2ο ΜΑΘΗΜΑ
10-10-14

Αν $y = y(t)$ $\quad (y : I \to \mathbb{R})$ Το I είναι διάστημα

Π.Α.Τ. 1

Δ.Ε. πρώτης τάξης

$y' = f(t, y)$

Αρχική συνθήκη $y(t_0) = y_0$, $t \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$

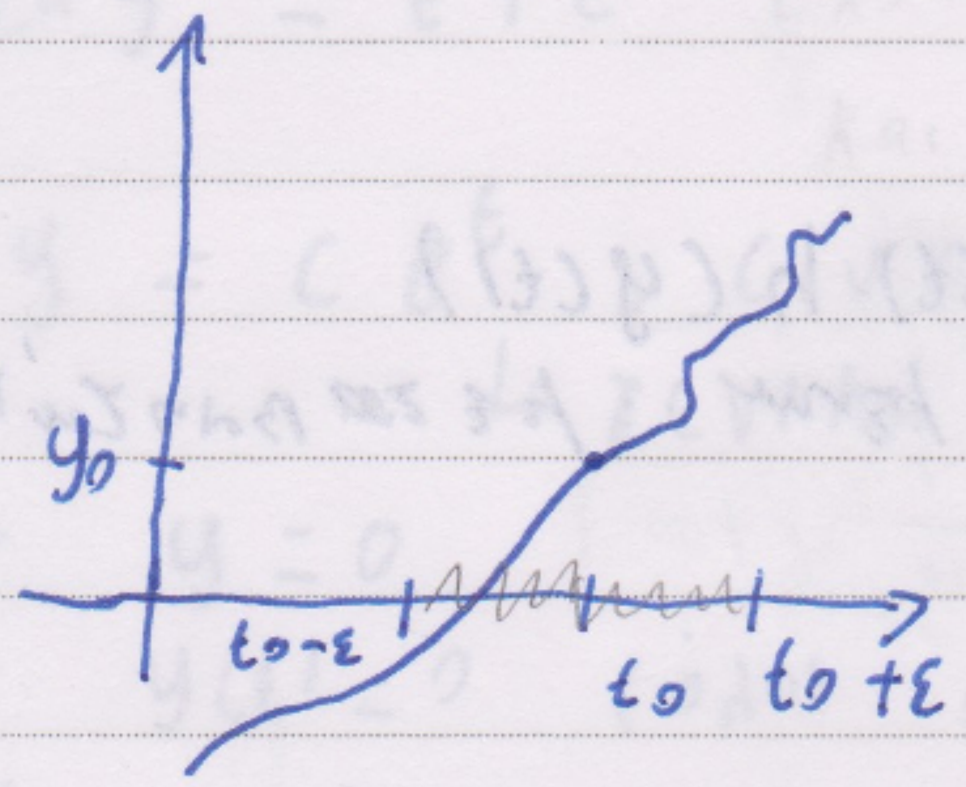
{Η ύλη στο τέλος θα είναι οι σημειώσεις.
Αποδείξεις θεωρ. από το βιβλίο δεν θα είναι στην ύλη.}

3 αρχικά δεδομένα
t_0, y_0, και η f

Ερωτήματα καλώς τοποθέτησης — Θεώρημα Peano

1) ∃ λύσης — Αποδεικνύεται αν $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$

2) Το Π.Α.Τ έχει ΤΟΠΙΚΑ λύση (αν είναι συνεχής σε ένα διάστημα ισχύει για το διάστημα)



Το τοπικά σημαίνει ότι ∃ λύση στο $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$, μπορεί να ∃ λύση και στο $(-\infty, t_0-\varepsilon)$ ή στο $(t_0+\varepsilon, +\infty)$ αλλά δεν το ξέρουμε

2) μοναδικότητα λύσης — Θεώρημα Picard-Lindelöf

Αν f συνεχής & $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le K$ σταθερά $\Rightarrow$ Το Π.Α.Τ έχει (τοπικά) μοναδική λύση

3) Συνεχής εξάρτηση - Ναι

Άρα το πρόβλημα είναι καλώς τοποθετημένο

/* Το Π.Α.Τ I μαζί με την f να είναι συνεχής $\Longleftrightarrow$

$$y(t) = y_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds}$$

ολοκληρωτική συνάρτηση.

Δεν θα κάνουμε ολοκλ. συναρτήσεις.

$$y' = f(t,y) \Rightarrow y(t) = c + \int^{t} f(s, y(s))\,ds$$

*/

Από εδώ και πέρα η f είναι συνεχής εκτός αν ρητά μας πουν ότι δεν είναι

~~Άσκηση~~ 1η ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

$$y' = f(t) \Rightarrow y(t) = \int f(t)\,dt + c$$

2η ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

$$f(t,y) = g(t)\,h(y) \rightsquigarrow y'(t) = g(t)\,h(y(t))$$

Εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών

$$y' = g(t)\,h(y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t)\,h(y) \quad \text{αν η } h(y) \neq 0$$

$$\frac{dy}{h(y)} = g(t)\,dt \quad \left(\begin{array}{l} \text{Γενικά το } \frac{dy}{dt} \text{ δεν ισχύει} \\ \text{για αυτήν την περίπτωση} \\ \text{αποδεικνύεται ότι ισχύει} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)\,dt + c$$

⇒ για κάποιο y

Αν $h(y)=0$ τότε $h(y^*)=0$

$h(y(t))=0$

Άρα $\frac{dy^*}{dt} = 0 \Rightarrow y^*(t) = c^*$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) $y' = y$ (χωριζόμενων μεταβλητών)

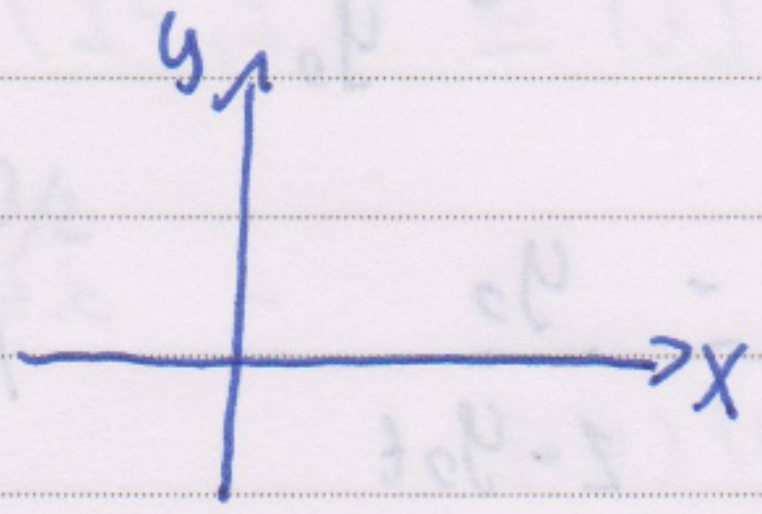
Έστω $y(t) \neq 0$

$\frac{dy}{y} = dt \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dt \Leftrightarrow$

$\ln y = t + \tilde{c}$ (κανονικά πρέπει να πάρουμε $|\ln y|$ και να πάρουμε περιπτώσεις)

$y = c e^t$, c σταθερά, $t \in R$

↳ γενική λύση



Αν $y=0$

$y(t)=0$ (όλος ο άξονας t't)

είναι λύση η οποία ενσωματώνεται στην παραπάνω για $c=0$

2) $y' = y^2$

· Αν $y \neq 0$

$\frac{dy}{y^2} = dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{y} = t + c \Rightarrow$

$y(t) = -\frac{1}{t+c}$, $t \in \mathbb{R} - \{-c\}$

• $y=0$: λύση $y(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$

↳ ιδιάζουσα λύση

Άρα οι λύσεις είναι η γενική και η ιδιάζουσα λύση

{ΠΡΟΣΟΧΗ πρέπει πάντα να γράφουμε και το πεδίο ορισμού τους (και στις λύσεις)}

Έστω ότι στη 2 μας δίνεται η αρχική συνθήκη: $y(0) = y_0$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= -\frac{1}{c} \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = -\frac{1}{y_0} \quad : y_0 \neq 0$$

Αν $y_0 = 0$: $y(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$

$$y(t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{y_0}}$$

π.ο. συνάρτησης

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t} , \quad t \in \left(-\infty, \frac{1}{y_0}\right) \cup \left(\frac{1}{y_0}, +\infty\right)$$

Π.Α.Τ.

Για $y_0 > 0$ τότε η λύση του προβλήματος είναι

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t} , \quad t \in \left(-\infty, \frac{1}{y_0}\right)$$

Η λύση* είναι πάντα διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων

$y_0 < 0$: $y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t}$, $t \in \left(\frac{1}{y_0}, +\infty\right)$

* του Π.Α.Τ.

Για το σπίτι με α

③ $y' = y^{1/3}$ (τα ίδια ισχύουν για y^{α} όπου $\alpha \in (0,1)$)
$y(0) = 0$

$$\frac{dy}{y^{1/3}} = dt$$

• Για $y = 0$: $y(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$ είναι λύση του Π.Α.Τ.

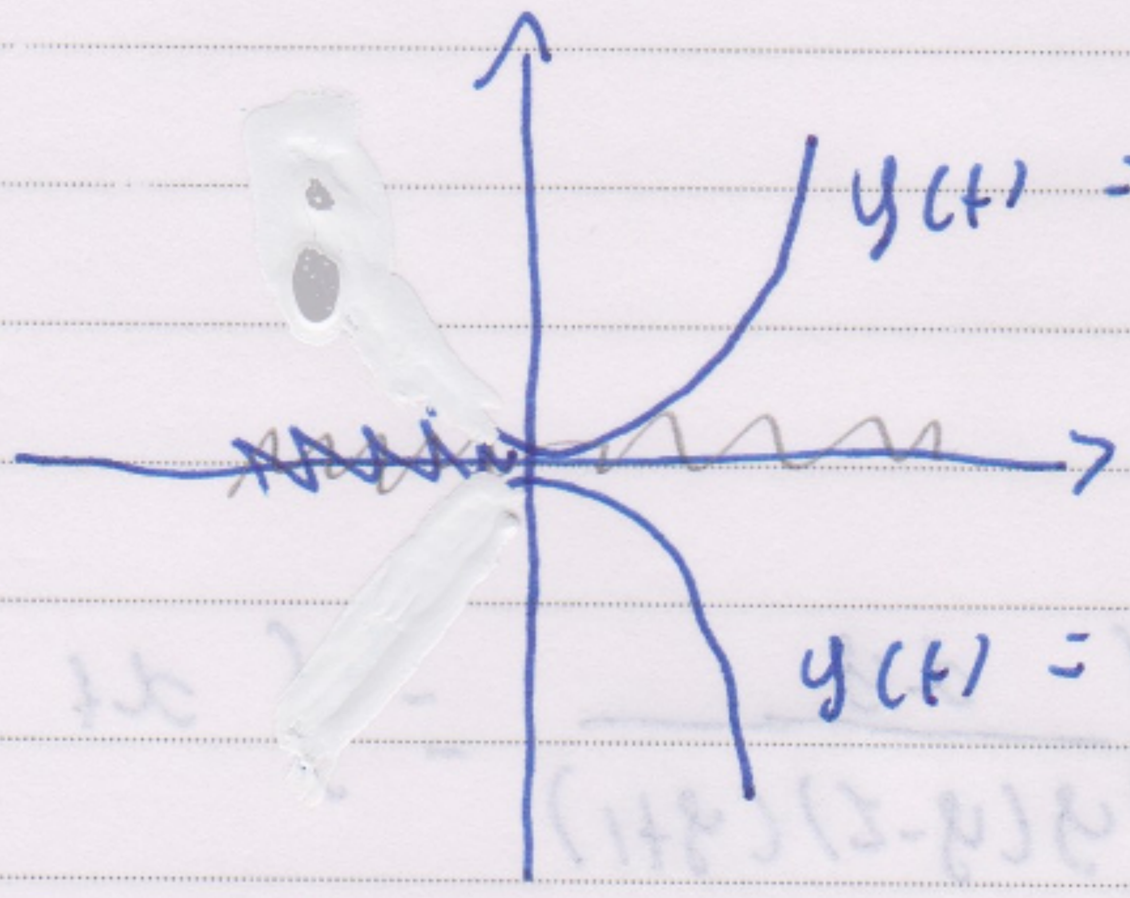
• Για $y \neq 0$ $\displaystyle\int \frac{dy}{y^{1/3}} = \int dt \Longrightarrow y(t) = \pm\left(\frac{2}{3}(t+c)\right)^{3/2}$

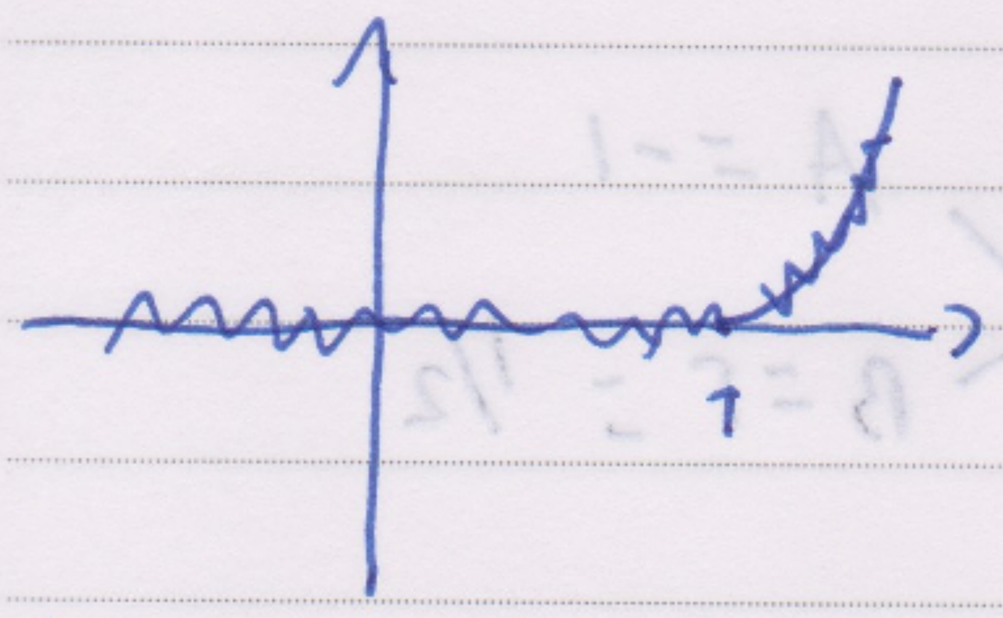
όμως $y(0) = 0$

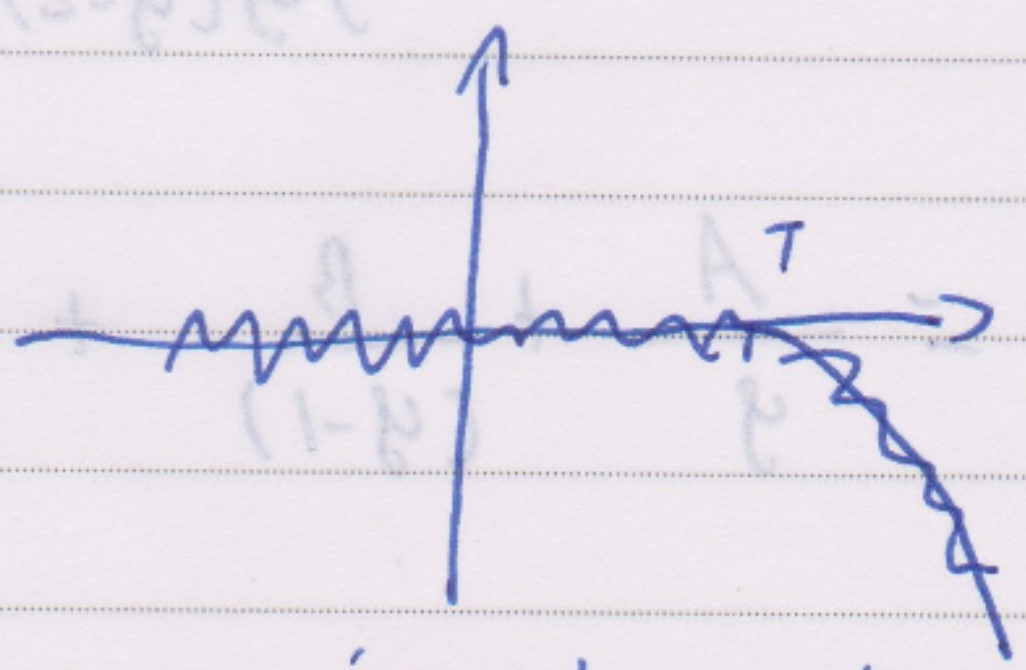
$$y(0) = \pm\left(\frac{2}{3}c\right)^{3/2} \Longrightarrow c = 0$$

$y(t) = \pm\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$, $t \geq 0$ (Οι λύσεις ικανοποιούν την αρχική συνθήκη)

Άρα έχουμε 3 λύσεις $(+,-,0)$







Άπειρες λύσεις μπορούμε να πάρουμε και άλλα $T', T'', \dots$

Άσκηση για το σπίτι

i) $y' = \frac{t\,y(4-y)}{1+t}$ Αποτέλεσμα $y(t) = \frac{4ce^{4t}}{ce^{4t}-(t+1)^4}$

$y \neq 0$, $y \neq 4$

$y=0$

$y=4$

ii) $y' = \frac{3t^2+4t+2}{2(y-1)}$

Αρχική συνθήκη $y(0) = -1$

—

4) $y' = y(y^2-1)$

$y(0) = \frac{1}{2}$

- $y=0$
- $y=1$
- $y=-1$

} Δεν είναι λύσεις γιατί καμία δεν είναι 1/2 (Αρχική συνθήκη)

Αν $y(t) \neq 0, 1, -1$

$$\frac{dy}{y(y-1)(y+1)} = dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y(y-1)(y+1)} = \int dt$$

{

$$\frac{1}{y(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{(y-1)} + \frac{\Gamma}{y+1} \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = \Gamma = 1/2 \end{cases}$$

}

Θα καταλήξουμε στο $ce^{2t} = \frac{y^2-1}{y^2} \Rightarrow$

$y^2 = \frac{1}{1-ce^{2t}} \Rightarrow y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{1-ce^{2t}}}$ Λυση χωρις την Αρχικη ~~Τιμή~~ Συνθηκη

Η Α.Σ είναι θετική οπότε $y(t) = +\frac{1}{\sqrt{1-ce^{2t}}}$

$y(0) = 1/2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-c}} \Rightarrow c = -3$

Άρα $y(t) = \frac{1}{\sqrt{1+3e^{2t}}}$, $t \in R$

Ασκηση για το σπίτι (γραμμική ομογενής)

iii) $y' = a(t)y$, $a(t)$ συνεχης

$y(t_0) = y_0$

Οι Ασκήσεις για το σπίτι είναι για δικιά μας εξάσκηση δεν θα μετρήσουν κάπου.