32 ~25

Μάθημα [redacted]. (23/5/11)

Το Θεώρημα Stokes.

Προαπαιτούμενα:

(A) Στροβιλισμός διαν. πεδίου του $\mathbb{R}^3$.

(B) Προσανατολισμός συνόρου κανονικής επιφάνειας.

(i) Η περίπτωση του $\mathbb{R}^2$

(ii) Γενίκευση στον $\mathbb{R}^3$.

(A) Στροβιλισμός Διαν. Πεδίου

Ορισμός

Έστω $\vec{F} = (P, Q, R)$ ένα C^1 διαν. πεδίο του $\mathbb{R}^3$ (δηλαδή οι συναρτήσεις $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ έχουν συνεχείς παραγώγους). Ο στροβιλισμός του $\vec{F}$ είναι το διανυσματικό πεδίο

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Ειδικά εάν $\vec{F} = (P, Q, 0)$ είναι

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k}$$

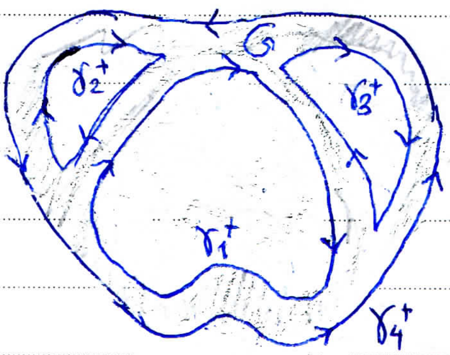
(B) Προσανατολισμός (γεωμετρικού) συνόρου κανονικής επιφάνειας.

(i) Η περίπτωση του $\mathbb{R}^2$

Ορισμός. Έστω γ απλή, κλειστή, ομαλή C^1 καμπύλη του επιπέδου. Η θετική φορά διαγραφής της γ, ορίζεται να είναι η φορά διαγραφής αντίθετα των δεικτών του ρολογιού. Συμβολίζουμε γ^+ τη γ με τη θετική φορά διαγραφής.

Παρατήρηση. Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε η καμπύλη $\gamma = \partial G$ να είναι απλή, κλειστή, ομαλή και C^1. Η θετική φορά διαγραφής επί της γ, είναι εκείνη κατά την οποία, το G παραμένει στο αριστερό μας χέρι καθώς διατρέχουμε την γ.

Παράδειγμα. Ένα επίπεδο ψωμάκι Pretzel.



$$\partial G^+ = \gamma_1^+ \cup \gamma_2^+ \cup \gamma_3^+ \cup \gamma_4^+$$

Εδώ το ∂G αποτελείται από τέσσερις καμπύλες

Σχόλιο. Έστω γ καμπύλη του επιπέδου ό[...]

προηγουμένως. Το ότι η γ περικλείει ένα αν[...]
σύνολο G είναι εποπτικά προφανές. Μια απ[...]
δειξη αυτού του γεγονότος αποτελεί ένα
περιβόητα δύσκολο εγχείρημα (Θεώρημα Jorda[...]

(ii) Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$

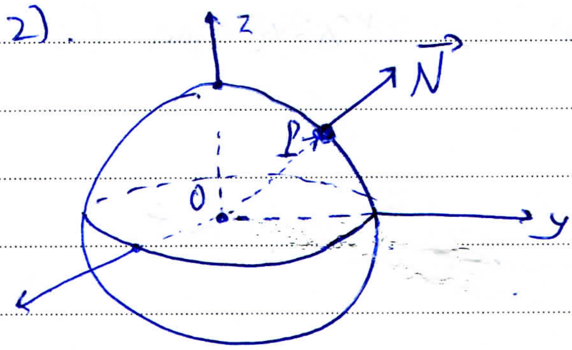
Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^3$ κανονική επιφάνεια. Σε κάθε
σημείο της S, ορίζεται μοναδιαίο κάθετο
(εάν $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$ τότε $\vec{N} = \frac{1}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}\vec{r}_u \times \vec{r}$[...]

Έστω $\gamma = \partial S$ η κανονική καμπύλη που απ[...]
τελεί το σύνορο της S. (Προσοχή: είναι σύνορο επιφάνειας[...]

Ορισμός. Η θετική φορά διαγραφής στ[...]
της γ, είναι η φορά διαγραφής κατά τη[...]
οποία, ως προς το κάθετο διανυσματικό
πεδίο $\vec{N}$, διατρέχουμε την γ αντίθετα των
δεικτών του ρολογιού. Συμβολίζουμε με γ^+
την γ εφοδιασμένη με τη θετική φορά
διαγραφής.

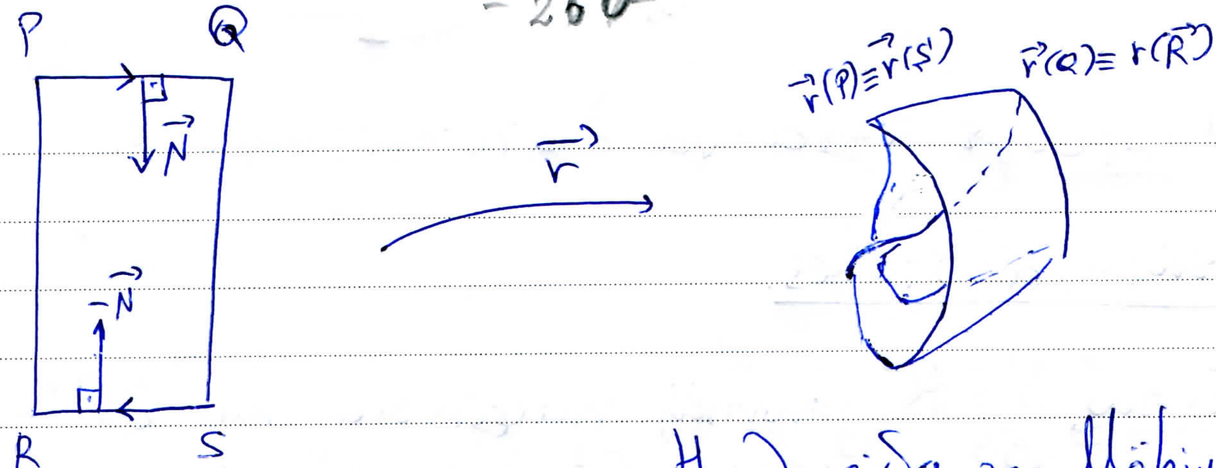
Σχόλιο 1. Η ύπαρξη σαφώς ορισμένου
κάθετου διανυσματικού πεδίου $\vec{N}$ για την S[...]

έπεται από την υπόθεσή μας ότι η S είναι κλειστή, και επομένως το $\vec{N}$ θα έχει φορά "εκτός" της S. Για παράδειγμα, η σφαίρα $S=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=1\}$ έχει μοναδ κάθετο στο σημείο της $P(x,y,z)$ το διάνυσμα $\vec{N}=(x,y,z)$.



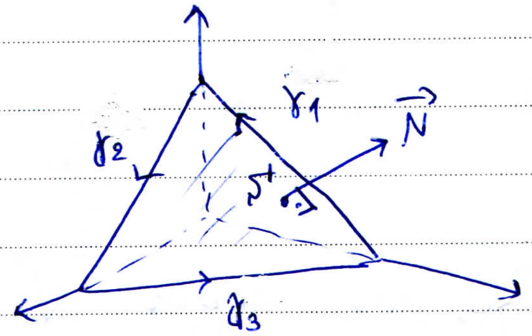
Οι επιφάνειες για τις οποίες υπάρχει σαφώς ορισμένο κάθετο διανυσμ. πεδίο, καλούνται προσανατολίσιμες. (Το Θεώρημα Stokes ισχύει κ για προσανατολίσιμες επιφάνειες.)

Σχόλιο 2. Υπάρχουν επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ που δεν είναι προσανατολίσιμες. Η πλέον διάσημη είναι η διαβόητη "λωρίδα του Möbius": Θεωρούμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ύφασμα $PQRS$ και το διπλώνουμε ώστε το τμήμα PQ να συμπέσει με το τμήμα SR. Η επιφάνεια που προκύπτει δεν είναι προσανατολίσιμη, καθ επιλέγοντας κάθετο $\vec{N}$ επί του PQ και μεταφέροντάς το προς το SR, το $\vec{N}$ θα αποκτήσει την αντίθετη φορά.



Η λωρίδα του Möbius.

<u>Παράδειγμα</u>. Έστω $S' = \{(x,y,z) : x+y+z=1,\ 0 \le x,y \le 1\}$. Επιφάνεια επιπέδου.



$$\partial S^+ = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \quad \text{όπου}$$

$\gamma_1 : \vec{r_1}(t) = (0, -t, 1+t), \quad -1 \le t \le 0$

$\gamma_2 : \vec{r_2}(t) = (t, 0, 1-t), \quad 0 \le t \le 1$

$\gamma_3 : \vec{r_3}(t) = (2-t, t-1, 0), \quad 1 \le t \le 2$

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το

Θεώρημα Stokes.

Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^3$ κανονική επιφάνεια και $\partial S = \gamma$. Εάν $\vec{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι C^1 διαν. πεδίο, τότε

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

όπου $\vec{N}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην S.

Παρατηρήσεις.

(1) Εάν $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $\vec{F}=(P,Q,0)$ τότε $\vec{N}=\vec{k}=(0,0,1)$ και ανακτούμε το Θεώρημα Green (εφ. μορφή)

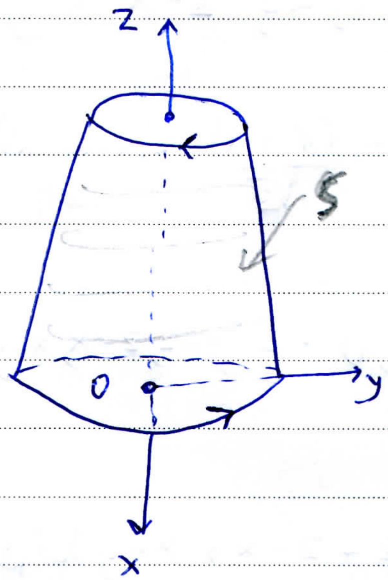
$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{k} = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_\gamma P\,dx+Q\,dy$$

(2) Το Θεώρημα μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη ροή του διαν. πεδίου $\mathrm{rot}\vec{F}$ μέσω της S γνωρίζοντας τις τιμές του $\vec{F}$ μόνο στο ∂S.

(3) Εάν οι επιφάνειες S_1 και S_2 έχουν κοινό σύνορο γ, τότε η ροή του διαν. πεδίου rot

μέσω της S_1 ισούται με την ροή του διαν. πεδίου μέσω της S_2.

Σχόλιο. Το θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει εάν το σύνορο της S' αποτελείται από περισσότερες από μία κλειστές καμπύλες. Ο προσανατολισμός αυτών των καμπύλων ακολουθεί τον κανόνα του "αριστερού χεριού" που γνωρίζουμε από την περίπτωση του $\mathbb{R}^2$.



S': Κόλουρος κώνος

S': Προσωπείο της Comedia Nova (~100 π.Χ.)

Εάν ωστόσο το σύνορο της S αποτελείται από τις κλειστές καμπύλες $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, $k \in \mathbb{N}$ τότε για το C^1 διαν. πεδίο $\vec{F}$ θα έχουμε

$$\iint_{S'} \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{N}\, dS' = \oint_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \ldots + \oint_{\gamma_k} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$