Τοπικά, Ολικά Ακρότατα (Σχήματα: 04) Υλικό Μαθήματος, Ηλ. Τάξη

$f : U (\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in U$

i) Το $\vec{x}_0$ <u>τοπ. ελάχιστο</u> της $f \iff \exists\, \delta > 0 : f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})$, $\vec{x} \in U$ με $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$

ii) Το $\vec{x}_0$ <u>τοπ. μέγιστο</u> της $f \iff \exists\, \delta > 0 : f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})$, $\vec{x} \in U$ με $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$

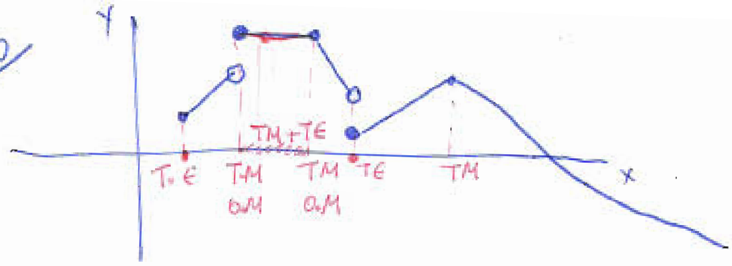
Εάν το $\vec{x}_0$ είναι τοπ. ελάχιστο ή μέγιστο της f, το $\vec{x}_0$ καλείται <u>τοπ. ακρότατο</u>.

i') Το $\vec{x}_0$ <u>ολικό ελάχιστο</u> της f στο $U \iff f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in U$

ii') Το $\vec{x}_0$ <u>ολικό μέγιστο</u> της f στο $U \iff f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in U$

Εάν το $\vec{x}_0$ είναι ολ. ελάχιστο ή μέγιστο της f στο U, το $\vec{x}_0$ καλείται <u>ολ. ακρότατο</u>.

19ο



Σχόλιο: Για τυχαίες συναρτήσεις με τυχαίο Π.Ο. η εύρεση των τοπ. ακροτάτων είναι σχεδόν αδύνατη.
Για $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, f = συνεχή γνωρίζουμε ότι υπάρχει η μέγιστη και η ελ. τιμή της f, αλλά δεν μπορούμε να την εντοπίσουμε εύκολα. Συνήθως δουλεύουμε στο (α,β) και μετά βάζουμε και τις τιμές $f(\alpha)$, $f(\beta)$.

$f: U(\subseteq\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}$, U = ανοικτό

$f: C^2$

Αρχή του Fermat (Για διαφορίσιμες Συναρτήσεις)

- $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. $(-\infty\le a<b\le+\infty)$

x_0 τοπ. ακρότ. $\Rightarrow f'(x_0)=0$

$\not\Leftarrow$ (πχ. $f(x)=x^3, x^5,\dots$, $f'(0)=0$, το $x_0=0$ δεν είναι ακρότατο)

Απόδ: x_0: τοπ. ελάχ.

$\exists\,\delta>0: f(x_0)\le f(x)$, $x\in U$, $|x-x_0|<\delta$

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \\ f'_-(x_0)=\ \le 0 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(x_0)=0$$

(Για να έχει έννοια η f'_+, f'_- στο x_0, πρέπει το x_0 να ανήκει σε ανοικτό διάστημα)

- $f: U(\subseteq\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη, U = ανοικτό

$\vec{x}_0$: τοπ. ακρότατο $\Rightarrow \nabla f(\vec{x}_0)=\vec{0}$

$\not\Leftarrow$

Απόδ

$\vec{r}(t)=\vec{x}_0+t\vec{e}_1$, $g(t)=f\circ\vec{r}(t)=f(\vec{x}_0+t\vec{e}_1)$

$t=0$ τοπ. ελάχιστο $\Rightarrow g'(0)=0$

$$0=g'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{x}_0+t\vec{e}_1)-f(\vec{x}_0)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)$$

Ανάλογα $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)=0$. / Τελικά $\nabla f(\vec{x}_0)=(0,0)$

$\vec{x}_0 \in U$ με $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$, το $\vec{x}_0$ καλείται κρίσιμο σημείο

Κρίσιμα σημεία

Σημεία Ακροτάτων

($f: U \to \mathbb{R}$, U=ανοικτό)

Εάν $f'(x_0)=0 \not\Rightarrow$ τοπ. ακρ.

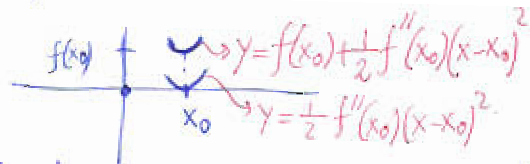
π.χ. $x^3, x^5, x^7, \dots$

$\boxed{f:(a,\beta) \to \mathbb{R} \quad C^2}$

x_0: κρίσιμο σημείο $f'(x_0)=0$.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi_x)(x-x_0)^2$$

όπου ξ_x μεταξύ των x_0, x



- $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi_x)(x-x_0)^2$

Έστω $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ για $|x-x_0| < \delta$, άρα: $f(x) > f(x_0)$ για $|x-x_0| < \delta$

δηλ. το $\vec{x}_0$ είναι τοπ. ελάχιστο

- $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) + \frac{1}{2}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\xi_1,\xi_2)$

(ξ_1,ξ_2) μεταξύ των (x_0,y_0) κ (x,y).

(x_0,y_0) κρίσιμο, $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$

$$D_2 f(x_0,y_0)(x,y) = (x-x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + (y-y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) =$$

$$= (x-x_0, y-y_0) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$H(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Hessian πίνακας της f στο (x_0,y_0).

Εάν η f είναι μιας μεταβλητής $H_{x_0} = f''(x_0)$ και ορίζεται το $+,-,0$. Για πίνακες;;