4º ΜΑΘΗΜΑ
17-10-14

$ty' + 2y = 4t^2$
$y(1) = 2$

$y' + \frac{2}{t} y = 4t$

$y(1) = 2$

σε ένα από τα δύο

$p(t) = \frac{2}{t}$ (ασυνέχεια στο 0) $\rightsquigarrow (-\infty, 0)$ ή $(0, +\infty)$
$g(t) = 4t$
$t_0 = 1$ όμως $t_0 = 1$ Άρα παίρνουμε το $(0, +\infty) \to$
$y_0 = 2$ → (πεδίο ορισμού του Π.Α.Τ.)

$y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$, $t > 0$ (λόγω όριο το 1)

η $\varphi(t) = t^2 + \frac{1}{t}$, $t > 0$ είναι λύση της συνάρτησης

αλλά την απορρίπτουμε από την Α.Σ.

Ίδιο πρόβλημα
με $y(1) = 1 \rightsquigarrow y(t) = t^2$, $t > 0$
Άσκηση για το σπίτι
$y' = (\cos t)(y-1) \rightsquigarrow y(t) = ce^{\sin t} + 1 \Big\}$ $y(t) = 1$
$y(0) = 1$ $c = 0$

2ος Τρόπος παρατηρώ ότι για $y = 1$ είναι λύση.
Όμως η λύση είναι μοναδική. Άρα η μοναδική λύση
είναι η $y(t) = 1$

$y' - 2ty = 1$ $\quad y(t) = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds - \frac{1}{2} e^{t^2}$
$y(0) = -\frac{1}{2}$

Δεν μπορώ να υπολογίσω το ολοκλήρωμα

/* $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-s^2} ds$ είναι συνάρτηση σφάλματος
$\quad \parallel$
erf(t)

Άρα $e^{t^2} y(t) = e^{t^2} \{ erf(t) - \frac{1}{2} \}$

ΔΕΝ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΝΑ ΤΟ ΘΥΜΟΜΑΣΤΕ
*/

$y' = |y-1| + 1$
$y(0) = 1$

$y' = \begin{cases} y & , y \geq 1 \\ 2-y & , y \leq 1 \end{cases}$

$y(0) = 1$

Έστω φ είναι μια λύση
$\varphi' = |\varphi - 1| + 1 \geq 1$ φ είναι γν. αύξουσα
$\left. \begin{array}{l} t > 0 \Rightarrow \varphi(t) > 1 \\ t < 0 \Rightarrow \varphi(t) < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow t \geq 0 : \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad y(t) = e^t$

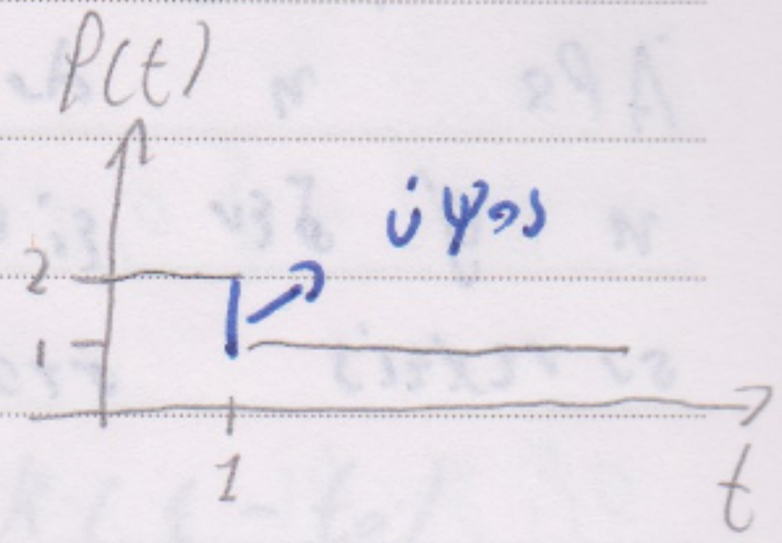
Πρέπει πάντα να βλέπουμε τι γίνεται ως προς t

$t \leq 0 : \begin{cases} y' = 2 - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad y(t) = 2 - e^{-t}$

$$y(t) = \begin{cases} e^{t} & , t \geq 0 \\ 2 - e^{-t} & , t \leq 0 \end{cases}$$

Το πρόβλημα δεν έχει κλασσική λύση. Αλλά έχει ασθενής λύση. (Δεν είναι καλώς τοποθετημένο)

$$y' + p(t)\, y = 0 \qquad p(t) = \begin{cases} 2 & , 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & , t > 1 \end{cases}$$
$$y(0) = 1$$



p(t) κατά τμήματα συνεχής
πεπερασμένα σημεία ασυνέχειας
 -//- ύψη (άλματα) ασυνέχειας

$y' + 2y = 0 \quad , \quad 0 \leq t < 1$
$y' + y = 0 \quad , \quad t > 1$

$y' + 2y = 0 \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$
$y(0) = 1$

$y_1(t) = e^{-2t} \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$

$y' + y = 0 \quad , \quad t > 1$
Δεν έχω Α.Σ
$y_2(t) = c_2 e^{-t} \quad , \quad t > 1$

Θα πάρουμε τις $y_1(1) = y_2(1)$ για να έχουμε συνεχής λύση
Άρα

$y_2(1) = y_2(1) \Rightarrow$
$e^{-2} = c\, e^{-1} \Rightarrow$

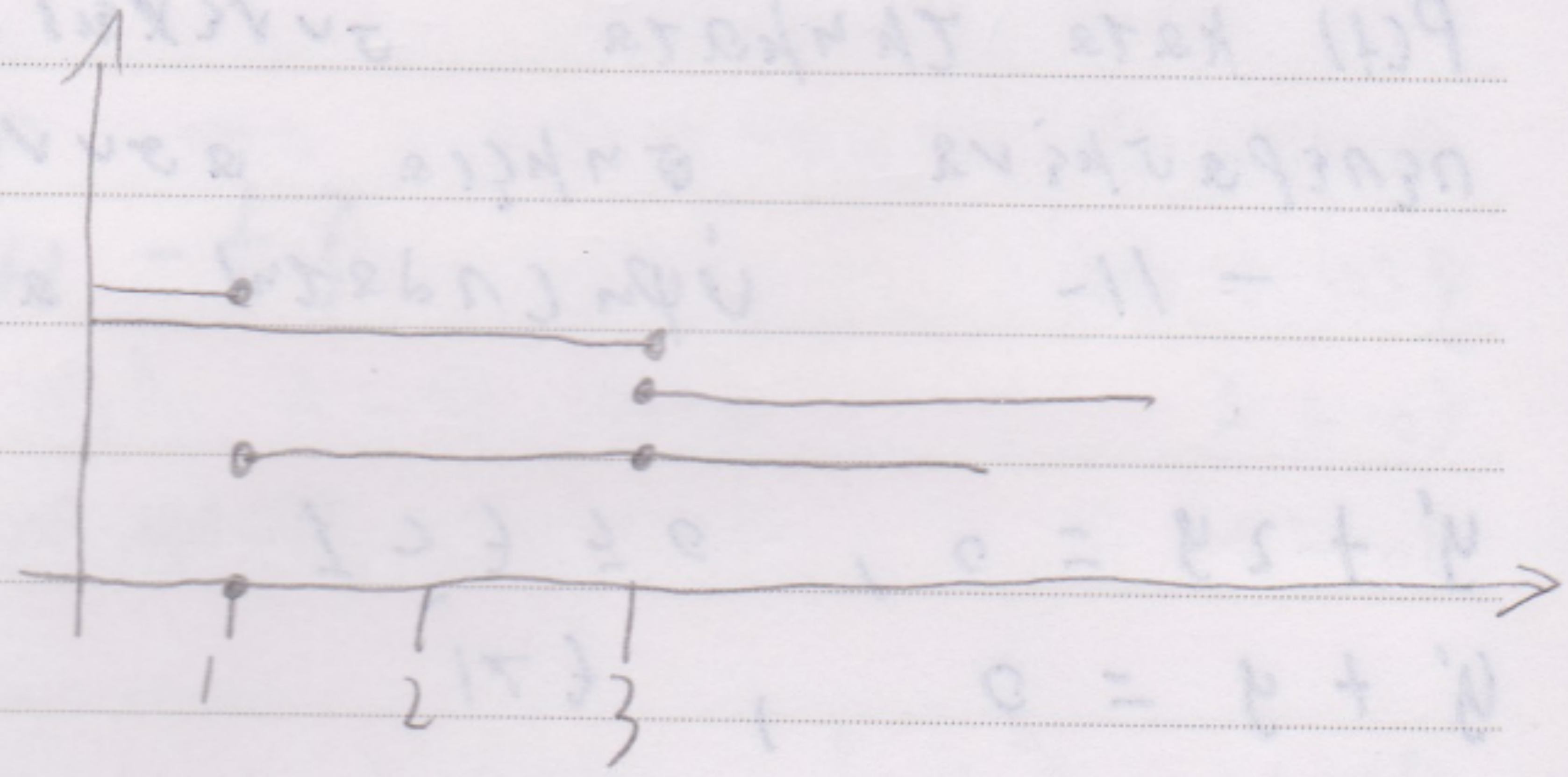
$c = e^{-1} \Rightarrow y_2(t) = e^{-(1+t)}$

$$y(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & 0 \le t \le 1 \\ e^{-(1+t)}, & t \ge 1 \end{cases}$$

$y_1'(1) \neq y_2'(1)$

Άρα η λύση y που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ $(0, +\infty)$
η y' δεν είναι συνεχής στο $t=1$ άρα δεν είναι
συνεχής στο $(0, +\infty)$

$$p(t) = \begin{cases} \alpha, & 0 \le t \le 1 \\ \beta, & t > 1 \end{cases}$$



$$g(t) = \begin{cases} \gamma, & 0 \le t < 3 \\ \delta, & t > 3 \end{cases}$$

Εφαρμογές δ.ε. 1ης τάξης
ραδιοχρονολόγηση (άνθρακας 14)

$y(t)$; η ποσότητα του ^{14}C στην χρονική τιμή t

$y'(t) = -k\,y(t)$, $k > 0$ σταθ.
$y(t_0) = y_0$

$$y(t) = y_0 e^{-k(t - t_0)}$$

T_κ = διάρκεια ημιζωής = 5730 χρόνια
↓
$k = 0{,}000121 \ (\text{χρόνια})^{-1}$

Πληθυσμιακά μοντέλα

Νόμος ψύξης Νεύτωνα

A σταθερή θερμοκρασία περιβάλλοντος

$\theta(t)$ θερμοκρασία αντικειμένου

$k > 0$: σταθ.

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - A)$$

$$\theta(t_0) = \theta_0$$

$$\theta' + k\theta = kA \qquad \theta(t) = A + (\theta_0 - A)e^{-k(t-t_0)}$$

$$\theta(t_0) = \theta_0 \qquad \lim_{t \to \infty} \theta(t) = A$$

Άσκηση

$P(t)$: τιμή προϊόντος

Q_S : προσφορά

Q_D : ζήτηση

αυξάνεται η τιμή → αυξάνεται η προσφορά, μειώνεται η ζήτηση

ο ρυθμός μεταβολής είναι θετικός όταν η ζήτηση ξεπερνά την προσφορά.

$$Q_D = A - BP \qquad A, B, C, D > 0 \text{ σταθ.}$$

$$Q_S = C + DP$$

$$\frac{dP}{dt} = E(Q_D - Q_S) \qquad E \text{ σταθ.}$$

$$P(0) = P_0$$

ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

$y' + a y = b(t) y^{\sigma}$, $y \geq 0$, $y \leq 0$ (διατηρεί πρόσημο)

(a, b : συνεχείς , $\sigma \in R$ σταθ.

· $\sigma = 0$ $y' + a(t) y = b(t)$ γραμμ. μη ομογενής

· $\sigma = 1$ $y' + (a(t) + b(t)) y = 0$ γραμμ. ομογενής

· $\sigma \in R - \{0, 1\}$ → μετασχηματίζεται σε γραμμική.

ορίζουμε σαν $u = y^{1-\sigma}$

$u' + (1-\sigma) a(t) u = (1-\sigma) b(t)$

Πολλαπλασιάζω την αρχική δ.ε. $(1-\sigma) y^{-\sigma}$

$(1-\sigma) y^{-\sigma} y' + (1-\sigma) a(t) y^{1-\sigma} = (1-\sigma) b(t)$ ①

$u = y^{1-\sigma}$

$u' = (1-\sigma) y^{-\sigma} y'$ ②

①, ② ⇒ $u' + (1-\sigma) a(t) u = (1-\sigma) b(t)$

$t y' + 6 y = 3 t y^{4/3}$, $t \neq 0$

$y' + \frac{6}{t} y = 3 y^{4/3}$, $t \neq 0$

$u = (1 - \frac{4}{3}) y \quad y^{(1-4/3)} = y^{-1/3} \Rightarrow y = u^{-3}$

$u' - \frac{2}{t} = -1$, $t \neq 0$

$u(t) = t + c t^2$

$y(t) = (t + c t^2)^{-3}$, $t \neq 0$

Αν έχω αρχική συνθήκη στη Bernoulli

Riccati

$$y' = a(t)y^2 + \beta(t)y + \gamma(t)$$

$\tilde{y}(t)$: ειδική λύση

Τότε $y(t) = \tilde{y}(t) + \dfrac{1}{x(t)}$, $x(t) \neq 0$

Η $x(t)$ λύνει την εξής δ.ε

$$x' + (2a(t)\tilde{y}(t) + \beta(t))x + a(t) = 0$$

Ασκήσεις για το σπίτι

1) $y' = y^2 - (2t+1)y + (1+t+t^2)$, $t \in R$

$y(t) = t$, $t \in R$ είναι λύση (Riccati)

2) $y' + ay = \sin \beta t$, $a > 0$, $\beta \neq 0$: σταθ.

$\lim_{t \to +\infty} y(t)$;

3) $y' = ay - \beta y^2$, $a, \beta > 0$

$y(0) = \gamma$, $\gamma > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{\beta} & , \gamma > 0 \\ 0 & , \gamma = 0 \end{cases}$$

4) Να βρεθούν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y = y(t)$ έτσι ώστε

$$\int_a^t \tau y(\tau)\, d\tau = t^2 + y(t) \qquad \text{(μια)}$$

5) Ν.δ.ο. $\exists$ 2 τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η $y(t) = \lambda - t^2$ είναι λύση της δ.ε.

$$y' = (t^2 + y + 1)(t^2 + y - 3/2) + 1 - 2t$$

Να λυθούν οι δ.ε.
Είναι οι 2 λύσεις ισοδύναμες
(μέσω bernoulli - με riccati)