΠ2 ισχύει για όλα τα δεδομένα σε γενική θέση (και επεκτείνεται ομοίως σε d διαστάσεις).

Outline

Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα

- [Jarvis march], κόστος $O(nH)$. Μέθοδος Περιτυλίγματος (gift wrapping) [Chand,Kapur'70] Ο Chan [1996] πετυχαίνει $O(n \log H)$.
- Ο αυξητικός αλγόριθμος (beneath–beyond) σε $O(n \log n)$. Επεκτείνεται με δυναμικές διαγραφές και προσθήκες σημείων.
- Διαίρει και βασίλευε (Divide and conquer) σε $O(n \log n)$.
- «Βασίλευε και διαίρει» [Kirkpatrick-Seidel'86] σε $O(n \log H)$.
- Ο πρώτος αλγόριθμος Graham scan [1972] σε $O(n \log n)$, βασίζεται σε γωνιακή ταξινόμηση των σημείων.
- [Andrew'79] $O(n \log n)$
- QuickHull $= O(n \log n)$, αν τα σημεία είναι κατανεμημένα ομοιόμορφα, αλλιώς $O(nH)$ [Eddy'77,Bykat'78].

Κάτω φράγμα

Ασκηση

ΚΠ2 $= \Omega(n \log H)$.