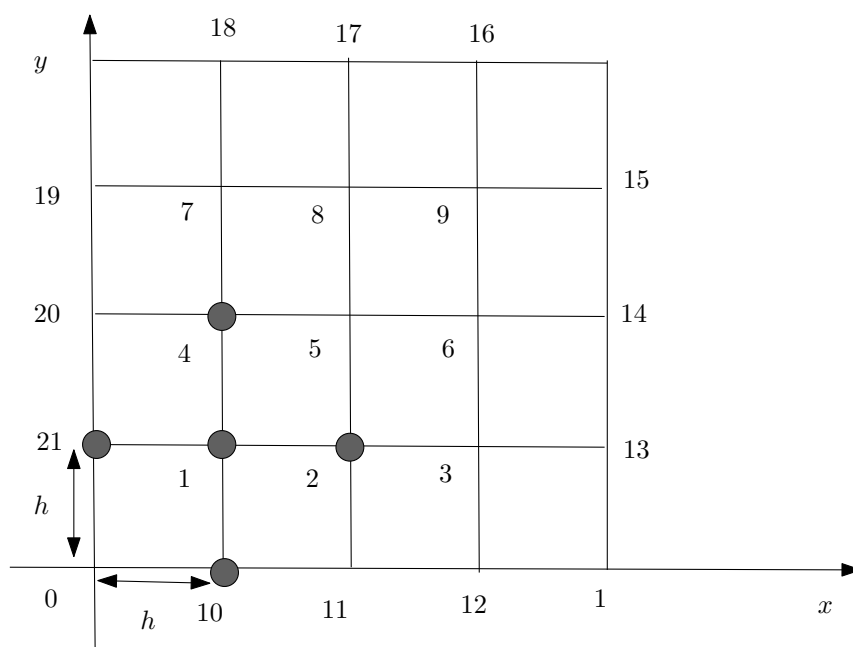




ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Ν. Μισυρλής



ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

ΑΘΗΝΑ 2010

N. Μισυρλής
*Τμήμα Πληροφορικής
και Τηλεπικοινωνιών*

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

ΑΘΗΝΑ 2010

Περιεχόμενα

1	Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων	4
1.1	Βασικά Στοιχεία	4
1.2	Πεπερασμένες Διαφορές	9
1.3	Παραβολικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις	12
1.3.1	Άμεσοι Μέθοδοι	13
1.3.2	Έμμεσες Μέθοδοι (Implicit Methods)	18
1.3.3	Συμβατότητα (Consistency)	28
1.3.4	Δισδιάστατες Παραβολικές Εξισώσεις	50
1.3.5	Έμμεσοι Μέθοδοι Εναλλασόμενων Διευθύνσεων (ADI)	53
2	Αριθμητική Επίλυση Ελλειπτικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων	58
2.1	Εισαγωγή	58
2.2	Συνοριακές Συνθήκες	59
2.3	Πεπαρασμένες Διαφορές	60
2.4	Self-Adjoint	62
2.5	Η Εξίσωση του Laplace	63
2.6	Σύγκλιση	69
2.7	Block Επαναληπτικές Μέθοδοι	76
2.7.1	Παράδειγμα	82
2.8	Ασκήσεις	85

Κεφάλαιο 1

Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

1.1 Βασικά Στοιχεία

Συμβολισμός

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$$

$$u = u(x, y), \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Παραδείγματα

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_x = u + x^2 + y^2$$

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = \exp(u)$$

Η τάξη μιας ΜΔΕ είναι η μεγαλύτερης τάξης παράγωγος στην εξίσωση.

$$\begin{aligned}
 u_x - bu_y &= 0 && \text{1ης τάξης} \\
 u_{xx} + u_y &= 0 && \text{2ης τάξης} \\
 u_{xxx} + u_{yyyy} &= 0 && \text{4ης τάξης}
 \end{aligned}$$

Γραμμικότητα

$$\begin{aligned}
 a(\cdot)u_x + b(\cdot)u_y &= c(\cdot) \\
 (\cdot) &\equiv (x, y) && \text{γραμμική (linear)} \\
 (\cdot) &\equiv (x, y, u) && \text{ημιγραμμική (quasilinear)} \\
 (\cdot) &\equiv (x, y, u, u_x, u_y) && \text{μη γραμμική (nonlinear)}
 \end{aligned}$$

Παραδείγματα

$$\begin{aligned}
 u_x + bu_y &= 0 && \text{γραμμική} \\
 u_x + uu_y &= n^2 && \text{ημιγραμμική} \\
 u_x + (u_y)^2 &= 0 && \text{μη γραμμική}
 \end{aligned}$$

Πρόβλημα

$$u_x = u_{yy} \quad x > 0, \quad 0 < y < 1$$

$$u(0, y) = f(y) \quad x = 0, \quad 0 < y < 1 \quad \text{αρχικές συνθήκες}$$

$$\left. \begin{aligned}
 u(x, 0) &= \phi_1(x) && y = 0, && x \geq 0 \\
 u(x, 1) &= \phi_2(x) && y = 1, && x \geq 0
 \end{aligned} \right\} \text{συνοριακές συνθήκες}$$

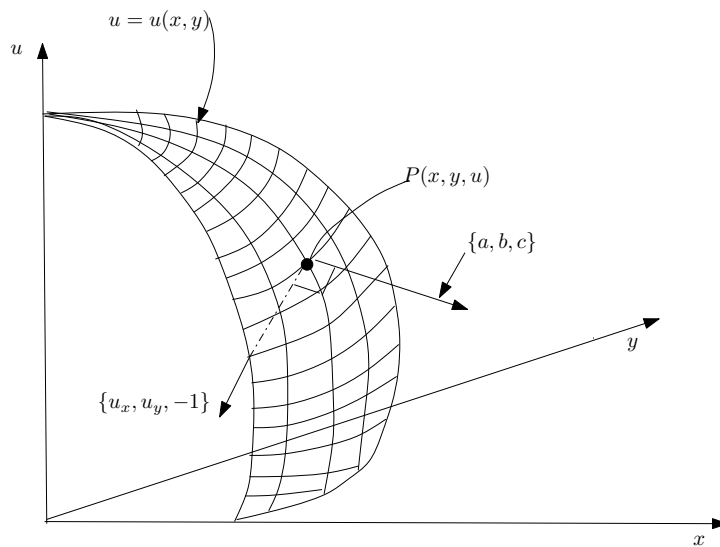
- Καλά τοποθετημένο πρόβλημα
- μοναδική λύση

Πρώτης Τάξης ΜΔΕ

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

$$u = u(x, y)$$

$$du = u_x dx + u_y dy \quad \{a, b, c\} \equiv \{dx, dy, du\}$$



- Επιφάνεια λύση $u = u(x, y)$
- διάνυσμα $\{a, b, c\}$ εφάπτεται στη u
- διάνυσμα $\{u_x, u_y, -1\}$ κάθετο στη u στο σημείο $P(x, y, u)$

ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΔΕ

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

Poisson

$$u_t = u_{xx}$$

heat flow ή diffusion

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

heat flow ή diffusion

$$u_t + uu_x = ku_{xx}$$

Εξίσωση Burger

$$u_{tt} = u_{xx}$$

wave Εξίσωση

$$\begin{aligned}
 b^2 - ac > 0 & \text{ υπερβολική} \\
 b^2 - ac = 0 & \text{ παραβολική} \\
 b^2 - ac < 0 & \text{ ελλειπτική}
 \end{aligned}$$

Αρχικές και συνοριακές συνθήκες

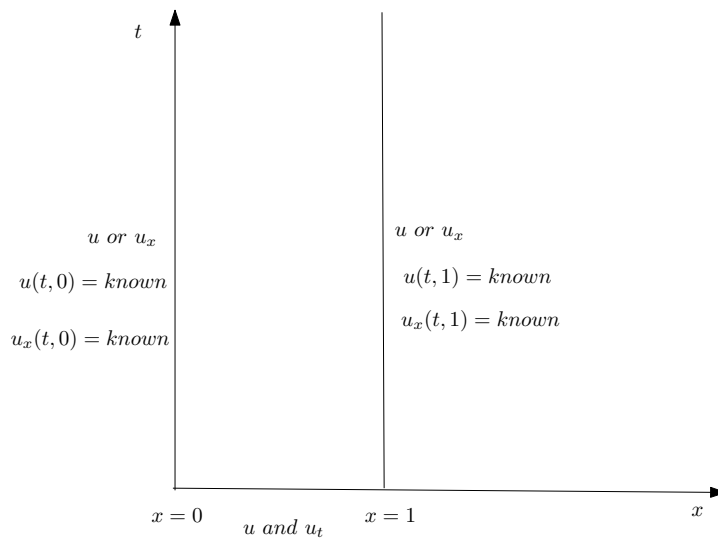
$$a(x, y)u(x, y) + \beta(x, y)u_n(x, y) = \gamma(x, y)$$

$$u_n = \frac{\partial u}{\partial n} \text{ ορθογώνια στο σύνορο}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u_x \quad \text{ή} \quad u_y$$

Παραβολική Εξίσωση

$$u_t = u_{xx}$$



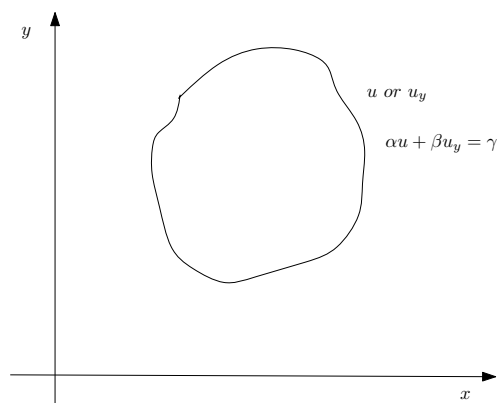
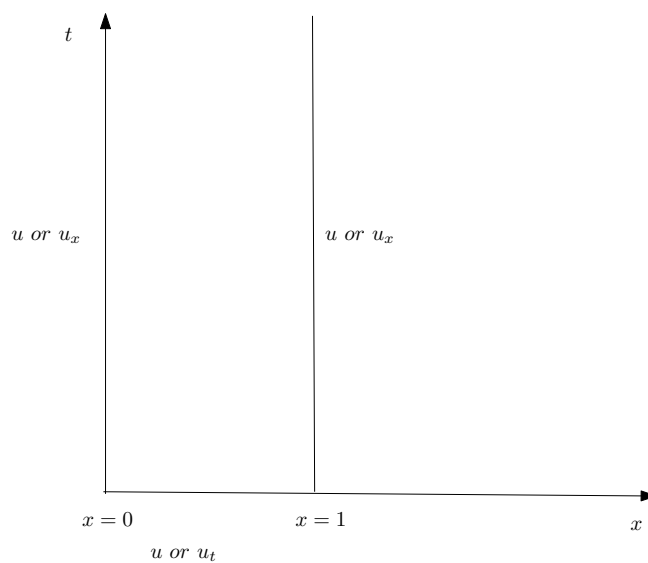
$$\alpha_1 u + \beta_1 u_x = \gamma_1 \quad \text{στο} \quad x = 0$$

και

$$\alpha_2 u + \beta_2 u_x = \gamma_2 \quad \text{στο} \quad x = 1$$

με

$$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad \beta_1, \beta_2 \leq 0, \quad \alpha_1 - \beta_1 > 0, \quad \alpha_2 - \beta_2 > 0$$



Dirichlet	$\beta = 0$	καθορισμός τιμής
Neumann	$\alpha = 0$	καθορισμός κλίσης
Cauchy	$\alpha = 0$ στη μια $\beta = 0$ στην άλλη	καθορισμός τιμής και κλίσης
Robbins	α και $\beta \neq 0$	

1.2 Πεπερασμένες Διαφορές

$$u(x+h) = u(x) + hu_x + \frac{h^2}{2!}u_{xx} + \frac{h^3}{3!}u_{xxx} + O(h^4)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu_x + \frac{h^2}{2!}u_{xx} - \frac{h^3}{3!}u_{xxx} + O(h^4)$$

Προσθέτοντας

$$u_{xx} = \frac{1}{h^2}\{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\} + O(h^2)$$

Αφαιρώντας

$$u_x = \frac{1}{2h}\{u(x+h) - u(x-h)\} + O(h^2)$$

Επίσης

$$u_x = \frac{1}{h}\{u(x+h) - u(x)\} + O(h)$$

και

$$u_x = \frac{1}{h}\{u(x) - u(x-h)\} + O(h)$$

$$x = ih \quad t = jk$$

$$u_P \equiv u(x, t) \equiv u(ih, jk) \equiv u_{ij}$$

$$u_{xx} |_{P=} (u_{xx})_{ij} = \frac{u\{(i+1)h, jk\} - 2u\{ih, jk\} + u\{(i-1)h, jk\}}{h^2} + O(h^2)$$

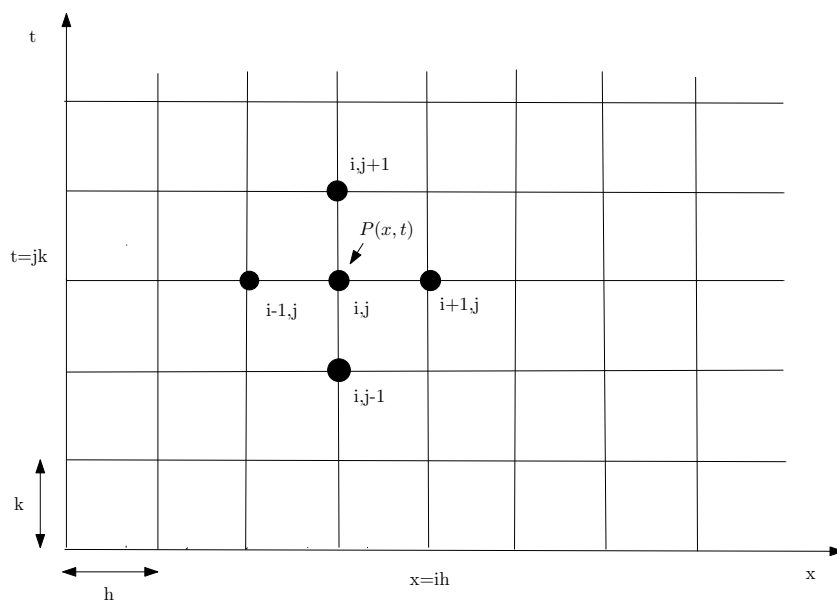
ή

$$(u_{xx})_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$

$$(u_t)_{ij} = \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} + O(k)$$

ή

$$(u_t)_{ij} = \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{k} + O(k)$$



και

$$(u_t)_{ij} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + O(k^2)$$

Υπο μορφή μορίων

$$(u_{xx})_{ij} = \frac{1}{h^2} \left\{ \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \text{---} & \boxed{-1} & \text{---} & \boxed{1} \\ i-1, j & & i, j & & i+1, j \end{array} \right\} + O(h^2)$$

$$(u_t)_{ij} = \frac{1}{2k} \left\{ \begin{array}{cc} \boxed{1} & i, j+1 \\ \boxed{0} & i, j \\ \boxed{-1} & i, j-1 \end{array} \right\} + O(k^2)$$

Ακριβής Τύπος Πεπερασμένων Διαφορών

$$(Du(x, t)) = u_t = L(t, x, D, D^2)u$$

$$Lu = u_{xx}$$

ή

$$Lu = u_{xx} + u_{yy}$$

$$D = \frac{\partial}{\partial t} \dot{h} D^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned} u(x, t+k) &= u(x, t) + ku_t + \frac{k^2}{2!}u_{tt} + \frac{k^3}{3!}u_{ttt} + \dots \\ &= (1 + kD + \frac{k^2}{2!}D^2 + \frac{k^3}{3!}D^3 + \dots)u(x, t) \end{aligned}$$

ή

$$u(x, t+k) = \exp(kD)u(x, t) \quad (1.1)$$

ή

$$u_{i,j+1} = \exp(kD)u_{i,j} = \exp(kL(x, t, D, D^2))u_{i,j} \quad (1.2)$$

$$Eu(x) = u(x+h)$$

Από (1.1)

$$E = \exp(kD)$$

ή

$$kD = \ln E = \begin{cases} \ln(1 + \Delta) = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \dots \\ \ln(1 - \nabla) = \nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \dots \end{cases}$$

όπου

$$\Delta u(x) = u(x+h) - u(x)$$

$$\nabla u(x) = u(x) - u(x-h)$$

και

$$E = 1 + \Delta, \quad E = 1 - \nabla$$

Επίσης

$$\delta = 2 \sin h\left(\frac{hD}{2}\right) \quad (1.3)$$

όπου

$$\begin{aligned}
\delta u(x) &= u\left(x + \frac{h}{2}\right) - u\left(x - \frac{h}{2}\right) = u_{i+1/2} - u_{i-1/2} \\
\delta^2 u(x) &= \delta(\delta u(x)) = \delta(u_{i+1/2} - u_{i-1/2}) \\
&= \delta u_{i+1/2} - \delta u_{i-1/2} = (u_{i+1} - u_i) - (u_i - u_{i-1}) \\
&= u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta^2 u_i = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}} \quad (1.4)$$

Από (1.3)

$$hD = 2 \sin h^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

ή

$$D = \frac{2}{h} \sin h^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{h} \left(\delta - \frac{1}{2^2 3!} \delta^3 + \frac{3^2}{2^4 5!} \delta^5 - \dots \right)$$

Από (1.2)

$$u_{i,j+1} = \exp\left(kL(u, t, \frac{2}{h} \sin h^{-1}\left(\frac{\delta_x}{2}\right), \left(\frac{2}{h} \sin h^{-1}\left(\frac{\delta_x}{2}\right)\right)^2\right) u_{ij}$$

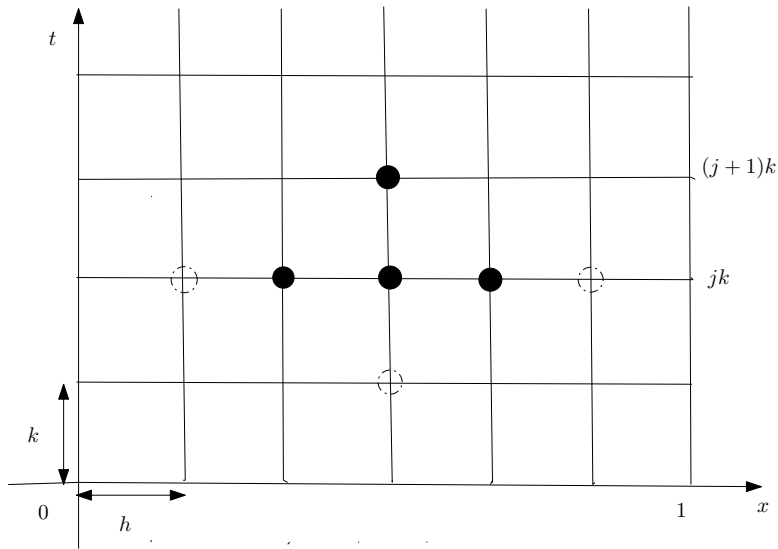
ή

$$u_{i,j+1} = \exp(kL(u, t, D, D^2)) u_{ij}.$$

1.3 Παραβολικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Παραβολικές εξισώσεις σε μια διάσταση

$$\sigma(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \gamma(x, t) u$$



1.3.1 Άμεσοι Μέθοδοι

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.5)$$

$$u_{i,j+1} = \exp\left(k \frac{\partial}{\partial t}\right) u_{ij} = \exp(kL) u_{ij} \quad (1.6)$$

όπου

$$L \equiv D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (1.7)$$

$$D = \frac{2}{h} \sin h^{-1} \frac{\delta_x}{2} = \frac{1}{h} \left(\delta_x - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3!} \delta_x^3 + \frac{3^2}{2 \cdot 4 \cdot 5!} \delta_x^5 - \dots \right) \quad (1.8)$$

και

$$D^2 = \frac{1}{h^2} \left(\delta_x^2 - \frac{1}{12} \delta_x^4 + \frac{1}{90} \delta_x^6 - \dots \right) \quad (1.9)$$

Από (1.6) λόγω (1.7) έχουμε

$$u_{i,j+1} = \exp(kD^2) u_{ij} \quad (1.10)$$

Από (1.10) λόγω (1.9) έχουμε

$$u_{i,j+1} = \exp\left[r \left(\delta_x^2 - \frac{1}{12} \delta_x^4 + \frac{1}{90} \delta_x^6 - \dots \right)\right] u_{ij}$$

$$\left[1+r\left(\delta_x^2-\frac{1}{12}\delta_x^4+\frac{1}{90}\delta_x^6-\dots\right)+\frac{r^2}{2!}\left(\delta_x^2-\frac{1}{12}\delta_x^4+\frac{1}{90}\delta_x^6-\dots\right)^2+\frac{r^3}{3!}\left(\dots\right)^3+\dots\right]u_{ij}$$

όπου

$$r = k/h^2$$

ή

$$u_{i,j+1} = \left(1 + r\delta_x^2 - \frac{r}{12}\delta_x^4 + \frac{r}{90}\delta_x^6 - \dots\right)u_{ij} \\ + \frac{1}{2}\left(r^2\delta_x^4 - \frac{2r^2}{12}\delta_x^6 + \dots\right)u_{ij} + \dots$$

ή

$$u_{i,j+1} = \left[1+r\delta_x^2+\frac{1}{2}r\left(r-\frac{1}{6}\right)\delta_x^4+\frac{1}{6}r\left(r^2-\frac{1}{2}r+\frac{1}{15}\right)\delta_x^6+\dots\right]u_{ij} \quad (1.11)$$

Προσεγγίζοντας την (1.11) έχουμε

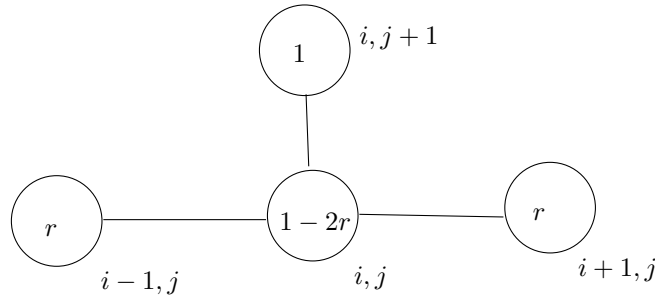
$$U_{i,j+1} = \underbrace{(1+r\delta_x^2)}_{\text{}}U_{i,j} \quad (1.12)$$

ή

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + r(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j})$$

ή

$$U_{i,j+1} = rU_{i-1,j} + (1-2r)U_{i,j} + rU_{i+1,j} \quad (1.13)$$



Περίπτωση II: Συντελεστές εξαρτώμενοι από το x

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \alpha(x) \neq 0 \quad \forall x$$

$$L \equiv \alpha D^2$$

$$u_{i,j+1} = \exp(k\alpha D^2)u_{i,j} = [1 + k\alpha D^2 + \frac{1}{2}k^2\alpha D^2(\alpha D^2) + \dots]u_{i,j}$$

$$= [1 + kD^2 + \frac{1}{2}k^2\alpha(\alpha'' D^2 + 2\alpha' D^3 + \alpha D^4) + \dots]u_{i,j}$$

$$u_{i,j+1} = [1 + k\alpha \frac{1}{h^2}(\delta_x^2 - \frac{1}{12}\delta_x^4 + \frac{1}{90}\delta_x^6 - \dots) + \dots]u_{i,j}$$

$$U_{i,j+1} = (1 + r\alpha\delta_x^2)U_{ij}, \quad r = k/h^2$$

$$U_{i,j+1} = r\alpha U_{i-1,j} + (1 - 2r\alpha)U_{ij} + r\alpha U_{i+1,j} \quad (1.14)$$

όπου $\alpha(x) = \alpha(ih)$

Περίπτωση III: Self - adjoint

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x})$$

$$u_{i,j+1} = \exp(kL)u_{ij} = \exp(kD(\alpha_i D))u_{ij} = [1 + kD(\alpha_i D) + \dots]u_{ij}$$

$$D \simeq \frac{1}{h}\delta_x$$

$$U_{i,j+1} = [1 + \frac{k}{h^2}\delta_x(\alpha_i \delta_x)]U_{ij}. \quad (1.15)$$

Αλλά

$$\delta_x(\alpha_i \delta_x)U_{ij} = \delta_x(\alpha_i(U_{i+1/2,j} - U_{i-1/2,j}))$$

$$= \delta_x(\alpha_i U_{i+1/2,j}) - \delta_x(\alpha_i U_{i-1/2,j})$$

$$= \underbrace{(\alpha_{i+1/2}U_{i+1,j} - \alpha_{i-1/2}U_{ij}) - (\alpha_{i+1/2}U_{i,j} - \alpha_{i-1/2}U_{i-1,j})}_{(1.16)}$$

Από (1.15) λόγω (1.16) έχουμε

$$u_{i,j+1} = u_{ij} + r = (\alpha_{i+1/2}U_{i+1,j} - \alpha_{i-1/2}U_{ij}) - (\alpha_{i+1/2}U_{i,j} - \alpha_{i-1/2}U_{i-1,j}).$$

ή

$$U_{i,j+1} = r\alpha_{i-1/2}U_{i-1,j} + [1 - r(\alpha_{i+1/2} + \alpha_{i-1/2})]U_{ij} + r\alpha_{i+1/2}U_{i+1,j} \quad (1.17)$$

DuFort - Frankel

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

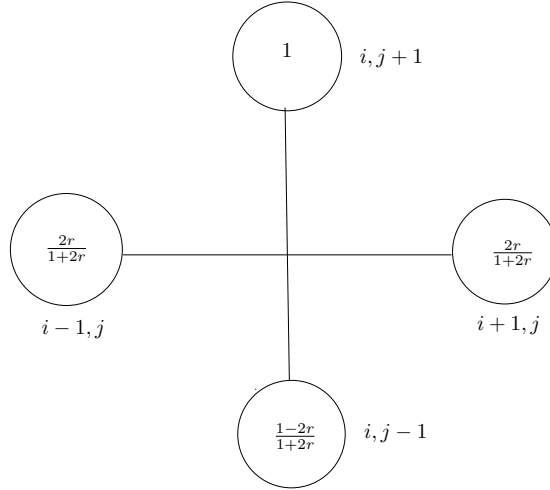
$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2k} = \frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} + U_{i+1,j}}{h^2} \quad (1.18)$$

ή θέτοντας $U_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j+1} + U_{i,j-1})$

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2k} = \frac{U_{i-1,j} - (U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) + U_{i+1,j}}{h^2}$$

ή

$$(1 + 2r)U_{i,j+1} = 2r(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) + (1 - 2r)U_{i,j-1} \quad (1.19)$$

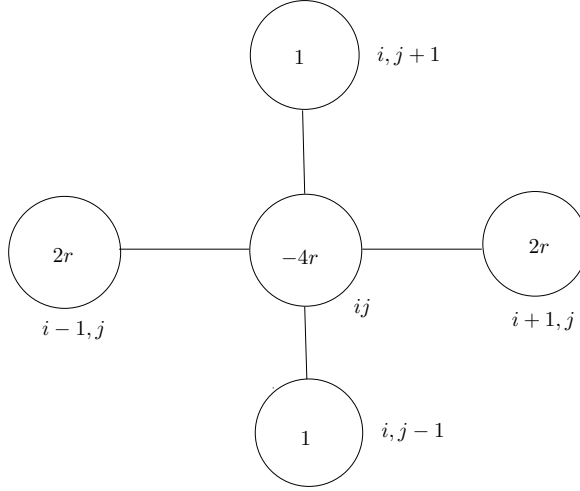


Richardson

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{U_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} = \frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} + U_{i+1,j}}{h^2}$$

$$U_{i,j+1} = U_{i,j-1} + 2r(U_{i-1,j} - 2U_{ij} + u_{i+1,j}) \quad (1.20)$$



Τοπική ακρίβεια

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor έχουμε

$$u_{i,j+1} = u_{ij} + k \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{ij} + \frac{1}{2!} k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{ij} + \dots$$

$$u_{i+1,j} = u_{ij} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ij} + \frac{1}{2!} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ij} + \frac{1}{3!} h^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{ij} + \frac{1}{4!} h^4 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{ij} + \dots$$

$$u_{i-1,j} = u_{ij} - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ij} + \frac{1}{2!} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ij} - \frac{1}{3!} h^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{ij} + \frac{1}{4!} h^4 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{ij} - \dots$$

Συνεπώς

$$u_{i,j+1} - (1 - 2r)u_{ij} - r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) =$$

$$k \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ij} + \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{6r} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{ij} + \dots \quad (1.21)$$

$$z_{ij} = u_{ij} - U_{ij} \quad (1.22)$$

u_{ij} : ακριβής λύση ΜΔΕ

U_{ij} : ακριβής λύση εξισώσεως διαφορών

Από τις (1.13), (1.21) και (1.22) έχουμε

$$z_{i,j+1} = (1 - 2r)z_{ij} + r(z_{i-1,j} + z_{i+1,j}) + \underbrace{\frac{1}{2}k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{6r} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)}_{\text{τοπικό σφάλμα αποκοπής}}_{ij} + \dots$$

ή

$$z_{i,j+1} = (1 - 2r)z_{ij} + r(z_{i-1,j} + z_{i+1,j}) + O(k^2 + kh^2) \quad (1.23)$$

1.3.2 Έμμεσες Μέθοδοι (Implicit Methods)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(x, t, D, D^2)u$$

ή

$$u_{i,j+1} = \exp\left(k \frac{\partial}{\partial t}\right)u_{ij}$$

ή

$$u_{i,j+1} = \exp(kL)u_{ij}$$

ή πολλαπλασιάζοντας επί $\exp(-\frac{1}{2}kL)$

$$\exp(-\frac{1}{2}kL)u_{i,j+1} = \exp(\frac{1}{2}kL)u_{ij}. \quad (1.24)$$

Περίπτωση I: Σταθεροί Συντελεστές

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

οπότε

$$L \equiv D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Από (1.24) έχουμε

$$\exp(-\frac{1}{2}kD^2)u_{i,j+1} = \exp(\frac{1}{2}kD^2)u_{ij} \quad (1.25)$$

αλλά

$$D^2 = \frac{1}{h^2}(\delta_x^2 - \frac{1}{12}\delta_x^4 + \frac{1}{90}\delta_x^6 - \dots)$$

άρα η (1.25) γράφεται

$$\left(1 - \frac{1}{2}k\delta_x^2\right) U_{i,j+1} = \left(1 + \frac{1}{2}r\delta_x^2\right) U_{ij} \quad (1.26)$$

με σφάλμα αποκοπής της τάξης $O(k^3 + kh^2)$.

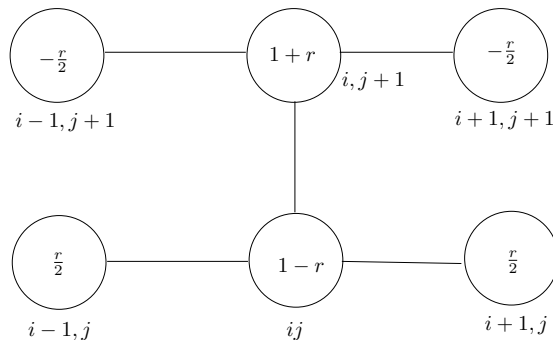
Εφαρμόζοντας τον τελεστή δ_x^2 (βλ. (1.2)) έχουμε από την (1.26) ότι

$$\begin{aligned} U_{i,j+1} - \frac{1}{2}r(U_{i-1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1}) = \\ = U_{i,j} + \frac{1}{2}r(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}) \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} -\frac{r}{2}U_{i-1,j+1} + (1+r)U_{i,j+1} - \frac{r}{2}U_{i+1,j+1} \\ = \frac{r}{2}U_{i-1,j} + (1-r)U_{i,j} + \frac{r}{2}U_{i+1,j}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Μέθοδος των Crank - Nicolson



Μέθοδος του Douglas

Για μεγαλύτερη ακρίβεια

$$D^2 = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\delta_x^2}{1 + \frac{1}{12}\delta_x^2} \quad (1.28)$$

Η (1.24) λόγω της (1.28) γίνεται

$$\left[1 - \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{6}\right)\delta_x^2\right] U_{i,j+1} = \left[1 + \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{6}\right)\delta_x^2\right] U_{ij} \quad (1.29)$$

με τοπικό σφάλμα αποκοπής $O(k^3 + hk^4)$.

Περίπτωση Self-Adjoint

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}) \quad (1.30)$$

$$u_{i,j+1} = \exp(kL)u_{ij}$$

$$\exp(-\frac{1}{2}kL)u_{i,j+1} = \exp(\frac{1}{2}kL)u_{ij}$$

$$L = D(\alpha D), \quad D \simeq \frac{1}{h}\delta_x$$

$$(1 - \frac{1}{2}kL)U_{i,j+1} = (1 + \frac{1}{2}kL)U_{ij}$$

ή

$$\left[1 - \frac{r}{2}\delta_x(\alpha_{i,j+1}\delta_x)\right]U_{i,j+1} = \left[1 + \frac{r}{2}\delta_x(\alpha_{ij}\delta_x)\right]U_{ij} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{r}{2}\alpha_{i-1/2,j+1}U_{i-1,j+1} + \left[1 + \frac{r}{2}(\alpha_{i+1/2,j+1} + \alpha_{i-1/2,j+1})\right]U_{i,j+1} - \frac{r}{2}\alpha_{i+1/2,j+1}U_{i+1,j+1} \\ & = \frac{r}{2}\alpha_{i-1/2,j}U_{i-1,j} + \left[1 + \frac{r}{2}(\alpha_{i+1/2,j} + \alpha_{i-1/2,j})\right]U_{i,j} + \frac{r}{2}\alpha_{i+1/2,j}U_{i+1,j} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Γενίκευση

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_{i,j+1} = \exp(kL)u_{i,j}, \quad L \equiv D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

ή

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= \exp(k\lambda L)u_{i,j}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \\ \exp(-\frac{1}{2}k\lambda L)u_{i,j+1} &= \exp(\frac{1}{2}k\lambda L)u_{i,j} \\ (1 - \frac{1}{2}r\lambda\delta_x^2)U_{i,j+1} &= (1 + \frac{1}{2}r\lambda\delta_x^2)U_{i,j} \end{aligned}$$

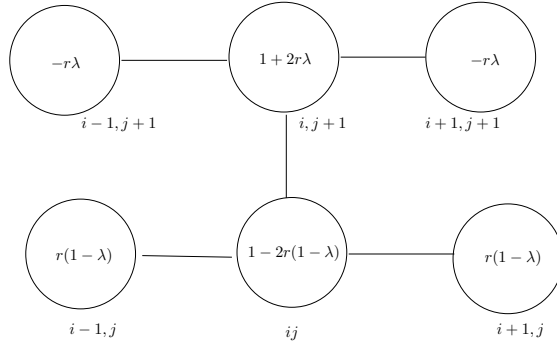
ή

$$\begin{aligned} & -r\lambda U_{i-1,j+1} + (1 + 2r\lambda)U_{i,j+1} - r\lambda U_{i+1,j+1} \\ & = r(1 - \lambda)U_{i-1,j} + [1 - 2r(1 - \lambda)]U_{i,j} + r(1 - \lambda)U_{i+1,j} \end{aligned} \quad (1.33)$$

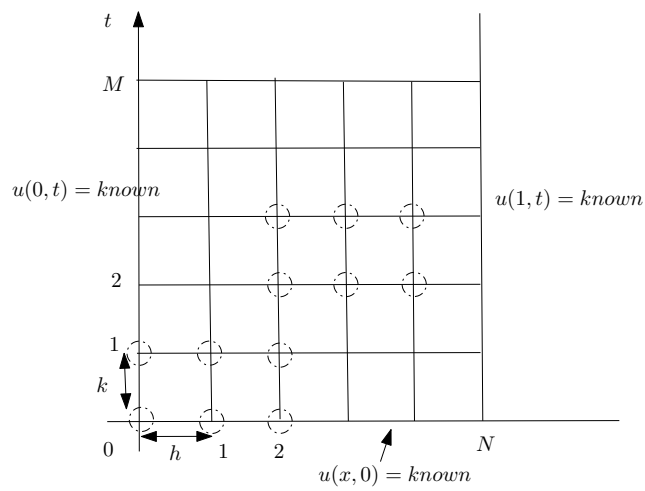
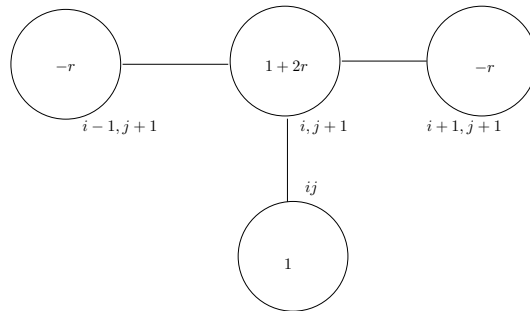
Μέθοδος Ο' Brian, Hyman και Kaplan

Για $\lambda = 1$ η (1.33) γίνεται

$$-rU_{i-1,j+1} + (1 + 2r)U_{i,j+1} - rU_{i+1,j+1} = U_{i,j} \quad (1.34)$$



- Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ η (1.33) παράγει τη μέθοδο των Crank - Nicolson
- Αν $\lambda = 0$, τότε προκύπτει η άμεσος μέθοδος



Παράδειγμα

Δίνεται το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (ΠΑΣ) (βλέπε παρακάτω Σχήμα)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Crank - Nicolson

$$h = \frac{1}{N}, \quad T = kM$$

$$-\frac{r}{2}U_{i-1,j+1} + (1+r)U_{i,j+1} - \frac{r}{2}U_{i+1,j+1} =$$

$$= \underbrace{\frac{r}{2}U_{i-1,j} + (1-r)U_{ij} + \frac{r}{2}U_{i+1,j}}_{\equiv b_{ij}}, \quad i = 1(1)N-1, j = 0(1)M$$

(1.35)

$$(j = 0) \quad -\frac{r}{2}U_{i-1,1} + (1+r)U_{i,1} - \frac{r}{2}U_{i+1,1} = b_{i,0}, \quad i = 1(1)N-1$$

$$\begin{bmatrix} 1+r & -\frac{r}{2} & & & \mathbf{0} \\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & & \\ & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & -\frac{r}{2} & 1+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j+1} \\ U_{2,j+1} \\ U_{3,j+1} \\ \vdots \\ U_{N-2,j+1} \\ U_{N-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,j} + \frac{r}{2}U_{0,j+1} \\ b_{2,j} \\ b_{3,j} \\ \vdots \\ b_{N-2,j} \\ b_{N-1,j} + \frac{r}{2}U_{N,j+1} \end{bmatrix}$$

Για τον υπολογισμό των $U_{i,j+1}$ απαιτείται η λύση του τριδιαγώνιου συστήματος (1.33). Το σύστημα αυτό λύνεται με μία άμεση μέθοδο.

Συμβατότητα (Consistency)

- Αν $h, k \rightarrow 0$, τότε τα σφάλματα αποκοπής $\rightarrow 0$
- Το μοντέλο των πεπερασμένων διαφορών προσεγγίζει την επιθυμητή ΜΔΕ και όχι κάποια άλλη ΜΔΕ

Σφάλμα αποκοπής της κλασικής άμεσου μεθόδου

$$\Sigma.A = \frac{1}{2}k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{12}kh^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots$$

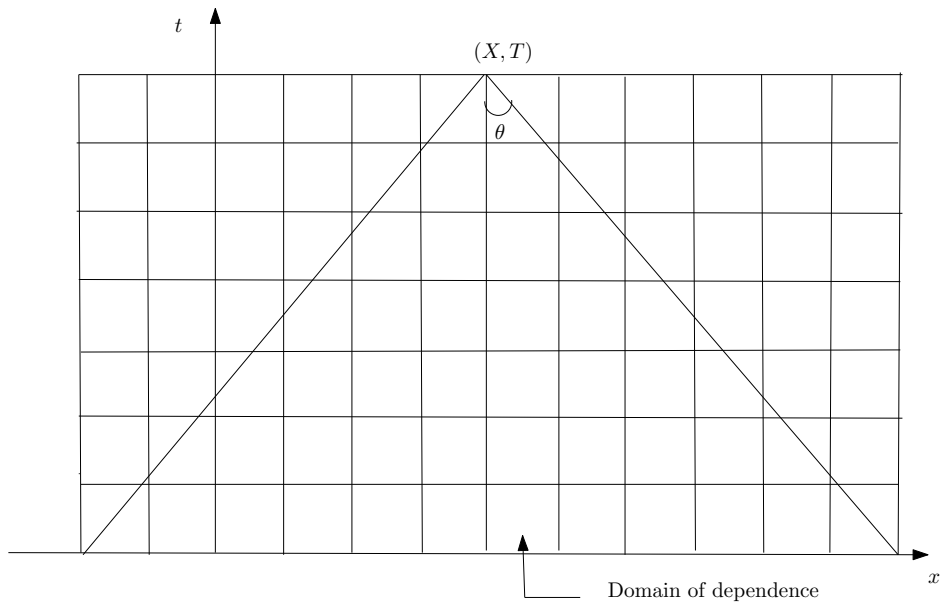
άρα αν $h, k \rightarrow 0$, τότε και $\Sigma.A \rightarrow 0$

Σύγκλιση

$$u(X, T) - U(X, T) \rightarrow 0 \quad (1.36)$$

αν $h, k \rightarrow 0$ και $i, j \rightarrow \infty$
με $ih = X$ και $jk = T$ σταθερά και

$$k = rh^2 \quad (1.37)$$



$$\theta = \tan^{-1} \frac{h}{k} = \tan^{-1} \frac{1}{rh}$$

$$h \rightarrow 0, \quad r = \text{σταθερό} \quad \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\text{χωρίο εξάρτησης} \rightarrow 0 \leq t \leq T$$

Συνεπώς το πεδίο εξάρτησης της αμέσου μεθόδου συγκλίνει σε αυτό της ΜΔΕ αν ισχύει η $r = kh^2$ ($r = kh^\alpha, \alpha > 1$). Για τις εμμέσους μεθόδους είναι φανερό ότι το πεδίο εξάρτησης συμπίπτει με εκείνο της ΜΔΕ.

Σύγκλιση της αμέσου μεθόδου

Από την (1.23) έχουμε ότι

$$e_{i,j+1} = (1 - 2r)e_{i,j} + r(e_{i+1,j} + e_{i-1,j}) + O(k^2 + kh^2) \quad (1.38)$$

Αν

$$\boxed{0 < r \leq \frac{1}{2}} \quad (1.39)$$

τότε

$$|e_{i,j+1}| \leq (1 - 2r)|e_{i,j}| + r|e_{i+1,j}| + r|e_{i-1,j}| + A(k^2 + kh^2).$$

Έστω E_j το μέγιστο απόλυτο σφάλμα κατά μήκος της j χρονο-γραμμής, τότε

$$E_{j+1} \leq (1 - 2r)E_j + rE_j + rE_j + A(k^2 + kh^2)$$

ή

$$E_{j+1} \leq E_j + A(k^2 + kh^2) \leq E_{j-1} + 2A(k^2 + kh^2) \leq \dots$$

ή

$$E_{j+1} \leq E_0 + jA(k^2 + kh^2), \quad E_0 = 0$$

$$E_{j+1} \leq jkA(k + h^2) = TA(k + h^2) \rightarrow 0$$

αν $h, k \rightarrow 0$ για σταθερά X, T .

Ευστάθεια

Να βρεθούν συνθήκες τέτοιες ώστε η $U_{ij} - \tilde{U}_{ij}$ να είναι φραγμένη αν $j \rightarrow \infty$ και k σταθερό.

Η μέθοδος του von Neumann για την κλασική άμεση μέθοδο

$$E(x) = \sum_j A_j e^{i\beta_j x}$$

$|\beta_j| =$ συχνότητες. Έστω

$$E(x, t) \simeq e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta x} \quad (1.40)$$

όπου $\alpha = \alpha(\beta)$ μιγαδικό. Για να μην αυξάνει το αρχικό σφάλμα θα πρέπει για $x \rightarrow \infty$, λόγω της (1.40)

$$|e^{\alpha t}| \leq 1$$

για όλα τα α , ή

$$|e^{\alpha k}| \leq 1. \quad (1.41)$$

Για την κλασική άμεση μέθοδο έχουμε

$$Nh = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t = 0 \quad E(ph) = E_{p0} \quad (p = 0, \dots, N)$$

$$E_{p0} = \sum_{p=0}^N A_p e^{i\beta_j ph} \quad (1.42)$$

$$E_{p,q+1} = (1 - 2r)E_{pq} + r(E_{p+1,q} + E_{p-1,q}) \quad (1.43)$$

Θέτουμε

$$E_{pq} = e^{i\beta ph} \cdot e^{\alpha t}$$

ή

$$E_{pq} = e^{i\beta ph} \cdot \xi^q, \quad \xi = e^{ak} \quad (1.44)$$

Οπότε η (1.43) γράφεται

$$e^{i\beta ph} \cdot \xi^{q+1} = (1 - 2r)e^{i\beta ph} \cdot \xi^q + r(e^{i\beta(p+1)h} \cdot \xi^q + e^{i\beta(p-1)h} \cdot \xi^q)$$

ή

$$\begin{aligned} \xi &= (1 - 2r) + r(e^{i\beta h} + e^{-i\beta h}) \\ &= 1 - 2r(1 - \cos \beta h) = 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta h}{2} \end{aligned}$$

Αλλά, λόγω των (1.41) και (1.44) πρέπει

$$|\xi| \leq 1$$

Συνεπώς

$$\left| 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right| \leq 1$$

$$\text{ή } \boxed{0 < r \leq \frac{1}{2}} \quad (1.45)$$

Μέθοδος των πινάκων

$$U_{i,j+1} = rU_{i-1,j} + (1 - 2r)U_{ij} + rU_{i+1,j}$$

με $U_{0,j} = U_{N,j} = 0$, $Nh = 1$ οδηγεί στο σύστημα

$$\begin{bmatrix} U_{1,j+1} \\ U_{2,j+1} \\ \vdots \\ U_{N-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & r & \\ & & & r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j} \\ U_{2,j} \\ \vdots \\ U_{N-1,j} \end{bmatrix}$$

ή

$$U_{j+1} = AU_j$$

ή

$$U_{j+1} = AU_j = A \cdot AU_{j-1} = \dots = A^{j+1}U_0.$$

$$E = U - \tilde{U}$$

τότε

$$E_j = U_j - \tilde{U}_j = A^j(U_0 - \tilde{U}_0) = A^j E_0$$

ή

$$\|E_j\| \leq \|A^j\| \cdot \|E_0\| \leq \|A\|^j \cdot \|E_0\|$$

Αν

$$\max_s \widehat{|\lambda_s|}^{\text{ιδιοτιμές του A}} = S(A) \leq \|A\| < 1 \quad \text{τότε} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|E_j\| = 0$$

Αλλά

$$A = I + rT_{N-1}, \quad T_{N-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \mathbf{0} \\ 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

με

$$\lambda(T_{N-1}) = \lambda\{b, \alpha, c\} = \alpha + 2(\sqrt{bc} \cos(s\pi/N)), \quad s = 1, 2, \dots, N-1$$

άρα

$$\lambda_s = -4 \sin^2 \frac{s\pi}{2N} \quad s = 1, 2, \dots, N-1$$

και

$$|1 - 4r \sin^2 \frac{s\pi}{2N}| < 1$$

$$\text{ή} \quad \boxed{0 < r \leq \frac{1}{2}} \quad (1.46)$$

1.3.3 Συμβατότητα (Consistency)

$$h, k \rightarrow 0 \quad \text{τότε} \quad \Sigma.A \rightarrow 0$$

ή

Το μοντέλο των πεπερασμένων διαφορών προσεγγίζει την επιθυμητή ΜΔΕ

Παράδειγμα

Για την άμεση μέθοδο έχουμε

$$\Sigma.A = \frac{1}{2}k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{12}kh^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \dots \rightarrow 0$$

για $k, h \rightarrow 0$,

συνεπώς η μέθοδος αυτή είναι συμβατή.

Υπάρχει άπειρο πλήθος συμβατών προσεγγίσεων σε μια ΜΔΕ. Άρα η ιδιότητα αυτή από μόνη της δεν αρκεί για τη διάκριση μεταξύ διαφόρων προσεγγίσεων πεπερασμένων διαφορών.

Το θεώρημα ισοδυναμίας του Lax

Για ένα "καλά τοποθετημένο" πρόβλημα αρχικών ή συνοριακών τιμών που χρησιμοποιεί μια παραβολική εξίσωση και για ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών που είναι συμβατό, τότε η ευστάθεια είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για σύγκλιση.

Συνοριακές συνθήκες με παραγώγους

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

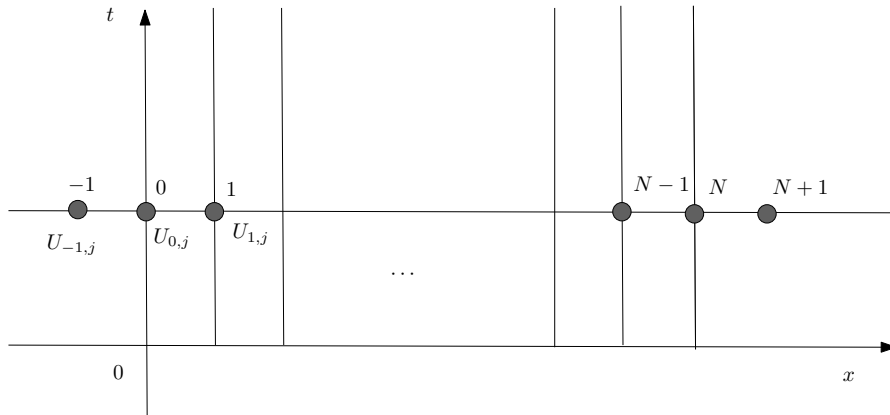
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u, \quad x = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -u \quad x = 1, \quad t \geq 0 \quad (1.48)$$

Από την (1.47) έχουμε

$$\frac{U_{1,j} - U_{-1,j}}{2h} = U_{0,j} \quad (1.49)$$



Ομοίως από την (1.48)

$$\frac{U_{N+1,j} - U_{N-1,j}}{2h} = -U_{N,j} \quad (1.50)$$

$$U_{i,j+1} = rU_{i-1,j} + (1 - 2r)U_{i,j} + rU_{i+1,j} \quad (1.51)$$

Για $x = 0$ ($i = 0$) η (1.51) δίνει

$$U_{0,j+1} = rU_{-1,j} + (1 - 2r)U_{0,j} + rU_{1,j} \quad (1.52)$$

Απαλείφοντας το $U_{-1,j}$ από τις (1.49) και (1.52) λαμβάνουμε

$$U_{0,j+1} = [1 - 2r(1 + h)]U_{0,j} + 2rU_{1,j}.$$

Όμοια για την άλλη συνοριακή συνθήκη. Από (1.46) και (1.47) έχουμε $x = 1$ ($i = N$)

$$U_{N,j+1} = rU_{N-1,j} + (1 - 2r)U_{N,j} + rU_{N+1,j}$$

και απαλείφοντας το $U_{N+1,j}$

$$U_{N,j+1} = [1 - 2r(1 + h)]U_{N,j} + 2rU_{N-1,j}.$$

Παραδείγματα

1. Αν τα άκρα μιας θερμικά απομονωμένης ράβδου κρατούνται σε επαφή με πάγο και αν η αρχική κατανομή της θερμοκρασίας δίνεται από την σχέση

$$(\alpha) \quad u = 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$(\beta) \quad u = 2(1 - x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

Ζητείται να επιλυθεί αριθμητικά η παραβολική Μ.Δ.Ε

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2}$$

που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

$$(\alpha) \quad u = 0, \quad \text{για } x = 0, \quad x = 1, \quad 0 \leq t \leq 0.1 \quad (\text{συνοριακές συνθήκες})$$

(β)

$$\left. \begin{aligned} u &= 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ u &= 2(1 - x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{aligned} \right\} , t = 0 \quad (\text{αρχικές συνθήκες})$$

Περίπτωση I:

$$\text{Έστω } \left. \begin{aligned} h &= \frac{1}{10} \\ k &= \frac{1}{1000} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r = \frac{k}{h^2} = \frac{1}{10}$$

Η εξίσωση 0 γίνεται

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{10}(U_{i-1,j} + 8U_{i,j} + U_{i+1,j}) \quad (4)$$

άρα το υπολογιστικό μόριο είναι

Αν το πρόβλημα είναι συμμετρικό ως προς την ευθεία $x = \frac{1}{2}$, τότε εργαζόμαστε μόνο για $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Με εφαρμογή της εξίσωσης 0 προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

αποτελεσμάτων

	(i = 0) x = 0	(i = 1) 0.1	(i = 2) 0.2	(i = 3) 0.3	(i = 4) 0.4	(i = 5) 0.5	(i = 6) 0.6
t = 0.000	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000	0.8000
0.001	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.9600	0.8000
0.002	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.7960	0.9280	0.7960
0.003	0	0.2000	0.4000	0.5996	0.7896	0.9016	0.7896
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.01	0	0.1996	0.3968	0.5822	0.7281	0.7867	0.7281
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.02	0	0.1938	0.3781	0.5373	0.6486	0.6891	0.6486

Η αναλυτική λύση της Μ.Δ.Ε είναι η

$$u = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}$$

	<u>Πεπ. Διαφορές</u> x = 0.3	<u>Αναλυτική</u> x = 0.3	<u>Διαφορά</u>
t = 0.005	0.5971	0.5966	0.0005
t = 0.01	0.5822	0.5799	0.0023
t = 0.02	0.5376	0.5334	0.0039
t = 0.10	0.2472	0.2444	0.0028

Άρα η άμεση μέθοδος είναι ικανοποιητικά ακριβής.

Για $x = 0.5$ η ακρίβεια της αρ. λύσης δεν είναι τόσο καλή, γιατί υπάρχει ασυνέχεια στην αρχική τιμή $\frac{\partial u}{\partial x}$ από +2 έως -2 στο σημείο αυτό.

	<u>Αρ. Λύση</u> <u>Πεπερ. Διαφ.</u> x = 0.5	<u>Αναλυτική</u> <u>Λύση</u> x = 0.5	<u>Διαφορά</u>
t = 0.005	0.8597	0.8404	0.0193
t = 0.01	0.7867	0.7743	0.0124
t = 0.02	0.6891	0.6809	0.0082
t = 0.10	0.3056	0.3021	0.0035

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της ασυνέχειας ελαττώνεται όταν καθώς το t αυξάνει.

Αποδεικνύεται αναλυτικά ότι όταν οι συνοριακές τιμές είναι σταθερές το αποτέλεσμα των ασυνεχειών στις αρχικές τιμές και στις αρχικές παραγώγους στη λύση μιας παραβολικής εξίσωσης ελαττώνεται καθώς ο χρόνος t αυξάνει.

Περίπτωση II:

$$\text{Έστω } \left. \begin{array}{l} h = \frac{1}{10} \\ k = \frac{5}{1000} \end{array} \right\} \Rightarrow r = \frac{k}{h^2} = 0.5$$

άρα

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{2}(U_{i-1,j} + U_{i+1,j})$$

και η αριθμητική λύση δίνεται στον παρακάτω Πίνακα

	($i = 0$) $x = 0$	($i = 1$) 0.1	($i = 2$) 0.2	($i = 3$) 0.3	($i = 4$) 0.4	($i = 5$) 0.5	($i = 6$) 0.6
$t = 0.000$	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000	0.8000
0.005	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.8000	0.8000
0.010	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.7000	0.8000	0.7000
0.015	0	0.2000	0.4000	0.5500	0.7000	0.7000	0.7000
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
0.100	0	0.0949	0.1717	0.2484	0.2778	0.7000	0.2778

	<u>Αρ. Λύση</u> <u>Πεπερ. Διαφ.</u> $x = 0.5$	<u>Αναλυτική</u> <u>Λύση</u> $x = 0.5$	<u>Διαφορά</u>
$t = 0.005$	0.6000	0.5966	0.0034
$t = 0.01$	0.6000	0.5799	0.0201
$t = 0.02$	0.5500	0.5534	0.0166
$t = 0.10$	0.2484	0.2444	0.0040

Παρατηρούμε ότι η λύση δεν είναι τόσο καλή προσέγγιση της λύσης της Μ.Δ.Ε όσο η προηγούμενη, είναι όμως αρκετά ικανοποιητική για τα περισσότερα τεχνολογικά προβλήματα.

Περίπτωση III:

$$\text{Έστω } \left. \begin{array}{l} h = \frac{1}{10} \\ k = \frac{1}{100} \end{array} \right\} \Rightarrow r = \frac{k}{h^2} = 1$$

Άρα

$$U_{i,j+1} = U_{i-1,j} + U_{i+1,j}$$

και η αριθμητική λύση της Μ.Δ.Ε δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

t	$(i=0)$ $x=0$	$(i=1)$ 0.1	$(i=2)$ 0.2	$(i=3)$ 0.3	$(i=4)$ 0.4	$(i=5)$ 0.5	$(i=6)$ 0.6
0.00	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.8
0.01	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.6	0.8
0.02	0	0.2	0.4	0.6	0.4	1.0	0.4
0.03	0	0.2	0.4	0.2	1.2	-0.2	1.2
0.4	0	0.2	0.0	1.4	-1.2	2.6	-1.2

Αν θεωρηθεί σαν λύση η παραπάνω, τότε προφανώς δεν έχει κανένα νόημα, αν και είναι φυσικά η σωστή λύση όσον αφορά τις δεδομένες αρχικές και οριακές συνθήκες.

Οι παραπάνω περιπτώσεις I, II και III δείχνουν ότι η τιμή του λόγου $r = \frac{k}{n^2}$ παίζει σημαντικό ρόλο ακι αποδεικνύεται ότιγια την άμεση αυτή μέθοδο πρέπει

$$0 < r \leq \frac{1}{2}$$

2. Υπολογίστε με την άμεσο μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών την λύση της Μ.Δ.Ε

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

με αρχικές συνθήκες $u = \sin \pi x$, $t = 0$, $0 \leq x \leq 1$
 και συνοριακές συνθήκες $u = 0$ για $x = 0$, $x = 1$, $t > 0$
 όταν $h = 0.1$ και $r = 0.1$.

Αναλυτική λύση της είναι

$$u = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

Να βρείτε την ακρίβεια της λύσης για

$$t = 0.005, \quad 0.01, \quad 0.02, \quad 0.10 \quad \text{στο σημείο } x = 0.5$$

Επαναλάβετε την άσκηση για $r = 0.5$.

Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

Λύση

$$r = 0.1, \quad k = rh^2 = 0.1(0.1)^2 = 0.001$$

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{10}(U_{i-1,j} + 8U_{i,j} + U_{i+1,j})$$

t	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
(Λ.Π.Δ) 0.005	0	0.2942	0.5596	0.7702	0.9054	0.9520
(Α.Λ) 0.005	0	0.2941	0.5595	0.7701	0.9053	0.9519
⋮	⋮					
(Λ.Π.Δ) 0.01	0	0.2801	0.5327	0.7332	0.8620	0.9063
(Α.Λ) 0.01	0	0.2800	0.5325	0.7330	0.8617	0.9060
⋮	⋮					
(Λ.Π.Δ) 0.02	0	0.2538	0.4828	0.6645	0.7812	0.8214
(Α.Λ) 0.02	0	0.2537	0.4825	0.6641	0.7807	0.8209
⋮	⋮					
(Λ.Π.Δ) 0.10	0	0.1156	0.2198	0.3025	0.3556	0.3739
(Α.Λ) 0.10	0	0.1152	0.2191	0.3015	0.3545	0.3727

$r = 0.5$

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{2}(U_{i-1,j} + U_{i+1,j})$$

t	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.005	0	0.2939	0.5590	0.7794	0.9045	0.9511
0.01	0	0.2795	0.5317	0.7318	0.8602	0.9045
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
0.02	0	0.2628	0.4809	0.6619	0.7781	0.8181
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
0.10	0	0.1133	0.2154	0.2965	0.3486	0.3665
0.10	0	0.1152	0.2191	0.3015	0.3545	0.3727

	<u>Αρ. Λύση</u>	<u>Αναλυτική</u>
	<u>Πεπερ. Διαφ.</u>	<u>Λύση</u>
	$x = 0.5$	$x = 0.5$
$t = 0.005$	0.9511	0.9519
$t = 0.01$	0.9045	0.9060
$t = 0.02$	0.8181	0.8209
$t = 0.10$	0.3665	0.3727

Όταν η αρχική συνάρτηση και όλες οι παραγωγοί της είναι συνεχείς και οριακές τιμές στα $(0,0)$ και $(1,0)$ παραμένουν ίσες προς τις αρχικές τιμές στα σημεία αυτά, τότε η Λ.Π.Δ είναι πολύ ακριβής.

3. Υπολογίσατε με την άμεσο μέθοδο την Λ.Π.Δ της Μ.Δ.Ε

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

με αρχικές συνθήκες $u = 1$ όταν $t = 0, 0 < x < 1$
και συνοριακές συνθήκες $u = 0$, για $x = 0$ και $x = 1, t \geq 0$.

Αναλυτική λύση της είναι η

$$u = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)^2 \pi^2 t} \sin(2n+1)\pi x$$

Θέσατε

$$h = 0.1, \quad r = 0.1 \quad (\text{οπότε } k = rh^2 = 0.001)$$

και βρείτε την ακρίβεια της λύσης για $t = 0.0001(0.001)0.2$
 Συγκρίνατε τις λύσεις στο $x = 0.1$ για μικρές τιμές του t .
 Σχολιάσατε τα συμπεράσματά σας.

Λύση

$$r = 0.1$$

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{10}(U_{i-1,j} + 8U_{i,j} + U_{i+1,j})$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τη συμμετρία της λύσης σε σχέση με το $x = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$h = 0.1, \quad r = 0.1 \quad (k = rh^2 = 0.001)$$

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{10}(U_{i-1,j} + 8U_{i,j} + U_{i+1,j})$$

t	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
(Α.Π.Δ) 0.000	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
(Α.Λ) 0.000	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
⋮	⋮					
(Α.Π.Δ) 0.001	0	0.9000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
(Α.Λ) 0.001	0	0.9047	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
⋮	⋮					
(Α.Π.Δ) 0.002	0	0.8200	0.9900	1.0000	1.0000	1.0000
(Α.Λ) 0.002	0	0.8862	0.9984	1.0000	1.0000	1.0000
⋮	⋮					
(Α.Π.Δ) 0.005	0	0.6561	0.9335	0.9927	0.9996	1.0000
(Α.Λ) 0.005	0	0.6827	0.9545	0.9973	0.9999	1.0000
⋮	⋮					
(Α.Π.Δ) 0.010	0	0.5113	0.8283	0.9566	0.9919	0.9979
(Α.Λ) 0.010	0	0.5205	0.8427	0.9661	0.9953	0.9992
⋮	⋮					
(Α.Π.Δ) 0.200	0	0.0546	0.1038	0.1428	0.1679	0.1766
(Α.Λ) 0.200	0	0.0547	0.1040	0.1431	0.1682	0.1769

Υπάρχει ασυνέχεια στην περιοχή του σημείου (0,0) και γι'αυτό δεν έχουμε καλή ακρίβεια στο $x = 0$ για μικρές τιμές του t . Αυτό όμως τείνει να εξαφανισθεί καθώς το t αυξάνει, πράγμα το οποίο είναι χαρακτηριστικό στις παραβολικές εξισώσεις.

4. Εφαρμόσατε την μέθοδο των Crank-Nikolson για τον υπολογισμό της αριθμητικής λύσης της Μ.Δ.Ε

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

(α) $u = 0$ όταν $x = 0, x = 1, t \geq 0$

(β) $u = 2x$ όταν $0 \leq x \leq \frac{1}{2}, t = 0$

(γ) $u = 2(1 - x)$ όταν $\frac{1}{2} \leq x \leq 1, t = 0$

Λύση

Έστω

$$h = \frac{1}{10} \quad \text{και} \quad r = 1$$

Αφού

$$r = \frac{k}{h^2} \Rightarrow k = rh^2 = \frac{1}{100}$$

Ο τύπος (1) της μεθόδου Crank-Nikolson δίνει

$$-U_{i-1,j+1} + 4U_{i,j} + 1 - U_{i+1,j} + 1 = U_{i-1,j} + U_{i+1,j}$$

Υπολογιστικό Μόριο

Αν εφαρμόσουμε το υπολογιστικό μόριο της μεθόδου για την πρώτη χρονογραμμή έχουμε

Για $j = 0$

$$\begin{aligned} i = 1 & \quad -0 + 4u_1 - u_2 &= 0 + 0.4 \\ i = 2 & \quad -u_1 + 4u_2 - u_3 &= 0.2 + 0.6 \\ i = 3 & \quad -u_2 + 4u_3 - u_4 &= 0.4 + 0.8 \\ i = 4 & \quad -u_3 + 4u_4 - u_5 &= 0.6 + 1.0 \\ i = 5 & \quad -2u_4 + u_5 &= 0.8 + 0.8 \end{aligned}$$

ή

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & 1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

Η λύση του ανωτέρω 5×5 συστήματος είναι

$$u = \begin{bmatrix} 0.1984 \\ 0.3956 \\ 0.5834 \\ 0.7381 \\ 0.7691 \end{bmatrix}$$

5. Εφαρμόσατε την μέθοδο των Crank-Nikolson για τον υπολογισμό της αριθμητικής λύσης της Μ.Δ.Ε

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

με αρχικές συνθήκες $u = \sin \pi x, \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$
και συνοριακές συνθήκες $u = 0$ για $x = 0, \quad x = 1, \quad t > 0$

Αξιολογήστε την αναλυτική λύση και υπολογίστε το αριθμητικό σφάλμα στην αριθμητική λύση.

Λύση

Η λύση για $x = 0(0.1)0.5, \quad r = 1$ δίνεται στον παρακάτω πίνακα

t	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
(Λ.Π.Δ) 0.01	0	0.2802	0.5329	0.7335	0.8623	0.9067
(Α.Λ) 0.01	0	0.2800	0.5325	0.7330	0.8617	0.9060
(Λ.Π.Δ) 0.02	0	0.2540	0.4832	0.6651	0.7818	0.8221
(Α.Λ) 0.02	0	0.2537	0.4825	0.6641	0.7807	0.8209
(Λ.Π.Δ) 0.10	0	0.1160	0.2207	0.3037	0.3571	0.3754
(Α.Λ) 0.10	0	0.1152	0.2191	0.3015	0.3545	0.3727

	<u>Αρ. Λύση</u> <u>Πεπερ. Διαφ.</u>	<u>Αναλυτική</u> <u>Λύση</u>	<u>Ποσοστιαίο</u> <u>Λάθος</u>
	$x = 0.5$	$x = 0.5$	
$t = 0.01$	0.9067	0.9067	0.08
$t = 0.02$	0.8221	0.8209	0.015
$t = 0.10$	0.3754	0.3727	0.72

6. Η συνάρτηση u ικανοποιεί την

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq 1),$$

και οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h_1(u - v_1), \quad x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -h_2(u - v_2), \quad x = 1,$$

όπου h_1, h_2, v_1, v_2 θετικοί αριθμοί.

- Αν οι συνοριακές συνθήκες προσεγγίζονται από κεντρικές διαφορές

$$\begin{aligned} u_{0,j+1} &= \{1 - 2r(1 + h_1\delta x)\}u_{0,j} + 2ru_{1,j} + 2rh_1v_1\delta x, \\ u_{i,j+1} &= ru_{i-1,j} + (1 - 2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j}, \quad (i = 1, 2, \dots, N - 1), \\ u_{N,j+1} &= 2ru_{N-1,j} + \{1 - 2r(1 + h_2\delta x)\}u_{N,j} + 2rh_2v_2\delta x, \end{aligned}$$

όπου

$$N\delta x = 1$$

$$r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}.$$

- Αν οι συνοριακές συνθήκες προσεγγίζονται από προς τα εμπρός διαφορές στο $x = 0$ και από προς τα πίσω διαφορές (βασκωαρδ-διφφερειςες) στο $x = 1$, αποδειξτε

ότι μια άλλη αναλυτική λύση είναι

$$\begin{aligned}
 u_{i,j} &= \{1 - 2r + r/(1 + h_1\delta x)\}u_{1,j} + ru_{2,j} + rh_1v_1\delta x/(1 + h_1\delta x), \\
 u_{0,j} &= (u_{i,j+1} + h_1v_1\delta x)/(1 + h_1\delta x), \\
 u_{i,j+1} &= ru_{i-1,j} + (1 - 2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j}, \quad (i = 2, 3, \dots, N - 2) \\
 u_{N-1,j+1} &= \{1 - 2r + r/(1 + h_2\delta x)\}u_{N-1,j} + ru_{N-2,j} + \\
 &\quad + rh_2v_2\delta x/(1 + h_2\delta x), \\
 u_{N,j+1} &= (u_{n-1,j+1} + h_2v_2\delta x)/(1 + h_2\delta x).
 \end{aligned}$$

7. Ομοιογενής ράβδος θερμικά απομονωμένη έχει αρχική θερμοκρασία τη στιγμή $t = 0$ 0° C. Το ένα της άκρο είναι θερμικά απομονωμένο, ενώ το άλλο θερμαίνεται με σταθερό ρυθμό. Δείξτε ότι οι θερμοκρασία στα διάφορα σημεία της ράβδου, δίνεται από την λύση της εξίσωσης

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < \frac{1}{2}),$$

που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$$u = 0 \text{ όταν } t = 0 \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2})$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ στο } x = 0, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f \text{ στο } x = \frac{1}{2}, \quad t > 0$$

όπου f σταθερά. Λύστε αριθμητικά το πρόβλημα με $f = 1$ χρησιμοποιώντας

(α) μια άμεση μέθοδο με $\delta x = 0.1$ και $r = \frac{1}{4}$,

(β) μια έμμεση μέθοδο με $\delta x = 0.1$ και $r = 1$.

Λύση

Η λύση που προκύπτει από την άμεση μέθοδο, της οποίας οι εξισώσεις είναι

$$u_{0,j+1} = \frac{1}{2}(u_{0,j} + u_{1,j}),$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$u_{5,j+1} = \frac{1}{2}(u_{4,j} + u_{5,j} + 0.1)$$

φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

t	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0125	0.0750
0.0075	0.0000	0.0000	0.0000	0.0031	0.0250	0.0938
0.01	0.0000	0.0000	0.0008	0.0078	0.0367	0.1094
0.02	0.0009	0.0027	0.0103	0.0313	0.0767	0.1571
0.03	0.0062	0.0104	0.0248	0.0554	0.1095	0.1934
0.05	0.0291	0.0364	0.0594	0.1007	0.1636	0.2509
0.10	0.1169	0.1265	0.1556	0.2044	0.2735	0.3631
0.20	0.3150	0.3250	0.3550	0.4050	0.4750	0.5650
0.50	0.9150	0.9250	0.9550	1.0050	1.0750	1.1650
1.00	1.9167	1.9250	1.9550	2.0050	2.0750	2.1650

Η λύση με τη μέθοδο Crank-Nicolson είναι

t	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.01	0.0003	0.0006	0.0022	0.0083	0.0309	0.1155
0.02	0.0023	0.0039	0.0108	0.0302	0.0770	0.1540
0.03	0.0077	0.0115	0.0252	0.0552	0.1080	0.1925
0.05	0.0301	0.0373	0.0597	0.1004	0.1627	0.2499
0.10	0.1172	0.1268	0.1557	0.2043	0.2732	0.3628
0.20	0.3150	0.3250	0.3550	0.4050	0.4750	0.5650
0.50	0.9150	0.9250	0.9550	1.0050	1.0750	1.1650
1.00	1.9150	1.9250	1.9550	2.0050	2.0750	2.1650

Η αναλυτική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$u = 2t + \frac{1}{2} \left\{ \frac{12x^2 - 1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} \cos 2n\pi x \right\}$$

$$= 2\sqrt{t} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ ierfc \frac{(2n+1-2x)}{4\sqrt{t}} + ierfc \frac{(2n+1+2x)}{4\sqrt{t}} \right\},$$

και παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα

t	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.0025	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0050	0.0564
0.0050	0.0000	0.0000	0.0001	0.0017	0.0167	0.0798
0.0075	0.0000	0.0000	0.0006	0.0053	0.0286	0.0977
0.01	0.0000	0.0002	0.0017	0.0101	0.0399	0.1128
0.02	0.0016	0.0035	0.0117	0.0333	0.0791	0.1596
0.03	0.0074	0.0117	0.0264	0.0573	0.1115	0.1954
0.05	0.0307	0.0381	0.0610	0.1023	0.1653	0.2526
0.10	0.1186	0.1282	0.1573	0.2061	0.2751	0.3647
0.20	0.3167	0.3267	0.3567	0.4067	0.4766	0.5666
0.50	0.9167	0.9267	0.9567	1.0067	1.0767	1.1667
1.00	1.9167	1.9267	1.9567	2.0067	2.0767	2.1667

t	<u>Αναλυτική</u> <u>Λύση</u> $x = 0.3$	<u>Άμεση</u> <u>Λύση</u> $x = 0.3$	<u>Ποσοστιαίο</u> <u>Λάθος</u>	<u>Crank-Nicolson</u> <u>Λύση</u> $x = 0.3$	<u>Ποσοστιαίο</u> <u>Λάθος</u>
0.0075	0.0053	0.0031	-41.5		
0.01	0.0101	0.0078	-22.8	0.0083	-17.8
0.05	0.1023	0.1007	-1.56	0.1004	-1.85
0.10	0.2061	0.2044	-0.82	0.2043	-0.87
0.50	1.0067	1.0050	-0.17	1.0050	-0.17
1.00	2.0067	2.0050	-0.08	2.0050	-0.08

Οι λύσεις των πεπερασμένων διαφορών είναι αρκετά ακριβείς για μεγάλες τιμές του t .

Το αποτέλεσμα του εκθετικού μέρους της αναλυτικής λύσης είναι αμελητέο για $t > 0.1$.

Η διαφορά μεταξύ της αναλυτικής λύσης και της λύσης των πεπερασμένων διαφορών για $t > 0.1$ είναι

$$0.0017 = \frac{0.01}{6} = \frac{(\delta x)^2}{6}.$$

Αποδεικνύεται ότι το (τρανσιεντ) κομμάτι της λύσης οποιασδήποτε άμεσης ή έμμεσης μεθόδου πεπερασμένων διαφορών για μια παραβολική εξίσωση που ικανοποιεί τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες, δεν τείνει στο 0 καθώς το t αυξάνει, όπως συμβαίνει με το (τρανσιεντ) μέρος της διαφορικής εξίσωσης, αλλά τείνει στην τιμή

$$k(\delta x)^2, \quad k \text{ σταθερά}$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα $k = \frac{1}{6}$.

8. Η θερμοκρασία ψύξης u ενός νάυλον νήματος που είναι τυλιγμένο σε ένα περιστρεφόμενο μασούρι δίνεται από τη λύση της εξίσωσης

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (0 \leq r \leq 1),$$

που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$$u = 1, \quad t = 0 \forall r,$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad r = 0$$

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial r} = -F(t), \quad r = 1,$$

όπου α μια σταθερά και $F(t)$ μια εμπειρική συνάρτηση του t .

Για $r_i = i\delta r$, $n\delta r = 1$, $t_j = j\delta t$, και δεδομένου ότι οι συνοριακές συνθήκες αναπαρίστανται από προσεγγίσεις κεντρικών διαφορών (ρεπρεσεντεδ βψ ζεντραλ-διφφερενσε αππροξιματιονς), δείξτε ότι η αριθμητική λύση του προβλήματος με τη

μέθοδο Crank-Nicolson είναι

$$\alpha \frac{(u_{0,j+1} - u_{0,j})}{\delta t} = \frac{2}{(\delta r)^2} (u_{1,j+1} - u_{0,j+1} + u_{1,j} - u_{0,j})$$

$$\alpha \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j})}{\delta t} = \frac{1}{2(\delta r)^2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2i}\right) u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{1}{2i}\right) u_{i-1,j+1} \left(1 + \frac{1}{2i}\right) u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + \left(1 - \frac{1}{2i}\right) u_{i-1,j} \right\}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$\alpha \frac{(u_{n,j+1} - u_{n,j})}{\delta t} = \frac{1}{(\delta r)^2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2i}\right) u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{1}{2i}\right) u_{i-1,j+1} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + \left(1 - \frac{1}{2i}\right) u_{i-1,j} \right\}$$

9. Λύστε την εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$u = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t = 0,$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u, \quad x = 0 \quad \forall t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -u, \quad x = 1 \quad \forall t.$$

Λύση

Για $r = \frac{1}{4}$

$$u_{0,j+1} = \frac{1}{2} (0.9u_{0,j} + u_{1,j}),$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j} + 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

και χρησιμοποιώντας την συμμετρία στο $x = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$u_{5,j=1} = \frac{1}{4}(2u_{4,j} + 2u_{5,j}).$$

Για $t = r(\delta x)^2 = 1/400$ (στο τέλος της πρώτης χρονοσφραγίδας) οι τιμές του u είναι

$$u_{0,1} = \frac{1}{2}(0.9 + 1) = 0.95,$$

$$u_{1,1} = \frac{1}{4}(1 + 2 + 1) = 1 = u_{2,1} = u_{3,1} = u_{4,1} = u_{5,1}$$

Στο τέλος της δεύτερης χρονοσφραγίδας είναι

$$u_{0,2} = \frac{1}{2}(0.9 \times 0.95 + 1) = 0.9275,$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{4}(0.95 + 2 + 1) = 0.9875,$$

$$u_{2,2} = \frac{1}{4}(1 + 2 + 1) = 1 = u_{3,2} = u_{4,2} = u_{5,2}$$

Όμοια υπολογίζονται και για τις υπόλοιπες χρονοσφραγίδες και αναπαρίστανται στον παρακάτω πίνακα.

t	$i = 0$ $x = 0$	1 0.1	2 0.2	3 0.3	4 0.4	5 0.5
0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.0025	0.9500	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.0050	0.9275	0.9875	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.0075	0.9111	0.9756	0.9969	1.0000	1.0000	1.0000
0.0100	0.8978	0.9648	0.9923	0.9992	1.0000	1.0000
0.0125	0.8864	0.9549	0.9872	0.9977	0.9998	1.0000
0.0150	0.8764	0.9459	0.9818	0.9956	0.9993	0.9999
0.0175	0.8673	0.9375	0.9762	0.9931	0.9985	0.9996
0.0200	0.8590	0.9296	0.9708	0.9902	0.9974	0.9991
...						
...						
0.1000	0.7175	0.7829	0.8345	0.8718	0.8942	0.9017
0.2500	0.5542	0.6048	0.6452	0.6745	0.6923	0.6983
0.5000	0.3612	0.3942	0.4205	0.4396	0.4512	0.4551
1.0000	0.1534	0.1674	0.1786	0.1867	0.1917	0.1933

Η αναλυτική λύση της εξίσωσης των μερικών διαφορών που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες είναι

$$u = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sec \alpha_n}{(3 + 4\alpha_n^2)} e^{-4\alpha_n^2 t} \cos 2\alpha_n \left(x - \frac{1}{2}\right) \right\} \quad (0 < x < 1),$$

όπου α_n είναι οι θετικές ρίζες της

$$\alpha \tan \alpha = \frac{1}{2}.$$

Η αναλυτική λύση φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

t	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.0025	0.9460	0.9951	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000
0.0050	0.9250	0.9841	0.9984	0.9999	1.0000	1.0000
0.0075	0.9093	0.9730	0.9950	0.9994	1.0000	1.0000
0.0100	0.8965	0.9627	0.9905	0.9984	0.9998	1.0000
0.0125	0.8854	0.9532	0.9855	0.9967	0.9994	0.9999
0.0150	0.8755	0.9444	0.9802	0.9945	0.9988	0.9996
0.0175	0.8668	0.9362	0.9748	0.9919	0.9979	0.9992
0.0200	0.8585	0.9286	0.9695	0.9891	0.9967	0.9985
...						
...						
0.1000	0.7176	0.7828	0.8342	0.8713	0.8936	0.9010
0.2500	0.5546	0.6052	0.6454	0.6747	0.6924	0.6984
0.5000	0.3619	0.3949	0.4212	0.4403	0.4519	0.4558
1.0000	0.1542	0.1682	0.1794	0.1875	0.1925	0.1941

	<u>Αρ. Λύση</u> <u>Πεπερ. Διαφ.</u> $x = 0.2$	<u>Αναλυτική</u> <u>Λύση</u> $x = 0.2$	<u>Ποσοστιαίο</u> <u>Λάθος</u>
$t = 0.005$	1.0000	0.9984	0.16
$t = 0.050$	0.9126	0.9120	0.07
$t = 0.010$	0.8345	0.8342	0.04
$t = 0.250$	0.6452	0.6454	-0.03
$t = 0.500$	0.4205	0.4212	-0.16
$t = 1.000$	0.1786	0.1794	-0.45

Η λύση των πεπερασμένων διαφορών είναι αρκετά ακριβής για τις μικρές τιμές του r .

10. Λύστε το προηγούμενο παράδειγμα χρησιμοποιώντας μια άμεση μέθοδο και εφαρμόζοντας μια προς τα εμπρός διαφορά για την συνοριακή συνθήκη στο $x = 0$.

Για $i = 1$

$$u_{1,j+1} = u_{i,j} + r(u_{0,j} - 2u_{1,j} + u_{2,j}).$$

Η συνοριακή συνθήκη στο $x = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, σε μορφή προς τα εμπρός διαφοράς είναι

$$\frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{\delta x} = 0,$$

συνεπώς

$$u_{0,j} = u_{1,j}/(1 + \delta x).$$

και

$$u_{1,j+1} = \left(1 - 2r + \frac{r}{1 + \delta x}\right) u_{1,j} + r u_{2,j}.$$

Για $r = \frac{1}{4}$ και $\delta x = 0.1$

$$\begin{aligned} u_{1,j+1} &= \frac{8}{11}u_{1,j} + \frac{1}{4}u_{2,j}, \\ u_{0,j+1} &= \frac{10}{11}u_{1,j+1} \\ u_{i,j+1} &= \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \quad (i = 2, 3, 4), \\ u_{5,j+1} &= \frac{1}{4}(2u_{4,j} + 2u_{5,j}) \text{ λόγω συμμετρίας} \end{aligned}$$

Η λύση των παραπάνω εξισώσεων με αρχική τιμή του $u = 1$

φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

t	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.0025	0.8884	0.9773	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.0050	0.8734	0.9607	0.9943	1.0000	1.0000	1.0000
0.0075	0.8612	0.9473	0.9873	0.9986	1.0000	1.0000
0.0100	0.8507	0.9358	0.9801	0.9961	0.9996	1.0000
0.0125	0.8415	0.9256	0.9730	0.9930	0.9989	0.9998
0.0150	0.8331	0.9164	0.9662	0.9895	0.9976	0.9993
0.0175	0.8255	0.9080	0.9596	0.9857	0.9960	0.9985
0.0200	0.8184	0.9003	0.9532	0.9817	0.9941	0.9973
...						
...						
0.1000	0.6869	0.7556	0.8102	0.8498	0.8738	0.8818
0.2500	0.5206	0.5727	0.6444	0.6444	0.6628	0.6689
0.5000	0.3283	0.3611	0.4063	0.4063	0.4063	0.4218
1.0000	0.1305	0.1435	0.1540	0.1615	0.1661	0.1677

	<u>Αρ. Λύση</u> <u>Πεπερ. Διαφ.</u> $x = 0.2$	<u>Αναλυτική</u> <u>Λύση</u> $x = 0.2$	<u>Ποσοστιαίο</u> <u>Λάθος</u>
$t = 0.005$	0.9943	0.9984	-0.4
$t = 0.050$	0.8912	0.9120	-2.3
$t = 0.010$	0.8102	0.8342	-2.9
$t = 0.250$	0.6142	0.6454	-4.8
$t = 0.500$	0.3873	0.4212	-8.0
$t = 1.000$	0.1540	0.1794	-14.2

Παρ'όλο που αυτή η λύση δεν είναι τόσο ακριβής όσο η προηγούμενη, είναι ικανοποιητικά καλή για πολλές πρακτικές εφαρμογές.

11. Λύστε το παράδειγμα 9 με τη μέθοδο Crank-Nicolson

Λύση

Αυτή η μέθοδος αναπαριστά την

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ως

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta t} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{(\delta x)^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\delta x)^2} \right\},$$

η οποία γράφεται

$$-ru_{i-1,j+1} + (2+2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j+1} = ru_{i-1,j} + (2-2r)u_{i,j} + u_{i+1,j}. \quad (\text{I})$$

Η συνοριακή συνθήκη στο $x = 0$ ως κεντρική διαφορά γράφεται

$$\frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2\delta x} = u_{0,j},$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} u_{-1,j} &= u_{1,j} - 2\delta x u_{0,j} \\ u_{-1,j+1} &= u_{1,j+1} - 2\delta x u_{0,j+1} \end{aligned}$$

Οι δυο τελευταίες εξισώσεις μας επιτρέπουν να απαλείψουμε τους όρους $u_{-1,j}$ και $u_{-1,j+1}$ από την εξίσωση που προκύπτει θέτοντας $i = 0$ στην ;;.

Η συνοριακή συνθήκη στο $x = 1$ υπολογίζεται με όμοιο τρόπο, αν και σε αυτό το πρόβλημα είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιηθεί η συμμετρία στο $x = \frac{1}{2}$, π.χ. $u_{6,j} = u_{4,j}$.

Για $r = 1$ και $\delta x = 0.1$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1u_{0,j+1} - u_{1,j+1} &= -0 \cdot 1u_{0,j} + u_{1,j}, \\ -u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} &= u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \\ -u_{4,j+1} + 2u_{5,j+1} &= u_{4,j}. \end{aligned}$$

Για την πρώτη χρονοσφραγίδα γίνονται

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1u_0 - u_1 &= 0.9, \\ -u_0 + 4u_1 - u_2 &= 2.0, \\ -u_1 + 4u_2 - u_3 &= 2.0, \\ -u_2 + 4u_3 - u_4 &= 2.0, \\ -u_3 + 4u_4 - u_5 &= 2.0, \\ -u_4 + 2u_5 &= 1.0. \end{aligned}$$

Η λύση φαίνεται στον παρακάτω Πίνακα

t	$i = 0$	1	2	3	4	5
0.00	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.01	0.8908	0.9707	0.9922	0.9979	0.9994	0.9997
0.02	0.8624	0.9293	0.9720	0.9900	0.9964	0.9979
...						
...						
0.10	0.7179	0.7834	0.8349	0.8720	0.8944	0.9018
0.25	0.5547	0.6054	0.6458	0.6751	0.6929	0.6989
0.50	0.3618	0.3949	0.4212	0.4404	0.4520	0.4559
1.00	0.1540	0.1680	0.1793	0.1874	0.1923	0.1940

	<u>Αρ. Λύση</u> <u>Πεπερ. Διαφ.</u>	<u>Αναλυτική</u> <u>Λύση</u>	<u>Ποσοστιαίο</u> <u>Λάθος</u>
	$x = 0.2$	$x = 0.2$	
$t = 0.01$	0.9922	0.9905	0.17
$t = 0.05$	0.9131	0.9120	0.12
$t = 0.10$	0.8349	0.8342	0.08
$t = 0.25$	0.6458	0.6454	0.06
$t = 0.50$	0.4212	0.4212	0.00
$t = 1.00$	0.1793	0.1794	-0.06

1.3.4 Δισδιάστατες Παραβολικές Εξισώσεις

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \quad (1.53)$$

$$L \equiv \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_i(x_1, x_2, t) \frac{\partial}{\partial x_i}) - c(x_1, x_2, t) \quad (1.54)$$

$$i) \alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad ii) c \geq 0$$

$$X = ih, \quad Y = jh, \quad T = nk$$

$$U_{ij}^{(n+1)} = \exp(kL) U_{ij}^{(n)} \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{2}{h} \sin h^{-1} \frac{\delta x_1}{2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{2}{h} \sin h^{-1} \frac{\delta x_2}{2}$$

όπου

$$\begin{aligned}\delta_{x_1} U_{ij}^{(n)} &= U_{i+1/2,j}^{(n)} - U_{i-1/2,j}^{(n)} \\ \delta_{x_2} U_{ij}^{(n)} &= U_{i,j+1/2}^{(n)} - U_{i,j-1/2}^{(n)}\end{aligned}$$

Άμεσοι Μέθοδοι

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \equiv D_1^2 + D_2^2 \quad (1.56)$$

όπου

$$D_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \quad \text{και} \quad D_2^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Η (1.55) γράφεται

$$U_{ij}^{(n+1)} = \exp(kD_1^2) \exp(kD_2^2) U_{ij}^{(n)} \quad (1.57)$$

$$D_1^2 = \frac{1}{h^2} (\delta_{x_1}^2 - \frac{1}{12} \delta_{x_1}^4 + \frac{1}{90} \delta_{x_1}^6 - \dots) \quad (1.57')$$

$$D_2^2 = \frac{1}{h^2} (\delta_{x_2}^2 - \frac{1}{12} \delta_{x_2}^4 + \frac{1}{90} \delta_{x_2}^6 - \dots) \quad (1.57'')$$

Από την (1.57), λόγω των (1.57') και (1.57'') έχουμε

$$U_{ij}^{(n+1)} = [1 + r\delta_{x_1}^2 + \frac{1}{2}r(r - \frac{1}{6})\delta_{x_1}^4 + \dots][1 + r\delta_{x_2}^2 + \frac{1}{2}r(r - \frac{1}{6})\delta_{x_2}^4 + \dots] U_{ij}^{(n)} \quad (1.58)$$

$$r = k/h^2.$$

Από την (1.58) έχουμε

$$U_{ij}^{(n+1)} = [1 + r(\delta_{x_1}^2 + \delta_{x_2}^2)] U_{ij}^{(n)} + O(k^2 + kh^2) \quad (1.59)$$

ή

$$U_{ij}^{(n+1)} = (1 + r\delta_{x_1}^2)(1 + r\delta_{x_2}^2) U_{ij}^{(n)} + O(k^2 + kh^2) \quad (1.60)$$

$$\text{Self-Adjoint} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_1(x_1, x_2, t) \frac{\partial u}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\alpha_2(x_1, x_2, t) \frac{\partial u}{\partial x_2})$$

$$L \equiv D_1(\alpha_1 D_1) + D_2(\alpha_2 D_2)$$

$$U_{ij}^{(n+1)} = \exp(kD_1(\alpha_1 D_1)) \exp(kD_2(\alpha_2 D_2)) U_{ij}^{(n)} \quad (1.61)$$

Αν

$$D_1(\alpha_1 D_1) \simeq \frac{1}{h^2} \delta_{x_1}(\alpha_1 \delta_{x_1})$$

και

$$D_2(\alpha_2 D_2) \simeq \frac{1}{h^2} \delta_{x_2}(\alpha_2 \delta_{x_2})$$

όπου

$$\delta_{x_1}(\alpha_1 \delta_{x_1}) U_{ij}^{(n)} = \alpha_{1,i+1/2,j}^{(n)} (U_{i+1,j}^{(n)} - U_{i-1,j}^{(n)}) - \alpha_{1,i-1/2,j}^{(n)} (U_{ij}^{(n)} - U_{i-1,j}^{(n)})$$

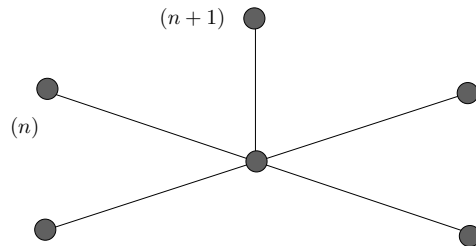
και

$$\delta_{x_2}(\alpha_2 \delta_{x_2}) U_{ij}^{(n)} = \alpha_{2,i,j+1/2}^{(n)} (U_{i,j+1}^{(n)} - U_{i,j-1}^{(n)}) - \alpha_{2,i,j-1/2}^{(n)} (U_{ij}^{(n)} - U_{i,j-1}^{(n)})$$

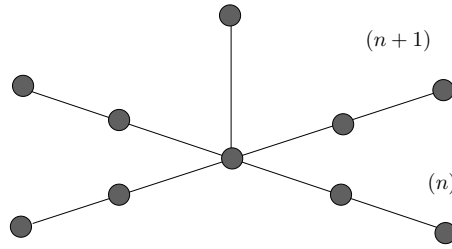
τότε η (1.61) δίνει

$$\begin{aligned} U_{ij}^{(n+1)} = & [1 - r\{\alpha_{1,i+1/2,j}^{(n)} + \alpha_{1,i-1/2,j}^{(n)} + \alpha_{1,i,j-1/2}^{(n)} + \alpha_{1,i,j+1/2}^{(n)}\}] \\ & U_{ij}^{(n)} + r\alpha_{1,i+1/2,j}^{(n)} U_{i+1,j}^{(n)} + r\alpha_{1,i-1/2,j}^{(n)} U_{i-1,j}^{(n)} + r\alpha_{2,i,j-1/2}^{(n)} U_{i,j-1}^{(n)} \\ & + r\alpha_{2,i,j+1/2}^{(n)} U_{i,j+1}^{(n)} + O(k^2 + kh^2) \end{aligned} \quad (1.62)$$

Για $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ η (1.63) δίνει την (1.60)



Ανάλογα



$$U_{ij}^{(n+1)} = [1 + r\delta_{x_1}(\alpha_1\delta_{x_1})][1 + r\delta_{x_2}(\alpha_2\delta_{x_2})]U_{ij}^{(n)} \quad (1.63)$$

Ευστάθεια

$$e^{\alpha t} e^{i\beta x_1} e^{i\gamma x_2} \quad (1.64)$$

όπου β, γ αυθαίρετοι πραγματικοί και α μιγαδικός.
 Το αρχικό σφάλμα ($t = 0$) $e^{i\beta x_1} e^{i\gamma x_2}$ δεν αυξάνεται με το χρόνο αν

$$|e^{\alpha k}| \leq 1 \quad \text{για όλα τα } \alpha \quad (1.65)$$

Από (1.59) και λόγω της (1.64)

$$\xi = e^{\alpha k} = 1 - 4r(\sin^2 \frac{\beta h}{2} + \sin^2 \frac{\gamma h}{2}).$$

Για ευστάθεια $|\xi| \leq 1$ ή

$$r \leq \frac{1}{2(\sin^2 \frac{\beta h}{2} + \sin^2 \frac{\gamma h}{2})} \quad (1.66)$$

ή

$$r \leq 1/4.$$

1.3.5 Έμμεσοι Μέθοδοι Εναλλασόμενων Διευθύνσεων (ADI)

$$U_{ij}^{(n+1)} = \exp(kL)U_{ij}^{(n)} \quad (1.67)$$

$$L \equiv D_1^2 + D_2^2 \quad (1.68)$$

$$\exp[-\frac{1}{2}k(D_1^2 + D_2^2)]U_{ij}^{(n+1)} = \exp[\frac{1}{2}k(D_1^2 + D_2^2)]U_{ij}^{(n)} \quad (1.69)$$

όπου

$$D_1^2 = \frac{1}{h^2}(\delta_{x_1}^2 - \frac{1}{12}\delta_{x_1}^4 + \frac{1}{90}\delta_{x_1}^6 - \dots)$$

και

$$D_2^2 = \frac{1}{h^2}(\delta_{x_2}^2 - \frac{1}{12}\delta_{x_2}^4 + \frac{1}{90}\delta_{x_2}^6 - \dots)$$

Από την (1.69) έχουμε

$$\exp(-\frac{1}{2}r\delta_{x_1}^2)\exp(-\frac{1}{2}r\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} = \exp(\frac{1}{2}r\delta_{x_1}^2)\exp(\frac{1}{2}r\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n)}$$

$$(1 - \frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)(1 - \frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} = (1 + \frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)(1 + \frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n)} + O(k^3 + kh^3). \quad (1.70)$$

Η (1.70) είναι ανάλογη της Crank-Nicolson

$$(1 - \frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} = (1 + \frac{r}{2}\delta_{x_1}^2) \underbrace{(1 - \frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)^{-1}(1 + \frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n)}}_{U_{ij}^{(n+1/2)}}$$

$$(1 - \frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)U_{ij}^{(n+1/2)} = (1 + \frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n)}$$

και

$$(1 - \frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} = (1 + \frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)U_{ij}^{(n+1/2)} \quad (1.71)$$

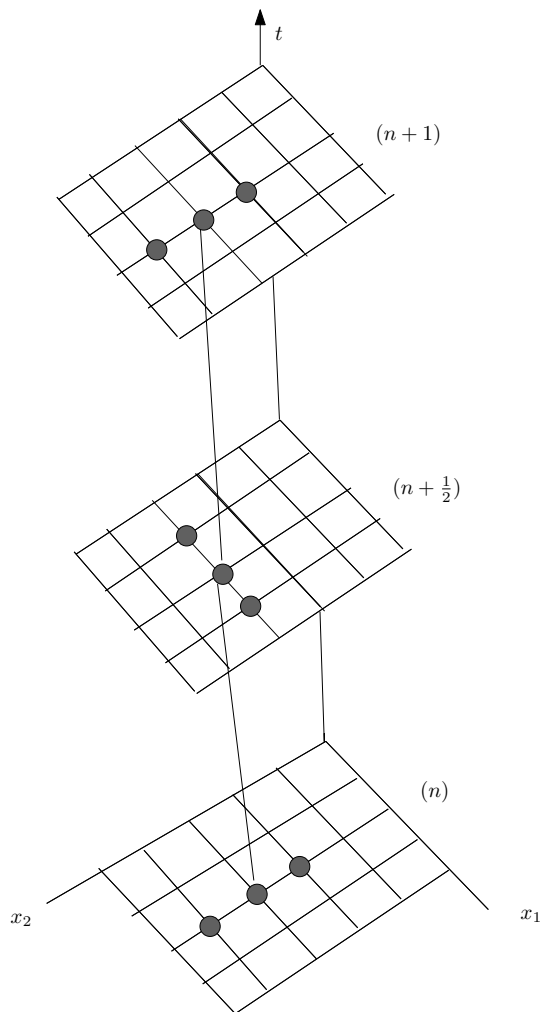
Η (1.71) είναι γνωστή σαν η μέθοδος των Peaceman-Rachford (PR).

Εφαρμόζοντας τους τελεστές των κεντρικών διαφορών λαμβάνουμε

$$-\frac{r}{2}U_{i-1,j}^{(n+1/2)} + (1+r)U_{ij}^{(n+1/2)} - \frac{r}{2}U_{i+1,j}^{(n+1/2)} = \frac{r}{2}U_{i,j-1}^{(n)} + (1-r)U_{ij}^{(n)} + \frac{r}{2}U_{i,j+1}^{(n)}$$

και

$$-\frac{r}{2}U_{i,j-1}^{(n+1)} + (1+r)U_{ij}^{(n+1)} - \frac{r}{2}U_{i,j+1}^{(n+1)} = \frac{r}{2}U_{i-1,j}^{(n+1/2)} + (1-r)U_{ij}^{(n+1/2)} + \frac{r}{2}U_{i+1,j}^{(n+1/2)}. \quad (1.72)$$



Θέτοντας

$$D_1^2 = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\delta_{x_1}^2}{1 + \frac{1}{12}\delta_{x_1}^2}$$

$$D_2^2 = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\delta_{x_1}^2}{1 + \frac{1}{12}\delta_{x_2}^2}$$

και αναπτύσσοντας η (1.69) δίνει

$$\begin{aligned} & [1 - \frac{1}{2}(r - \frac{1}{6})\delta_{x_1}^2][1 - \frac{1}{2}(r - \frac{1}{6})\delta_{x_2}^2]U_{ij}^{(n+1)} \\ = & [1 + \frac{1}{2}(r + \frac{1}{6})\delta_{x_1}^2][1 + \frac{1}{2}(r + \frac{1}{6})\delta_{x_2}^2]U_{ij}^{(n)} + O(k^3 + kh^4) \end{aligned} \quad (1.73)$$

ή

$$[1 - \frac{1}{2}(r - \frac{1}{6})\delta_{x_1}^2]U_{ij}^{(n+1/2)} = [1 + \frac{1}{2}(r + \frac{1}{6})\delta_{x_2}^2]U_{ij}^{(n)} \quad (1.74)$$

και

$$[1 - \frac{1}{2}(r - \frac{1}{6})\delta_{x_2}^2]U_{ij}^{(n+1)} = [1 + \frac{1}{2}(r + \frac{1}{6})\delta_{x_1}^2]U_{ij}^{(n+1/2)}$$

Η (1.74) είναι γνωστή σαν η μέθοδος των Mitchell και Fairweather (MF).

Άλλες μέθοδοι

$$(1 - \frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} = \underbrace{(1 + \frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)(1 - \frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)^{-1}(1 + \frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)U_{ij}^{(n)}}_{U_{ij}^{(n+1/2)}}$$

οπότε

$$\begin{aligned} (1 - \frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)U_{ij}^{(n+1/2)} &= (1 + \frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)(1 + \frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n)} \\ (1 - \frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} &= U_{ij}^{(n+1/2)} \quad \text{D'Yakonov} \end{aligned} \quad (1.75)$$

Επίσης από την (1.70) έχουμε

$$(1 - \frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)(1 - \frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} = (1 + \frac{r^2}{4}\delta_{x_1}^2\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n)}$$

οπότε

$$\begin{aligned} (1 - r\delta_{x_1}^2)U_{ij}^{(n+1/2)} &= (1 + r\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n)} \quad \text{Douglas} \\ &+ \\ (1 - r\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} &= U_{ij}^{(n+1/2)} - r\delta_{x_2}^2U_{ij}^{(n)} \quad \text{Rachford} \end{aligned} \quad (1.76)$$

Η (1.76) είναι γνωστή σαν η μέθοδος των Douglas και Rachford.

Ευστάθεια των ADI Μεθόδων

Απαλείφοντας την $U_{ij}^{(n+1/2)}$, παρατηρούμε ότι όλες οι ανωτέρω ADI μέθοδοι είναι ειδικές περιπτώσεις της

$$(1 - \alpha\delta_{x_1}^2)(1 - \alpha\delta_{x_2}^2)U^{(n+1)} = [1 + b(\delta_{x_1}^2 + \delta_{x_2}^2) + c\delta_{x_1}^2\delta_{x_2}^2]U^{(n)} \quad (1.77)$$

για συγκεκριμένες τιμές των α, b και c . Η εξίσωση σφάλματος της (1.77) είναι η

$$(1 - \alpha\delta_{x_1}^2)(1 - \alpha\delta_{x_2}^2)E_{qp}^{(n+1)} = [1 + b(\delta_{x_1}^2 + \delta_{x_2}^2) + c\delta_{x_1}^2\delta_{x_2}^2]E_{pq}^{(n)}. \quad (1.78)$$

Θέτοντας

$$E_{ij}^{(n)} = e^{\alpha nk} \cdot e^{i\beta ph} \cdot e^{i\gamma qh}$$

η (1.78) παράγει την

$$\xi = e^{\alpha k} = \frac{1 - b(S_\beta^2 + S_\gamma^2) + cS_\beta^2 S_\gamma^2}{(1 - \alpha S_\beta^2)(1 + \alpha S_\gamma^2)}, \quad (1.79)$$

όπου

$$S_\beta^2 = 4 \sin^2 \frac{\beta x_1}{2}, \quad S_\gamma^2 = 4 \sin^2 \frac{\gamma x_2}{2}. \quad (1.80)$$

Για ευστάθεια απαιτείται

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

οπότε η (1.79) δίνει

$$-(\alpha - b)(S_\beta^2 + S_\gamma^2) - (\alpha^2 + c)S_\beta^2 S_\gamma^2 \leq 2$$

και

$$-(\alpha + b)(S_\beta^2 + S_\gamma^2) - (\alpha^2 - c)S_\beta^2 S_\gamma^2 \leq 0$$

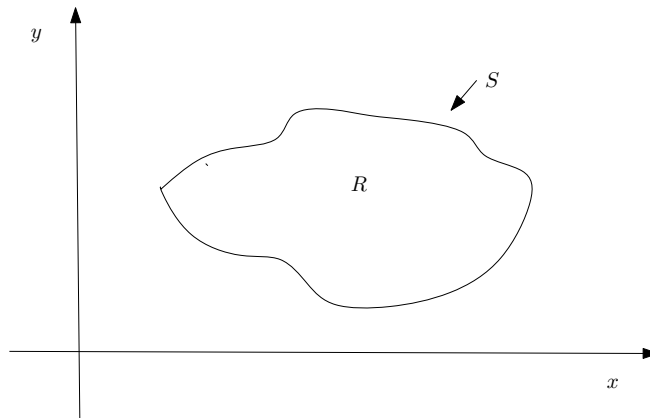
οι οποίες εύκολα αποδεικνύεται ότι ικανοποιούνται για τις ADI μεθόδους για $0 \leq S_\beta^2, S_\gamma^2 \leq 4$. Συνεπώς όλες οι ADI μέθοδοι είναι ευσταθείς για $r > 0$.

Κεφάλαιο 2

Αριθμητική Επίλυση Ελλειπτικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

2.1 Εισαγωγή

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + C_{yy} = S(x, y, u, u_x, u_y)$$



$B^2 - AC < 0$ ελλειπτική,

όπου

$$A = A(x, y, u), \quad B = B(x, y, u), \quad C = C(x, y, u)$$

Παραδείγματα

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{Laplace}$$

ή

$$\Delta u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Delta u = f(x, y) \quad \text{Poisson}$$

$$\Delta \Delta u = \Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \quad \text{Biharmonic.}$$

2.2 Συνοριακές Συνθήκες

1.

$$u = f(x, y) \text{ στο } S$$

πρώτο πρόβλημα συνοριακών τιμών

ή

πρόβλημα του Dirichlet

2.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y), (x, y) \in S$$

δεύτερο πρόβλημα συνοριακών τιμών

ή

πρόβλημα του Neumann

3.

$$\alpha(x, y)u + \beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial n} = \gamma(x, y), (x, y) \in S$$

όπου

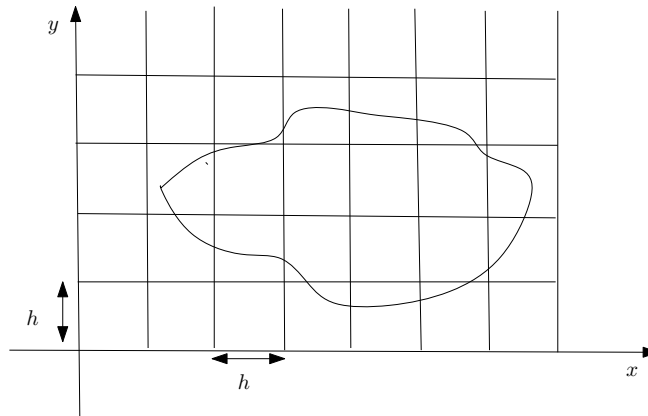
$$\alpha(x, y) > 0, \beta(x, y) > 0, (x, y) \in S$$

τρίτο πρόβλημα συνοριακών τιμών

ή

πρόβλημα του Robbin

$$Au_{xx} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad A, C > 0, F \leq 0$$



2.3 Πεπερασμένες Διαφορές

$$u(x \pm h, y) = u(x, y) \pm hu_x + \frac{h^2}{2!}u_{xx} \pm \frac{h^3}{3!}u_{xxx} + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx} \pm \dots \quad (2.1)$$

$$u(x, y \pm h) = u(x, y) \pm hu_y + \frac{h^2}{2!}u_{yy} \pm \frac{h^3}{3!}u_{yyy} + \frac{h^4}{4!}u_{yyyy} \pm \dots \quad (2.2)$$

Από την (2.1) έχουμε

$$u_x = \frac{u(x+h, y) - u(x-h, y)}{2h} + O(h^2) \quad (2.3)$$

και

$$u_{xx} = \frac{u(x+h, y) - u(x-h, y) - 2u(x, y)}{h^2} + O(h^2). \quad (2.4)$$

Όμοια οι (2.2) δίνουν

$$u_y = \frac{u(x, y+h) - u(x, y-h)}{2h} + O(h^2) \quad (2.5)$$

και

$$u_{yy} = \frac{u(x, y+h) - u(x, y-h) - 2u(x, y)}{h^2} + O(h^2) \quad (2.6)$$

Η (2.1) λόγω των (2.3) και (2.4) γίνεται

$$\begin{aligned} & A \left[\frac{U(x+h, y) + U(x-h, y) - 2U(x, y)}{h^2} \right] + \\ & C \left[\frac{U(x, y+h) + U(x, y-h) - 2U(x, y)}{h^2} \right] + \\ & D \left[\frac{U(x+h, y) - U(x-h, y)}{2h} \right] + \\ & E \left[\frac{U(x, y+h) - U(x, y-h)}{2h} \right] + FU(x, y) = G \end{aligned} \quad (2.7)$$

ή

$$\alpha_0 U_{i,j} - \alpha_1 U_{i+1,j} - \alpha_2 U_{i,j+1} - \alpha_3 U_{i-1,j} - \alpha_4 U_{i,j-1} = t_{i,j} \quad (2.8)$$

όπου

$$\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - h^2 F = 2(A + C - \frac{1}{2}h^2 F),$$

$$\alpha_1 = A + \frac{1}{2}hD,$$

$$\alpha_2 = C + \frac{1}{2}hE, \quad (2.9)$$

$$\alpha_3 = A - \frac{1}{2}hD,$$

$$\alpha_4 = C - \frac{1}{2}hE, t = -h^2G$$

Σημειώστε ότι αν $\alpha_i > 0$,

$$h < \min \left\{ \frac{2A}{|D|}, \frac{2C}{|E|} \right\}. \quad (2.10)$$

2.4 Self-Adjoint

$$(Au_x)_x + (Cu_y)_y + Fu = G, \quad \mu\epsilon A, C > 0, F \geq 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} (Au_x)_x &= h^{-2} \left\{ A\left(x + \frac{h}{2}, y\right) [u(x+h, y) - u(x, y)] \right. \\ &\quad \left. - A\left(x - \frac{h}{2}, y\right) [u(x, y) - u(x-h, y)] + O(h^2) \right\} \end{aligned}$$

$$(Cu_y)_y = h^{-2} \left\{ C\left(x, y + \frac{h}{2}\right) [u(x, y+h) - u(x, y)] \right. \quad (2.12)$$

$$\left. - A\left(x, y - \frac{h}{2}\right) [u(x, y) - u(x, y-h)] + O(h^2) \right\}$$

Η (2.11) λόγω της (2.12) γράφεται

$$\hat{\alpha}_0 U_{i,j} - \hat{\alpha}_1 U_{i+1,j} - \hat{\alpha}_2 U_{i,j+1} - \hat{\alpha}_3 U_{i-1,j} - \hat{\alpha}_4 U_{i,j-1} = t_{i,j} \quad (2.13)$$

όπου

$$\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4 - h^2 F,$$

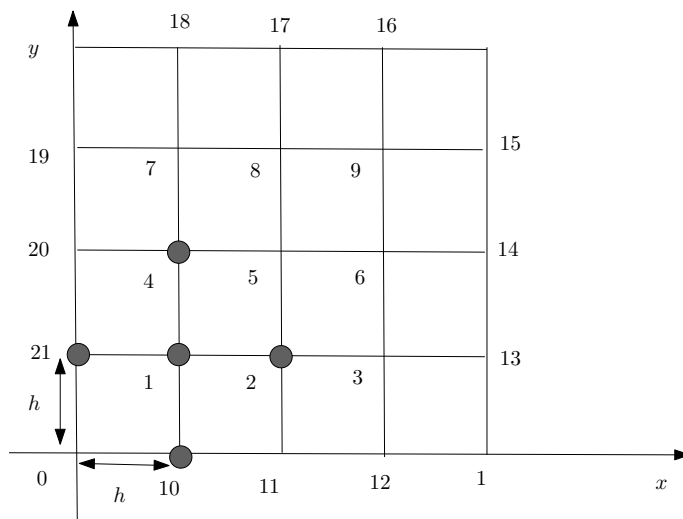
$$\hat{\alpha}_1 = A\left(x + \frac{h}{2}, y\right), \quad \hat{\alpha}_2 = C\left(x, y + \frac{h}{2}\right), \quad (2.14)$$

$$\hat{\alpha}_3 = A(x - \frac{h}{2}, y), \quad \hat{\alpha}_4 = C(x, y - \frac{h}{2}), \quad t = -h^2 G$$

$$\hat{\alpha}_i > 0, \quad \hat{\alpha}_0 \geq \sum_{i=1}^4 \hat{\alpha}_i (F \leq 0) \quad (2.15)$$

2.5 Η Εξίσωση του Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (2.16)$$



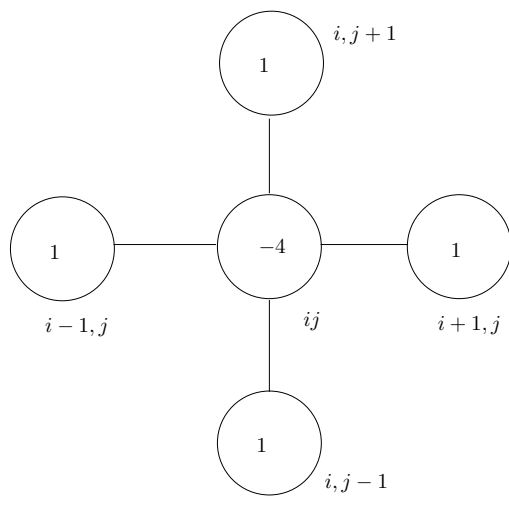
Από την (2.8), για $A = C = 1$, $F = G = 0$, προκύπτει

$$U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j} = 0. \quad (2.17)$$

Εφαρμόζοντας την (2.17) για όλους τους κόμβους θα λάβουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα

$$Au = b \quad (2.18)$$

όπου



$$u = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ u_9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} U_{10} + U_{21} \\ U_{11} \\ U_{12} + U_{13} \\ \vdots \\ U_{15} + U_{16} \end{bmatrix}$$

και

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & -1 & & & & \\ & -1 & 4 & & & -1 & & & \\ -1 & & & 4 & -1 & & -1 & & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 & & -1 & \\ & & -1 & & -1 & 4 & & & -1 \\ & & & -1 & & & 4 & -1 & \\ & & & & -1 & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

ή

$$A = \begin{bmatrix} B & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & B & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & B & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & B \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

Η λύση του συστήματος (2.18) υπολογίζεται με επαναληπτικές μεθόδους. Η SOR μέθοδος

$$u^{(n+1)} = (1 - \omega)u^{(n)} + \omega(Lu^{(n+1)} + Uu^{(n)} + c) \quad (2.19)$$

με

$$c = D^{-1}b$$

και

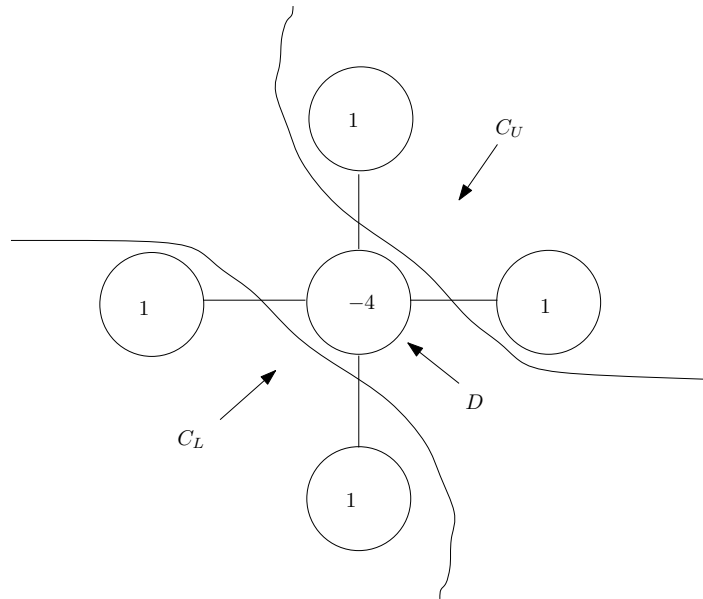
$$A = D - C_L - C_U \quad (2.20)$$

όπου $D = \text{diag}(A)$, $-C_L, -C_U$ τα κάτω και άνω τριγωνικά τμήματα του A. Επιπλέον

$$L = D^{-1}C_L \text{ και } U = D^{-1}C_U. \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} Lu &\rightarrow \frac{1}{4}(U_{i-1,j} + U_{i,j-1}) \\ Uu &\rightarrow \frac{1}{4}(U_{i,j+1} + U_{i+1,j}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Το μόριο του A είναι:

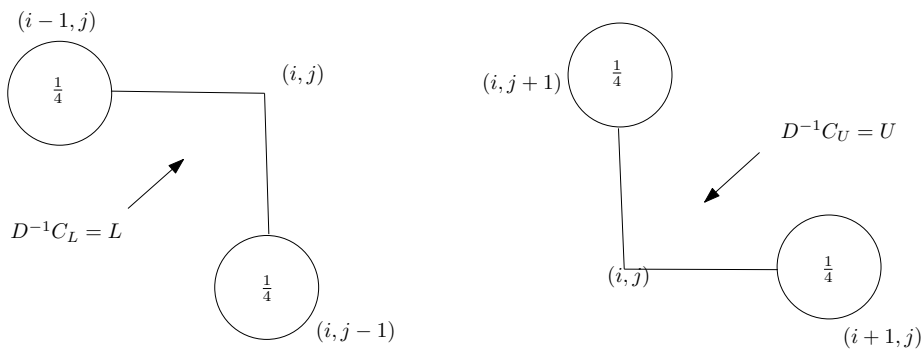


Η SOR για την (2.17) είναι (βλ. (2.19)) η

$$U_{ij}^{(n+1)} = (1-\omega)U_{ij}^{(n)} + \omega \left[\left(\frac{1}{4}U_{i-1,j}^{(n+1)} + \frac{1}{4}U_{i,j-1}^{(n+1)} \right) + \frac{1}{4}U_{i+1,j}^{(n)} + \frac{1}{4}U_{i,j+1}^{(n)} \right] \quad (2.23)$$

Για $\omega = 1$ η (2.23) παράγει την

$$U_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{4}(U_{i-1,j}^{(n+1)} + U_{i,j-1}^{(n+1)} + U_{i+1,j}^{(n)} + U_{i,j+1}^{(n)}) \quad (2.24)$$



η οποία είναι η Gauss-Seidel (GS) μέθοδος. Πράγματι η *GS* σε μορφή πινάκων είναι

$$u^{(n+1)} = Lu^{(n+1)} + Uu^{(n)} + c \quad (2.25)$$

και λόγω της (2.22) δίνει την (2.24). Όμοια η Jacobi Overrelaxation (JOR) δίνεται από τον τύπο

$$u^{(n+1)} = (1 - \tau)u^{(n)} + \tau(Bu^{(n)} + c), \quad B = L + U \quad (2.26)$$

και λόγω της (2.22) δίνει

$$u_{ij}^{(n+1)} = (1 - \tau)u_{ij}^{(n)} + \frac{\tau}{4}(U_{i-1,j}^{(n)} + U_{i+1,j}^{(n)} + U_{i,j-1}^{(n)} + U_{i,j+1}^{(n)}) \quad (2.27)$$

Αν $\tau = 1$ η (2.26) δίνει τη μέθοδο του Jacobi

$$u^{(n+1)} = Bu^{(n)} + c \quad (2.28)$$

η οποία δίνει

$$u_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{4}(U_{i-1,j}^{(n)} + U_{i+1,j}^{(n)} + U_{i,j-1}^{(n)} + U_{i,j+1}^{(n)}). \quad (2.29)$$

Όλες οι παραπάνω μέθοδοι είναι ειδικές περιπτώσεις της *ESOR* μεθόδου, η οποία σε μορφή πινάκων, έχει τον τύπο

$$u^{(n+1)} = (1 - \tau)u^{(n)} + \omega Lu^{(n+1)} + (\tau - \omega)Lu^{(n)} + \tau Uu^{(n)} + \tau c \quad (2.30)$$

Για $\tau = \omega$ η (2.30) δίνει την *SOR*.

Για $\tau = \omega = 1$ η (2.30) δίνει την *GS*.

Ενώ για $\omega = 0$, δίνει την *JOR*.

Η *Unsymmetric Successive Overrelaxation (USSOR)* μέθοδος δίνεται από τους τύπους

$$u^{(n+\frac{1}{2})} = (1 - \omega)u^{(n)} + \omega(Lu^{(n+\frac{1}{2})} + Uu^{(n)} + c)$$

και

$$u^{(n+1)} = (1 - \omega')u^{(n+\frac{1}{2})} + \omega'(Lu^{(n+\frac{1}{2})} + Uu^{(n+1)} + c) \quad (2.31)$$

η οποία τώρα λαμβάνει τη μορφή

$$U_{ij}^{(n+\frac{1}{2})} = (1 - \omega)U_{ij}^{(n)} + \frac{\omega}{4}(U_{i-1,j}^{(n+\frac{1}{2})} + U_{i,j-1}^{(n+\frac{1}{2})} + U_{i+1,j}^{(n)} + U_{i,j+1}^{(n)}) \quad (2.32)$$

και

$$U_{ij}^{(n+1)} = (1 - \omega')u_{ij}^{(n+\frac{1}{2})} + \omega'(U_{i-1,j}^{(n+\frac{1}{2})} + U_{i,j-1}^{(n+\frac{1}{2})} + U_{i+1,j}^{(n+1)} + U_{i,j+1}^{(n+1)}) \quad (2.33)$$

Η (2.32) σαρώνει το δίκτυο από κάτω προς τα πάνω ενώ η (2.33) σαρώνει το δίκτυο από πάνω προς τα κάτω. Για $\omega = \omega'$ προκύπτει η Symmetric SOR(SSOR) μέθοδος. Μια ανάλογη μέθοδος είναι η Preconditioned Simultaneous Displacement (PSD) μέθοδος, η οποία δίνεται από το ακόλουθο σχήμα

$$u^{(n+\frac{1}{2})} = (1 - \tau)u^{(n)} + \omega Lu^{(n+\frac{1}{2})} + (\tau - \omega)Lu^{(n)} + \tau(Uu^{(n)} + c) \quad (2.34)$$

και

$$u^{(n+1)} = u^{(n+\frac{1}{2})} + \omega Uu^{(n+1)} - \omega Uu^{(n)} \quad (2.35)$$

η οποία για το μόριο των 5-σημείων γίνεται:

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{(n+\frac{1}{2})} &= (1 - \tau)U_{i,j}^{(n)} + \left(\frac{\omega}{4}\right)(U_{i-1,j}^{(n+\frac{1}{2})} + U_{i,j-1}^{(n+\frac{1}{2})}) + \\ &\left(\frac{\tau - \omega}{4}\right)(U_{i-1,j}^{(n)} + U_{i,j-1}^{(n)}) + \left(\frac{\tau}{4}\right)(U_{i+1,j}^{(n)} + U_{i,j+1}^{(n)}) \end{aligned} \quad (2.36)$$

και

$$U_{i,j}^{(n+1)} = U_{i,j}^{(n+\frac{1}{2})} + \left(\frac{\omega'}{4}\right)(U_{i+1,j}^{(n+1)} + U_{i,j+1}^{(n+1)}) - \left(\frac{\omega'}{4}\right)(U_{i+1,j}^{(n)} + U_{i,j+1}^{(n)}) \quad (2.37)$$

όπου η σάρωση γίνεται όπως στην SSOR.

2.6 Σύγκλιση

$$S(G) = \max|\lambda| < 1, u^{(n+1)} = Gu^{(n)} + k$$

JOR Μέθοδος

Ο επαναληπτικός πίνακας της JOR είναι ο

$$B_\tau = (1 - \tau)I + \tau B. \quad (2.38)$$

Αν μ ιδιοτιμές του B τότε

$$m \leq \mu \leq M$$

$$\text{επειδή } \text{trace}(B) = \sum_{i=1}^N \mu_i = 0, \text{ με } m \leq 0 \leq M \quad (2.39)$$

Άρα

$$S(B_\tau) = \max|1 - \tau + \tau\mu|, \quad m \leq \mu \leq M \quad (2.40)$$

και για σύγκλιση $S(B_\tau) < 1$ ή

$$|1 - \tau + \tau\mu| < 1, \quad m \leq \mu \leq M. \quad (2.41)$$

Υποθέτοντας ότι A είναι συμμετρικός, τότε από (2.41) και (2.39)

$$0 < \tau < \frac{2}{1 - m}, \quad M < 1 \quad (2.42)$$

Σημείωση: $B = D^{-1}(L + U)$ όμοιος με $\tilde{B} = D^{\frac{1}{2}}BD^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}}(L + U)D^{-\frac{1}{2}}$ ο οποίος είναι συμμετρικός άρα ο B έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

Υπόθεση: ο D έχει θετικά στοιχεία.

J Μέθοδος

$$S(B) < 1, S(B) = \max\{|m|, M\} < 1, \text{ οπότε}$$

$$M < 1, M + m > 0 \quad (2.43)$$

ή

$$-1 < m, M + m < 0$$

Βέλτιστη τιμή του τ .

Από την (2.40) έχουμε:

$$S(B_\tau) = \max\{|1 - \tau + \tau M|, |1 - \tau + \tau m|\} \quad (2.44)$$

η βέλτιστη τιμή του τ θα είναι αυτή που

$$1 - \tau + \tau M = -(1 - \tau + \tau m)$$

ή

$$\tau_0 = \frac{2}{2 - m - M} \quad (2.45)$$

οπότε

$$S(B_{\tau_0}) = |1 - \tau_0 - \tau_0 M| = \frac{M - m}{2 - M - m}. \quad (2.46)$$

Αλλά

$$m = 1 - \lambda_{max}, \quad M = 1 - \lambda_{min} \quad (2.47)$$

όπου $\lambda_{min}, \lambda_{max}$, η μικρότερη και μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα \hat{A} αντίστοιχα, με

$$\hat{A} = D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}} \quad (2.48)$$

και

$$(\tilde{B} = D^{\frac{1}{2}} B D^{-\frac{1}{2}} = I - \underbrace{D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}}_{\lambda}) = I - \hat{A}$$

Οι (2.45), (2.46) λόγω της (2.47) γράφονται

$$\tau_0 = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}} \quad (2.49)$$

και

$$S(B_{\tau_0}) = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} = \frac{P(\hat{A}) - 1}{P(\hat{A}) + 1}, \quad (2.50)$$

$$P(\hat{A}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Η ποσότης $P(\hat{A})$ καλείται αριθμός συνθήκης του \hat{A} . Από την (2.50) έχουμε

$$R(B_{\tau_0}) = -\log S(B_{\tau_0}) \simeq \frac{2}{P(\hat{A})}. \quad (2.51)$$

Η ταχύτητα σύγκλισης της JOR είναι αντίστροφα ανάλογη του αριθμού συνθήκης του \hat{A} .

Θυμηθείτε ότι $u^{(n+1)} = u^{(n)} + \tau R^{-1}(b - Au^{(n)})$ ή $u^{(n+1)} = (I - \tau R^{-1}A)u^{(n)} + \tau R^{-1}b$. Αν $R = D$ τότε προκύπτει η JOR, οπότε τα ανωτέρω αποτελέσματα μπορούν να γενικευτούν.

Στόχος: Να επιλεγεί ο R έτσι ώστε ο $R^{-1}A$ να έχει όσο το δυνατόν μικρότερο φασματικό αριθμό.

$$k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \text{ φασματικός αριθμός.}$$

Σύγκλιση της SOR

Ο επαναληπτικός πίνακας της SOR είναι ο $L_\omega = (I - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega U]$

Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του L_ω έχουμε

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^N \lambda_i &= \det(L_\omega) = \det(I - \omega L)^{-1} \cdot \det((1 - \omega)I + \omega U) \\ &= \det((1 - \omega)I + \omega U) = (1 - \omega)^N \end{aligned}$$

άρα

$$S(L_\omega) \geq (|1 - \omega|^N)^{\frac{1}{N}} = |1 - \omega| \quad (2.52)$$

Αν $S(L_\omega) < 1$, τότε $|1 - \omega| < 1$

ή

$$0 < \omega < 2 \text{ (Kahan 1958)} \quad (2.53)$$

Ορισμός: Ένας πίνακας είναι two cyclic αν με κατάλληλη μετάθεση των γραμμών του και των αντίστοιχων στηλών του μπορεί να τεθεί στη μορφή

$$\begin{bmatrix} I_1 & F \\ G & I_2 \end{bmatrix}$$

όπου I_1, I_2 είναι τετράγωνοι ταυτοτικοί πίνακες και F, G ορθογώνιοι πίνακες.

Ορισμός: Αν ένας πίνακας $A = I - L - U$ είναι two cyclic, τότε είναι consistency ordered αν οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$aL + \frac{1}{a}U, \quad a \neq 0$$

είναι ανεξάρτητες του a .

Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του L_ω έχουμε

$$\det(L_\omega - \lambda I) = 0 \quad \text{ή} \quad |(I - \omega L^{-1})\{I + \omega(U - I)\} - \lambda I| = 0$$

ή

$$|I + \omega(U - I) - \lambda(I - \omega L)| = 0$$

ή

$$|(U - \lambda I) - \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega}I| = 0$$

ή

$$|\lambda^{\frac{1}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}}L + \lambda^{-\frac{1}{2}}U) - \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega}I| = 0$$

ή

$$|(\lambda^{\frac{1}{2}}L + \lambda^{-\frac{1}{2}}U) - \frac{\lambda + \omega - 1}{\lambda^{\frac{1}{2}}\omega}I| = 0$$

Αν $A = I - L - U$ είναι two cyclic και consistently ordered τότε

$$|(L + U) - \frac{\lambda + \omega - 1}{\lambda^{\frac{1}{2}}\omega}I| = 0$$

ή

$$\mu = \frac{\lambda + \omega - 1}{\lambda^{\frac{1}{2}}\omega} \quad (2.54)$$

όπου μ ιδιοτιμή του $B = L + U$ και λ ιδιοτιμή του L_ω .
ή

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2 \mu^2 \lambda \quad (2.55)$$

Η (2.55) είναι δευτεροβάθμια ως προς λ και εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$S(L_\omega) = \max|\lambda| < 1$$

αν και μόνο αν

$$\mu = S(B) < 1 \text{ και } 0 < \omega < 2 \quad (2.56)$$

Από την (2.55) αν $\omega = 1(GS)$ τότε $\lambda_{GS} = \mu^2$
ή

$$S(L) = S(B)^2 \quad (2.57)$$

ή

$$R(L) = 2R(B). \quad (2.58)$$

Θυμηθείτε ότι $R(G) = -\log S(G)$ είναι η ταχύτητα σύγκλισης μιας ε.μ. $u^{(n+1)} = Gu^{(n)} + k$. Η (2.57) δηλώνει ότι η ταχύτητα σύγκλισης της GS είναι διπλάσια από εκείνης του Jacobi.

Εφαρμογή για το πρόβλημα μοντέλο.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < b$$

$\frac{a}{h}, \frac{b}{h}$ ακέραιοι I, J
Είναι γνωστό ότι

$$\varepsilon^{(n+1)} = B\varepsilon^{(n)}$$

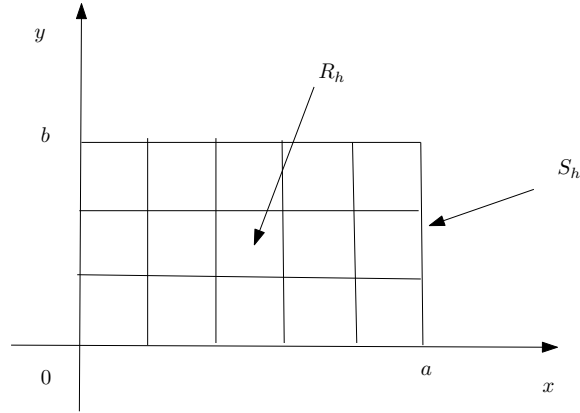
Για τον προσδιορισμό μιας ιδιοτιμής μ του B αναζητούμε μια συνάρτηση $u(x, y)$ ορισμένη στο $R_h \cup S_h$ τέτοια ώστε

$$\mu v(x, y) = \frac{1}{4}[v(x+h, y) + v(x-h, y) + v(x, y+h) + v(x, y-h)] \quad (2.59)$$

επί του R_h και $v(x, y) = 0$ στο S_h .

Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών βρίσκεται ότι

$$v(x, y) = v_{p,q}(x, y) = \sin \frac{q\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \quad (2.60)$$



και

$$\mu = \mu_{p,q} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{q\pi h}{a} + \cos \frac{p\pi h}{b} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{q\pi}{I} + \cos \frac{p\pi}{J} \right) \quad (2.61)$$

όπου p, q ακέραιοι με $1 \leq q \leq I-1$ και $1 \leq p \leq J-1$. Επειδή η $|\mu_{p,q}|$ μεγιστοποιείται για $p = q = 1$ η (2.61) δίνει

$$\bar{\mu} = S(B) = \mu_{1,1} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi h}{a} + \cos \frac{\pi h}{b} \right] = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{I} + \cos \frac{\pi}{J} \right) \quad (2.62)$$

ή, αναπτύσσοντας σε σειρά

$$\bar{\mu} = S(B) = 1 - \frac{1}{4} \left[\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right] h^2 + O(h^4) \quad (2.63)$$

Για $a = b = 1$ (τετράγωνο πεδίο) η (2.62) δίνει ($I = J = \frac{1}{h}$)

$$\bar{\mu} = S(B) = \cos \pi h \quad (2.64)$$

ή για $h \rightarrow 0$

$$\bar{\mu} = S(B) \simeq 1 - \frac{\pi^2 h^2}{2}. \quad (2.65)$$

Από την (2.57) έχουμε για την GS

$$S(\mathcal{L}) = S(B)^2 \stackrel{(2.64)}{=} \cos^2 \pi h \quad (2.66)$$

ή

$$S(\mathcal{L}) \simeq 1 - \pi^2 h^2 \quad (2.67)$$

ή

$$R(\mathcal{L}) = -\log S(\mathcal{L}) = \pi^2 h^2 \quad ((2.67)')$$

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}, \quad \bar{\mu} = S(B)$$

$$S(\mathcal{L}_{\omega_0}) = \omega_0 - 1.$$

Επειδή για το πρόβλημα μοντέλο έχουμε $\bar{\mu} = \cos \pi h$ έπεται ότι

$$S(\mathcal{L}_{\omega_0}) = \frac{1 - \sin \pi h}{1 + \sin \pi h} \simeq 1 - 2\pi h \quad (2.68)$$

με

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sin \pi h} \quad (2.69)$$

Άρα

$$R(S(\mathbb{L}_{\omega_0})) \simeq 2\pi h \quad (2.70)$$

Συμπέρασμα: Συγκρίνοντας την (2.67)' με την (2.70) συμπεραίνουμε ότι η *SOR* είναι καλύτερη από την *GS* κατά μία τάξη μεγέθους.

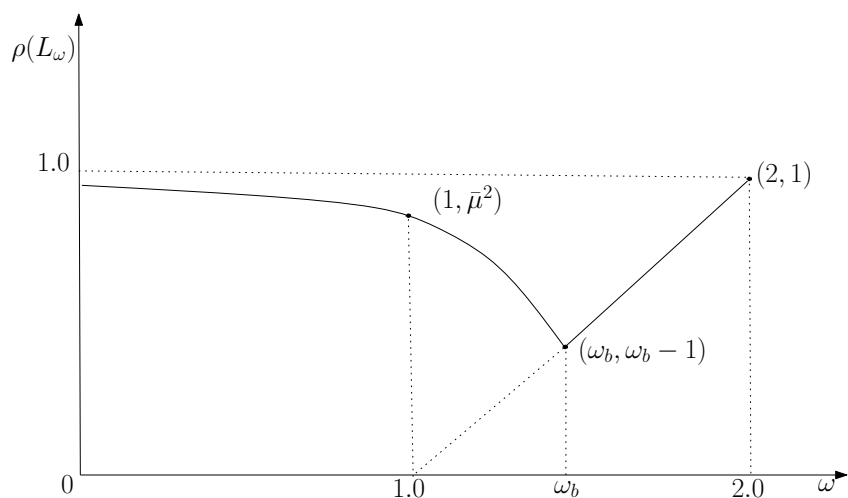
h	$\bar{\mu}$	$R(B)$	$R(\mathbb{L})$	$n_\pi(J)$	$n_\pi(GS)$	$n_\theta(J)$	$n_\theta(GS)$
$\frac{1}{10}$	0.9511	0.0502	0.100	285	143	276	138
$\frac{1}{20}$	0.9877	0.0124	0.0248	1154	578	1116	558
$\frac{1}{40}$	0.9969	0.0031	0.0062	4631	2317	4475	2238

$$U_{ij}^{(0)} = 1, \quad \|U^{(n+1)} - U^{(n)}\|_\infty < \epsilon = 10^{-6}$$

n_π = αριθμός επαναλήψεων (πειραματικός)

n_θ = Θεωρητικός αριθμός επαναλήψεων

$$n_\theta \geq \frac{\log \frac{1}{\epsilon}}{R}, \quad R = -\log S$$



2.7 Block Επαναληπτικές Μέθοδοι

$$Au = b \quad (2.71)$$

$$\sum_{s=1}^q A_{r,s} U_s = B_s, s = 1, 2, \dots, q \quad (2.72)$$

$A_{r,s}$ σχηματίζεται αν από τον A διαγραφούν όλες οι γραμμές εκτός αυτών που βρίσκονται στο R_r και όλες οι στήλες εκτός αυτών που βρίσκονται στο R_s , όπου R_1, R_2, \dots, R_q groups.

Παράδειγμα:

$$Au = b, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad R_1 = \{1, 3\}, \quad R_2 = \{2\}$$

τότε

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{32} \end{bmatrix}, \quad U_{12} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = (\alpha_{21}, \alpha_{23}), \quad A_{22} = (\alpha_{22}),$$

$$U_2 = (u_2), \quad B_2 = (b_2)$$

$$A^{(\pi)} = D^{(\pi)} - C_L^{(\pi)} - C_U^{(\pi)}$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \tau(R^{(\pi)})^{-1}(b^{(\pi)} - A^{(\pi)}u^{(n)}) \quad (2.73)$$

$$R^{(\pi)} = D^{(\pi)} \rightarrow BJOR$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \tau(D^{(\pi)})^{-1}(b^{(\pi)} - A^{(\pi)}u^{(n)})$$

$$D^{(\pi)}u^{(n+1)} = D^{(\pi)}u^{(n)} + \tau b^{(\pi)} - \tau A^{(\pi)}u^{(n)}$$

$$D^{(\pi)}u^{(n+1)} = (1 - \tau)D^{(\pi)}u^{(n)} + \tau(C_L^{(\pi)} + C_U^{(\pi)})u^{(n)} + \tau b^{(\pi)} \quad (2.74)$$

$$D^{(\pi)}u \rightarrow A_{rr}U_r,$$

$$C_L^{(\pi)}u \rightarrow - \sum_{s=1}^{r-1} A_{rs}U_s, \quad (2.75)$$

$$C_U^{(\pi)}u \rightarrow - \sum_{s=r+1}^q A_{rs}U_s$$

Από τις (2.74) και (2.75) προκύπτει

$$A_{rr}U_r^{(n+1)} = (1 - \tau)A_{rr}U_r^{(n)} - \tau \sum_{s=1, s \neq r}^q A_{rs}U_s^{(n)} + \tau B_r, \quad r = 1, 2, \dots, q \quad (2.76)$$

$$R^{(\pi)} = D^{(\pi)} - \omega C_L^{(\pi)}, \quad \tau = \omega \rightarrow BSOR$$

Από την (2.73) έχουμε

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \tau(D^{(\pi)} - \omega C_L^{(\pi)})^{-1}(b^{(\pi)} - A^{(\pi)}u^{(n)})$$

ή για $\tau = \omega$

$$(D^{(\pi)} - \omega C_L^{(\pi)})u^{(n+1)} = (D^{(\pi)} - \omega C_L^{(\pi)})u^{(n)} + \omega(b^{(\pi)} - A^{(\pi)}u^{(n)})$$

ή

$$(D^{(\pi)} - \omega C_L^{(\pi)})u^{(n+1)} = [(1 - \omega)D^{(\pi)} - \omega C_U^{(\pi)}]u^{(n)} + \omega b^{(\pi)}$$

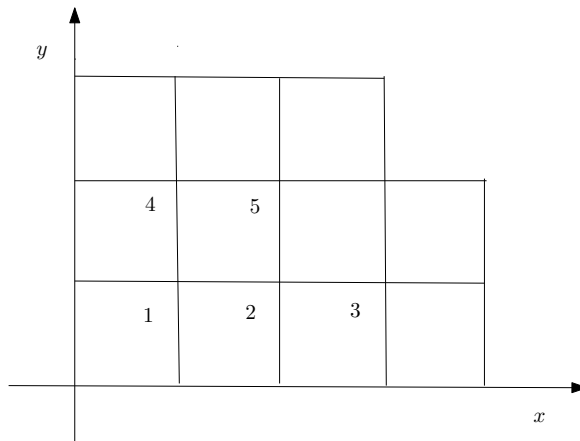
η οποία λόγω της (2.75) γράφεται:

$$\begin{aligned} A_{rr}U_r^{(n+1)} &= -\omega \sum_{s=1}^{r-1} A_{rs}U_s^{(n+1)} + (1 - \omega)A_{rr}U_r^{(n)} \\ &\quad -\omega \sum_{s=r+1}^q A_{rs}U_s^{(n)} + \omega B_r, \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$r = 1, 2, \dots, q$$

Παράδειγμα:

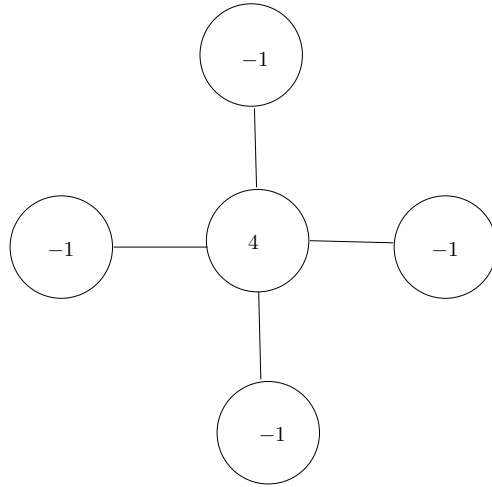
$$\pi_1 : R_1 = \{1, 2, 3\}, \quad R_2 = \{4, 5\}$$



$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

με

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$



$$A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D^{(\pi_1)} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad C_L^{(\pi_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad C_U^{(\pi_1)} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για το μόριο των 5-σημείων η (2.77) δίνει (και για την ομαδοποίηση π_1 , κατά γραμμές):

$$\begin{aligned} & -U_{i-1,j}^{(n+1)} + 4U_{i,j}^{(n+1)} - U_{i+1,j}^{(n+1)} = \\ = & \omega U_{i,j-1}^{(n+1)} + (1-\omega)[-U_{i-1,j}^{(n)} + 4U_{i,j}^{(n)} - U_{i+1,j}^{(n)}] + \omega U_{i,j+1}^{(n)} + \omega B_{ij} \quad (SOR) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Η (2.78) εφαρμόζεται για κάθε μία γραμμή, δηλαδή για κάθε j , εφαρμόζεται η (2.78) για $i = 1, 2, \dots, N-1$, οπότε κάθε φορά έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα τριδιαγώνιο της μορφής

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & & & \mathbf{0} \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{N-2} \\ U_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_{N-2} \\ B_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

όπου το B_i είναι το 2ο μέλος της (2.78)

Για το παράδειγμά μας το (2.79) θα είναι

Για την πρώτη γραμμή

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

Για τη δεύτερη γραμμή

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_4 \\ B_5 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα (2.79) λύνεται με άμεση μέθοδο π.χ. LU και επειδή επαναλαμβάνεται η λύση του γι'αυτό οι L και U πίνακες υπολογίζονται μόνο μια φορά.

Εφαρμογές:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n+1)} &= B^{(\pi)} \varepsilon^{(n)} \\ \varepsilon^{(n+1)}(x, y) &= B^{(\pi)} \varepsilon^{(n)}(x, y), \end{aligned}$$

Β ο επαναληπτικός πίνακας της J , άρα

$$\varepsilon^{(n+1)}(x, y) = \frac{1}{4} \varepsilon^{(n+1)}(x+h, y) + \frac{1}{4} \varepsilon^{(n+1)}(x-h, y) + \frac{1}{4} \varepsilon^{(n)}(x, y+h) + \frac{1}{4} \varepsilon^{(n)}(x, y-h) \quad (2.80)$$

Για τον προσδιορισμό μιας ιδιοτιμής του $B^{(\pi_1)}$ και ενός ιδιοδιάνυσματος u , αναζητούμε έναν αριθμό μ και μια συνάρτηση $v(x, y)$ η οποία μηδενίζεται στο S_h τέτοια ώστε:

$$\mu \mathbf{v}(x, y) = \frac{1}{4} [\mu \mathbf{v}(x+h, y) + \mu \mathbf{v}(x-h, y) + \mathbf{v}(x, y+h) - \mathbf{v}(x, y-h)] \quad (2.81)$$

όπου $\varepsilon^{(n+1)}(x, y) = \mu \mathbf{v}(x, y)$ και $\varepsilon^{(n)}(x, y) = \mathbf{v}(x, y)$ στην (2.80).

Από την (2.81) προκύπτει:

$$\mu_{pq} = \frac{\cos q \pi h}{2 - \cos q \pi h}, \quad p, q = 1, 2, \dots, h^{-1} - 1 \quad (2.82)$$

και

$$\mathbf{v}_{pq}(x, y) = \sin p \pi x \sin q \pi y \quad (2.83)$$

Συνεπώς,

$$\bar{\mu}^{\pi_1} = S(B^{(\pi_1)}) = \frac{\cos \pi h}{2 - \cos \pi h} \sim 1 - \pi^2 h^2$$

Θυμηθείτε ότι

$$\bar{\mu} = S(B) = \cos \pi h \sim 1 - \frac{\pi^2 h^2}{2}$$

για τη σημειακή μέθοδο J . Συνεπώς, η ταχύτητα σύγκλισης της *line J* μεθόδου είναι περίπου διπλάσια της σημειακής J μεθόδου για μικρά h .

$$\begin{aligned} R(B_{LJ}) &\simeq 2R(B_J) \\ R(\mathcal{L}_{LGS}) &\simeq 2R(\mathcal{L}_{GS}) \\ R(\mathcal{L}_{LSOR}) &\simeq \sqrt{2}R(\mathcal{L}_{SOR}) \end{aligned} \quad (2.84)$$

Για πολλαπλές γραμμές (k το πλήθος)

$$R(\mathcal{L}(k)_{LSOR}) \simeq \sqrt{2k}R(\mathcal{L}_{SOR}) \quad (2.85)$$

ADI

$$\frac{\partial}{\partial x} (A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (C(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}) + F(x, y)u = G \quad (2.86)$$

$A, C > 0, F \leq 0$ για όλα τα $(x, y) \in R$.

Η διακριτοποίηση της (2.86) με τον τύπο των 5-σημείων παράγει την

$$H_0[u](x, y) + V_0[u](x, y) + E_0[u](x, y) = -h^2 G \quad (2.87)$$

όπου

$$\begin{aligned} H_0[u](x, y) &= [A(x + \frac{h}{2}, y) + A(x - \frac{h}{2}, y)]u(x, y) \\ &- A(x + \frac{h}{2}, y)u(x + h, y) + A(x - \frac{h}{2}, y)u(x - h, y) \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} V_0[u](x, y) &= [C(x, y + \frac{h}{2}) + C(x, y - \frac{h}{2})]u(x, y) \\ &- C(x, y + \frac{h}{2})u(x, y + h) + C(x, y - \frac{h}{2})u(x, y - h) \end{aligned}$$

$$E_0[u](x, y) = -h^2 F(x, y)u(x, y)$$

$$V_0[u](x, y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(A(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$E_0[u](x, y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(C(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}$$

Η (2.87) σε μορφή πινάκων γράφεται :

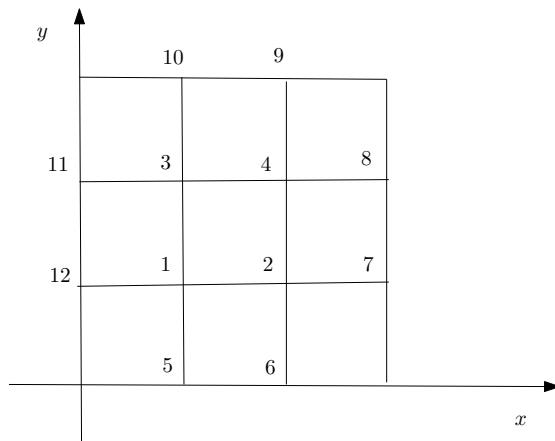
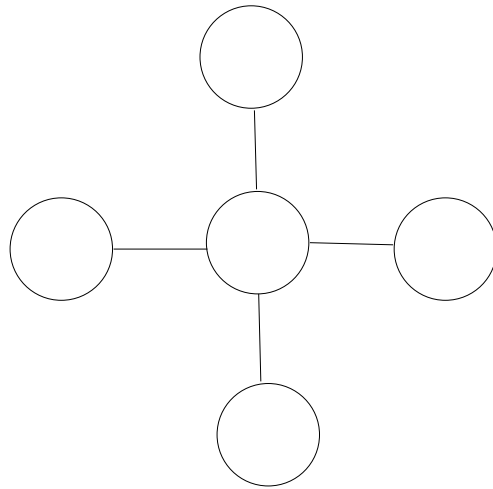
$$Au = b, \quad (2.89)$$

$$A = H_0 + V_0 + E_0$$

2.7.1 Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 4 + h^2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 + h^2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 + h^2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 + h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_5 + u_{12} \\ u_6 + u_7 \\ u_{10} + u_{11} \\ u_8 + u_9 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

$$Au = (H_0 + V_0 + E_0)u = b$$



όπου

$$H_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad V_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad E_0 = h^2 I \quad (2.91)$$

Θέτοντας

$$H = H_0 + \frac{1}{2}E_0 \text{ και } V = V_0 + \frac{1}{2}E_0 \quad (2.92)$$

έχουμε ότι $Au = b$ με

$$A = H + V \quad (2.93)$$

Θυμηθείτε ότι

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \tau R^{-1}(b - Au^{(n)}) \quad (2.94)$$

Αν

$$R = (H + \rho I)(V + \rho' I) \quad (2.95)$$

τότε η (2.94) λόγω της (2.95) γράφεται

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \tau(V + \rho' I)^{-1}(H + \rho I)^{-1}(b - Au^{(n)}) \quad (2.96)$$

υποθέτωντας ότι οι πίνακες $V + \rho' I$ και $H + \rho I$ είναι μη ιδιάζοντες (και άρα υπάρχουν οι αντίστροφοί τους) για $\forall \rho \in R$. Ακολουθώντας παρόμοια εργασία, όπως για την *PSD* μέθοδο, λαμβάνουμε από την (2.96) διαδοχικά τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} (H + \rho I)u &= b - (V - \rho I)u \\ (V + \rho' I)u &= b - (H - \rho' I)u \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} (H + \rho_{n+1} I)u^{(n+\frac{1}{2})} &= b - (V - \rho_{n+1} I)u^{(n)} \\ (V + \rho'_{n+1} I)u^{(n+1)} &= b - (H - \rho'_{n+1} I)u^{(n+\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

ή

$$u^{(n+1)} = T_{\rho\rho'} u^{(n)} + k, \rho_{n+1} = \rho, \rho'_{n+1} = \rho'$$

όπου

$$\begin{aligned} T_{\rho\rho'} &= (V + \rho' I)^{-1}(H - \rho' I)(H + \rho I)^{-1}(V - \rho I) \\ k &= (\rho + \rho')(V + \rho' I)^{-1}(H + \rho I)^{-1} \end{aligned}$$

και

$$T_{\rho\rho'} = I - \underbrace{(\rho + \rho')}_{\tau} \underbrace{(V + \rho I)(H + \rho I)^{-1}}_{R^{-1}} A$$

2.8 Ασκήσεις

1. Η συνάρτηση ϕ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 = 0$$

σε κάθε σημείο εσωτερικά του τετραγώνου που ορίζεται από τις ευθείες $x = \pm 1, y = \pm 1$, και 0 στην περίμετρο. Υπολογίστε τη λύση πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιώντας ένα τετράγωνο πλέγμα square mesh πλευράς $\frac{1}{2}$. Υποθέτοντας ότι το discretization λάθος διακριτοποίησης είναι ανάλογο του h^2 υπολογίστε την τιμή της ϕ στο σημείο $(0, 0)$. (Η αναλυτική λύση είναι 0.589)

Λύση

Λόγω της συμμετρίας υπάρχουν μόνο τρεις άγνωστοι: ϕ_1 στο $(0, 0)$, ϕ_2 στο $(\frac{1}{2}, 0)$, ϕ_3 στο $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Οι εξισώσεις είναι:

$$\begin{aligned}8\phi_2 - 8\phi_1 + 1 &= 0 \\4\phi_3 + 2\phi_1 - 8\phi_2 &= 1 = 0 \\4\phi_2 - 8\phi_3 + 1 &= 0\end{aligned}$$

και δίνουν $\phi_1 = 0.562, \phi_2 = 0.438$ και $\phi_3 = 0.344$ στο τρισδιάστατο χώρο. Ένα coarse πλέγμα πλευράς $h = 1$ δίνει την εξίσωση πεπερασμένων διαφορών

$$-4\phi_1 + 2 = 0 \Rightarrow \phi_1 = 0.5$$

Συνεπώς η μέθοδος (διφερρεδ αππροαση το τηε λιμιτ) δίνει μια βελτιωμένη τιμή της $\phi_1 = 0.562 + \frac{1}{3}(0.062) = 0.583$, η οποία είναι πολύ κοντά στην αναλυτική λύση 0.589 σε αντίθεση με την λύση του crude πλέγματος πλευράς $h = 1$.

2. Η συνάρτηση u ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 32u = 0$$

σε κάθε εσωτερικό σημείο του τετραγώνου $x = \pm 1, y = \pm 1$, και υπόκεινται στις εξής συνοριακές συνθήκες

- $u = 0$ στο $y = 1$, $-1 \leq x \leq 1$,
- $u = 1$ στο $y = -1$, $-1 \leq x \leq 1$,
- $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}u$ στο $x = 1$, $-1 < y < 1$,
- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}u$ στο $x = -1$, $-1 < y < 1$.

Θεωρείστε τετράγωνο πλέγμα πλευράς $\frac{1}{4}$ και ονοματίστε τα σημεία με συντεταγμένες $(0, \frac{3}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}), (1, \frac{3}{4}), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), \dots$ ως $1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Χρησιμοποιώντας την πιο απλή φόρμουλα κεντρικών διαφορών, δείξτε ότι οι τριανταπέντε εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών που προσεγγίζουν αυτό το πρόβλημα μπορούν να γραφτούν σε μορφή πίνακα ως εξής

$$Au = b,$$

όπου

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{34} \\ u_{35} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

και

$$A = \begin{bmatrix} B & I & & & & & & & \\ I & B & I & & & & & & \\ & I & B & I & & & & & \\ & & I & B & I & & & & \\ & & & I & B & I & & & \\ & & & & I & B & I & & \\ & & & & & I & B & I & \\ & & & & & & I & B & \end{bmatrix}$$

όπου

$$B = \begin{bmatrix} -6 & 2 & & & & \\ & 1 & -6 & 1 & & \\ & & 1 & -6 & 1 & \\ & & & 1 & -6 & 1 \\ & & & & 2 & -6 \end{bmatrix} \text{ και } I = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση της εξίσωσης $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2H(u-u_0)}{KD} = 0$, η οποία αποφασίζει την σταθερή θερμοκρασία των σημείων μιας λεπτής πλάκας που ακτινοβολεί θερμότητα από την επιφάνειά της σε ένα μέσο σε θερμοκρασία u_0 . Το D αναπαριστά την πυκνότητα της, το K την θερμική αγωγιμότητά της και το H την αγωγιμότητα της επιφάνειάς της.

3. Η αργή σταθερή κίνηση παχύρρευστου υγρού που ρέει σε έναν κυλινδρικό σωλήνα, του οποίου η διατομή είναι η επιφάνεια Σ που περικλείεται από την κλειστή καμπύλη C , μπορεί να υπολογιστεί από μια συνάρτηση ψ που ικανοποιεί την εξίσωση Laplace σε όλα τα σημεία της S και ισούται με $\frac{1}{2}r^2$ στην καμπύλη C , όπου (r, θ) οι κυλινδρικές συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο της S . Υπολογίστε λύση πεπερασμένων διαφορών για τη ροή μέσω ενός κυκλικού τομέα που ορίζεται από τις γραμμές $\theta = 0, \theta = 0.8$ ακτίνια, και τον κύκλο $r = 1$, στα σημεία του πλέγματος που προσδιορίζονται από $r = \frac{1}{3}i, (i = 1, 2), \theta = 0.2j, (j = 1, 2, 3)$.

Λύση

Το πρόβλημα είναι συμμετρικό για $\theta = 0.4$, οπότε υπάρχουν τέσσερις άγνωστοι, ψ_1 στο $(\frac{1}{3}, 0.2)$, ψ_2 στο $(\frac{1}{3}, 0.4)$, ψ_3 στο $(\frac{2}{3}, 0.2)$, ψ_4 στο $(\frac{2}{3}, 0.4)$. Οι οριακές τιμές, και οι κυλινδρικές συντεταγμένες της εξίσω-

σης Laplace, δίνουν τις εξής εξισώσεις

$$\begin{aligned} -52\psi_1 + 25\psi_2 + \frac{1}{2}\psi_3 + 1\frac{7}{18} &= 0, \\ 50\psi_1 - 52\psi_2 + 1\frac{1}{2}\psi_4 + &= 0, \\ \frac{3}{4}\psi_1 - 14\frac{1}{2}\psi_3 + 6\frac{1}{4}\psi_4 + 2\frac{1}{72} &= 0, \\ \frac{3}{4}\psi_2 + 12\frac{1}{2}\psi_3 - 14\frac{1}{2}\psi_4 + \frac{5}{8} &= 0 \end{aligned}$$

Η λύση τους είναι

$$\psi_1 = 0.0705, \psi_2 = 0.0756, \psi_3 = 0.2591, \psi_4 = 0.2704.$$

4. Η συνάρτηση u ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace σε κάθε σημείο στο εσωτερικό του κυκλικού τομέα που οριοθετείται από τις ευθείες γραμμές $\theta = 0, \theta = (m+1)\delta\theta$, και τον κύκλο $r = n\delta r$, όπου n, m ακέραιοι. Επίσης, είναι γνωστές τιμές κατά μήκος αυτών των ακτινών καθώς και η παράγωγος $\partial u/\partial r$, στην παράμετρο του κύκλου. Όταν η παράγωγος αυτή αναπαρίσταται από τη φόρμουλα κεντρικών διαφορών $(u_{n+1,j} - u_{n-1,j})/2\delta r$, δείξτε ότι οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών μπορούν να γραφτούν ως

$$\begin{bmatrix} B_1 & (1 + \frac{1}{2})I & & & & & \\ (1 - \frac{1}{4})I & B_2 & (1 + \frac{1}{2})I & & & & \\ & (1 - \frac{1}{6})I & B_3 & I & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & (1 - \frac{1}{2(n-1)})I & B_{n-1} & (1 + \frac{1}{2(n-1)})I & & \\ & & & 2I & B_n & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

όπου

$$u_r = \begin{bmatrix} u_{r,1} \\ u_{r,2} \\ u_{r,3} \\ \vdots \\ u_{r,m} \end{bmatrix},$$

b_1, b_2, \dots , είναι γνωστά διανύσματα στήλες που προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες, I είναι ο μοναδιαίος πίνακας τάξης m , και B_p ο ίδιος τετράγωνος πίνακας τάξης m που δόθηκε σε προηγούμενη άσκηση.

Λύση

Γράψτε τις εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών που προσεγγίζουν την εξίσωση Laplace για $i = 1(1)(n - 1), j = 1(1)m$. Διατηρήστε τα τελευταία μπλοκ των m εξισώσεων εξαλείφοντας την τιμή u_{n+1} μεταξύ της φόρμουλας της παραγώγου και της εξίσωσης διαφορών για $i = n$.

5. Ο χώρος λύσεων για τη δισδιάστατη εξίσωση Laplace $\nabla^2\phi = 0$ είναι η περιοχή που οριοθετείται από την κλειστή καμπύλη C κατά την οποία είναι γνωστές οι τιμές της ϕ . Ανλήστε τη φόρμουλα για το υπόλοιπο στο σημείο του πλέγματος O , όταν η καμπύλη C τέμνει και τις δύο κάθετες γραμμές του πλέγματος μήκους h που διέρχονται από το O .

Ένα ημικυκλικό έλασμα με ακτίνα $2h$, και ομοιόμορφη αγωγιμότητα, διατηρεί τη διάμετρό του σε θερμοκρασία $0^\circ C$ και τη περιφέρειά του σε θερμοκρασία $100^\circ C$. Υπολογίστε τη λύση πεπερασμένων διαφορών στη κατάσταση που η θερμοκρασία είναι σταθερή στα κομβικά σημεία του πλέγματος πλευράς h .

Λύση

$$\theta = \sqrt{3} - 1.$$

$$R_A = \frac{400}{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{3}} + \frac{2\phi_B}{\sqrt{3}} - \frac{4\phi_A}{\sqrt{3} - 1},$$

$$R_B = 2\phi_A + 100 - 4\phi_B \cdot R_A = R_B = 0 \Rightarrow \phi_A = 70.5^\circ, \phi_B = 60.2^\circ.$$

Παρόλο που αυτό το πλέγμα χρησιμοποιείται για να παράξει μια απλά άσκηση, στην πραγματικότητα δίνει σωστά τις θερμοκρασίες με απόκλιση 1° . Η αναλυτική λύση του προβλήματος με τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών, και σε όρους πολικών συντεταγμένων (r, θ) , είναι

$$\phi = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \left(\frac{r}{2h}\right)^{2n-1} \sin(2n-1)\theta,$$

και δίνει $\phi_A = 70.5^\circ, \phi_B = 59^\circ$.

6. Αποδείξτε ότι το σφάλμα αποκοπής της εξίσωσης της πέντε-σημείων φόρμουλας πεπερασμένων διαφορών που προσεγγίζει την εξίσωση Laplace στο σημείο (x_i, y_j) , για ένα τετράγωνο πλέγμα πλευράς h , μπορεί να γραφτεί

$$\frac{1}{12}h^2\left\{\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(\xi, y_j) + \frac{\partial^4}{\partial y^4}u(x_i, \eta)\right\},$$

όπου

$$x_i - h < \xi < x_i + h, \quad y_j - h < \eta < y_j + h$$

και θεωρείται ότι η πρώτη, δεύτερη, τρίτη και τέταρτη μερική παράγωγος του u ως προς το x και y είναι συνεχείς σε αυτά τα διαστήματα αντίστοιχα.

Λύση

$$T = u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} - \left(\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2}\right).$$

Από το ανάπτυγμα Taylor

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + h\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 u_{\xi_1, y_1}}{\partial x^4},$$

όπου

$$x_i < \xi_1 < x_i + h, \quad \text{κτλ}$$

7. Η ελλειπτική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0$$

ικανοποιείται από την συνάρτηση u σε κάθε σημείο στην επιφάνεια S . Αποδείξτε ότι μια μη σταθερή τιμή της u δεν μπορεί να πάρει ένα θετικό μέγιστο ή ένα αρνητικό ελάχιστο στο εσωτερικό της S όταν η f είναι αρνητική. **Λύση** Έστω ότι η u έχει θετικό μέγιστο στο σημείο P στην S . Τότε στο σημείο P θα ισχύει

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq 0$$

Συνεπώς, το αριστερό μέρος της εξίσωσης είναι αρνητικό, πράγμα το οποίο σημαίνει πως η u δεν μπορεί να είναι η λύση. Όμοια αποδεικνύεται και για αρνητικό ελάχιστο.

8. Θεωρείστε τις εξισώσεις (5.5 ;;) για S_1, S_2 και S_3 . Αποδείξτε ότι

$$(α) \nabla^2 u_0 = \frac{4S_1 + S_2 - 20u_0}{6h^2} - \frac{1}{12}h^2 \nabla^4 u_0 - \frac{1}{180}h^4 \left(\frac{1}{2} \nabla^6 u_0 + \mathcal{D}^4 \nabla^2 u_0 \right) + O(h^6)$$

$$(β) \nabla^4 u_0 = \frac{1}{h^4} (S_3 + 2S_2 - 8S_1 + 20u_0) + O(h^2).$$

9. Χρησιμοποιείστε την 8(α) να αποδείξετε ότι όταν η f είναι σταθερή, η εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 u + f = 0,$$

μπορεί να αναπαρασταθεί στο κεντρικό σημείο 'O', από την εννέα-σημειών εξίσωση πεπερασμένων διαφορών

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} u + 6h^2 f = 0$$

και το λάθος αποκοπής είναι της τάξης h^6 .

Χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμα για να λύσετε την άσκηση 1, το πρόβλημα τρέψης για ένα τετράγωνο τμήμα.

Λύση

Σύμφωνα με το συμβολισμό της άσκησης 1 οι εξισώσεις είναι

$$\begin{aligned} \phi_1 + 8\phi_2 - 20\phi_3 + 3 &= 0, \\ 4\phi_1 - 18\phi_2 + 8\phi_3 + 3 &= 0, \\ -20\phi_1 + 16\phi_2 + 4\phi_3 + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Οπότε

$$\phi_1 = 0.590,$$

$$\phi_2 = 0.459,$$

$$\phi_3 = 0.363$$

στον τρισδιάστατο χώρο.

Δεδομένου ότι η αναλυτική λύση για την ϕ_1 είναι 0.589, προκύπτει ότι η φόρμουλα εννέα σημείων δίνει μια πολύ καλή σε ακρίβεια λύση σε αυτή τη περίπτωση.

10. Η συνάρτηση u ικανοποιεί την εξίσωση Laplace σε όλα τα σημεία στο τετράγνο του παρακάτω σχήματος και έχει συνοριακές συνθήκες που απεικονίζονται. Χρησιμοποιείστε την μέθοδο SOR για να υπολογίσετε μια λύση με περιθώριο λάθους ± 2 .
11. Η συνάρτηση u ικανοποιεί την εξίσωση Laplace σε όλα τα σημεία στο τετράγνο του παραπάνω σχήματος και έχει συνοριακές συνθήκες που απεικονίζονται. Χρησιμοποιείστε την μέθοδο SOR για να υπολογίσετε μια λύση με περιθώριο λάθους ± 2 . (Εκμεταλλευτείτε την διαγώνιο συμμετρία και χρησιμοποιείστε μόνο το μισό σχήμα)
12. Η συνάρτηση ροής y για σταθερή αστρόβιλη ροή δυο διαστάσεων, παράλληλη του επιπέδου xOy , ενός ασυμπίεστου ιδεατού υγρού, ικανοποιεί την εξίσωση Laplace σε όλα τα σημεία εσωτερικά του πεδίου της ροής. Υπολογίστε μια αριθμητική λύση με περιθώριο λάθους ± 2 στα κομβικά σημεία τετράγνου πλέγματος πλευράς $\frac{1}{4}$, για τη ροή μέσα από το κανάλι που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Δίνεται ότι η $ABCD$ είναι η $y = 0$, η EFG είναι η $y = 1$ και το y μεταβάλλεται γραμμικά κατά μήκος των AE και GD .
13. Στο σχήμα 5.23 η περιοχή που ορίζουν οι $ABCD$, $EFGH$ αντιπροσωπεύει το ένα τέταρτο της διατομής ενός παχύ σωλήνα, η οποία είναι συμμετρική ως προς τις OA , OD . Η συνάρτηση ϕ είναι 0 έξω από τα όρια, 1 στα όρια και ικανοποιεί την

εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 = 0$$

κάθε εσωτερικό σημείο. Υπολογίστε μια λύση πεπερασμένων διαφορών με περιθώριο λάθους ± 2 , στα κομβικά σημεία ενός τετράγωνου πλέγματος πλευράς $\frac{1}{4}$.

14. Μια συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση Laplace σε κάθε εσωτερικό σημείο ενός τετραγώνου που ορίζεται από τις ευθείες $x \pm 1, y \pm 1$, έχει γνωστές συνοριακές τιμές και είναι συμμετρική ως προς την Ox και Oy . Γράψτε τις πιο απλές εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών που δίνουν μια προσεγγιστική λύση στα κομβικά σημεία τετράγωνου πλέγματος πλευράς $\frac{1}{4}$. Αποδείξτε ότι οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel συγκλίνουν. Επίσης επιβεβαιώστε ότι ο ασυμπτωτικός ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου Gauss-Seidel είναι διπλάσιος της Jacobi.

Λύση.

Έστω a, b, c οι τιμές στα σημεία $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ και $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ αντίστοιχα. Οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών σε αυτά τα σημεία είναι

$$\begin{aligned} a - b &= \text{σταθερά} \\ -\frac{1}{4}a + b - \frac{1}{2}c &= \text{σταθερά} \\ -\frac{1}{2}b + c &= \text{σταθερά} \end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = I - (L + U) = I - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα $L + U$ της μεθόδου Jacobi δίνονται από την λύση της εξίσωσης

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda(\lambda^2 - \frac{1}{2}).$$

Οπότε η φασματική ακτίνα $\rho(J)$ είναι $1/\sqrt{2} < 1$, οπότε υπάρχει σύγκλιση.

Ο επαναληπτικός πίνακας της Gauss-Seidel είναι

$$(I-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του επαναληπτικού πίνακα της Gauss-Seidel δίνονται από την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{4} - \lambda) & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & (\frac{1}{4} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2(\lambda - \frac{1}{2}).$$

Οπότε η φασματική ακτίνα $\rho(G)$ είναι $1/\sqrt{2} < 1$, οπότε υπάρχει σύγκλιση.

Δεδομένου ότι ο ασυμπτωτικός ρυθμός σύγκλισης προκύπτει από το υπόλοιπο του λογαρίθμου της φασματικής ακτίνας, βγαίνει το αποτέλεσμα.