ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ * 24.06.2015

Να απαντήσετε σε 2 θέματα από την Ομάδα Α΄ <u>και</u> σε 1 από την Ομάδα Β΄.

ΟΜΑΔΑ Α΄

Α1 (α) Να λυθεί η δ.ε. $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(β) Να αποδειχθεί ότι η λύση του π.α.τ.

$$y' = f(y) \;;\; y(0) = 0,$$

όπου $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τοπικά Lipschitz, περιττή συνάρτηση, είναι ταυτοτικά μηδενική.

Α2 (α) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα α, β, έτσι, ώστε η λύση του π.α.τ.

$$y'' - y' - 2y = 4e^{-t} \;;\; y(0) = \alpha,\; y'(0) = \beta$$

να είναι φραγμένη στο $[0, \infty)$.

(β) Να λυθεί η δ.ε. $y'' + \frac{t}{t+1}y' - \frac{1}{t+1}y = 0$, $t > 0$, με δεδομένο ότι η $\phi_1(t) = t$, $t > 0$ είναι λύση της.

Α3 (α) Να δειχθεί ότι για δυο οποιεσδήποτε λύσεις $\psi_1(t), \psi_2(t)$ της δ.ε. $y'' + \alpha y' + \beta y = f(t)$, όπου α, β θετικές σταθερές και f συνεχής συνάρτηση, ισχύει ότι

$$\lim_{t \to \infty} \left(\psi_1(t) - \psi_2(t) \right) = 0.$$

(β) Να λυθεί το π.α.τ. $y' = -3y^{4/3}\sin t \;;\; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8$.

ΟΜΑΔΑ Β΄

Β1 (α) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{17 - 8\cos\theta}$.

(β) Αν οι συναρτήσεις f και $\overline{f}$ είναι αναλυτικές σ' έναν τόπο Ω του $\mathbb{C}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή στον Ω.

Β2 (α) Να ορισθεί η σταθερά $\beta \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε η συνάρτηση $u(x,y) = x^3 + \beta x y^2$ να είναι αρμονική στον $\mathbb{R}^2$ και να βρεθεί η συζυγής αρμονική συνάρτηση $v(x,y)$ της $u(x,y)$.

(β) Έστω C απλή, κλειστή καμπύλη και D το χωρίο του $\mathbb{C}$ που περιβάλλει η C. Να αποδειχθεί, πλήρως, ότι

$$\frac{\overline{i}}{2\pi} \int_C \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} 1, & z_0 \in D, \\ 0, & z_0 \notin D. \end{cases}$$