Μάθημα 31 (28/05/2012)

ΘΕΩΡΗΜΑ του Stokes

Το θ. Stokes αναφέρεται σε δ.π. $\vec{F}: A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}=(P,Q,R)$ C^1 και σε επιφάνειες παραμετριμένες $S \subseteq A$

$$\begin{cases} S=\{\vec{r}(u,v) : (u,v)\in D\} \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ όπου} \\ \vec{r} : D(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3,\ 1\text{-}1,\ (\kappa\tau)\ C^2,\ (\kappa\tau) \text{ λεία} \\ \text{με } D \text{ } u\text{-απλό ή } v\text{-απλό υποσύνολο του } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

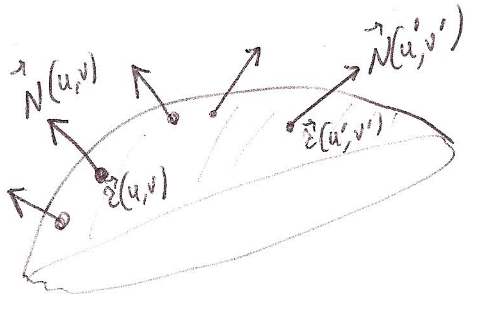
Αναλυτικά: $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $\quad (u,v)\in D$

$$\vec{r}_u(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)_{(u,v)}$$

$$\vec{r}_v(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{(u,v)}$$

με $\vec{N}(u,v) = \dfrac{\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)}{\|\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)\|} \neq (0,0,0)$

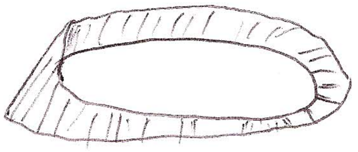
Υπενθυμίζουμε, ότι το $\vec{N}(u,v)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στην S στο σημείο $\vec{r}(u,v) \in S$



Το $\vec{N} : S(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ δείχνει την θετική πλευρά της S και λέμε ότι η S είναι προσανατολισμένη ως προς το $\vec{N}(u,v)$.

(ο προσανατολισμός εξαρτάται από την παραμέτρηση $\vec{r}(u,v)$).

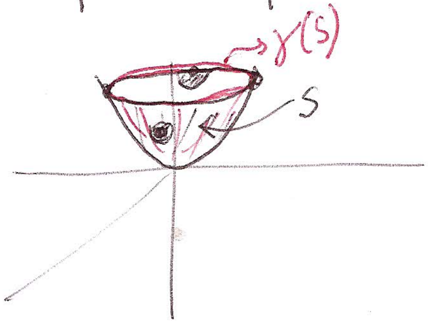
Μια επιφάνεια μπορεί να μην δέχεται προσανατολισμό!

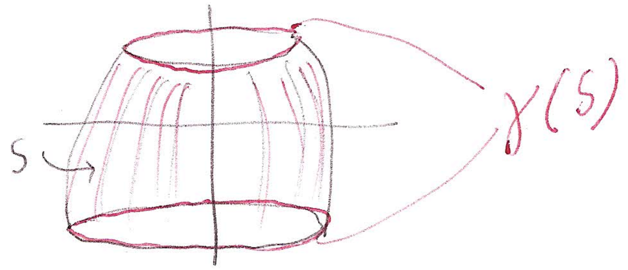


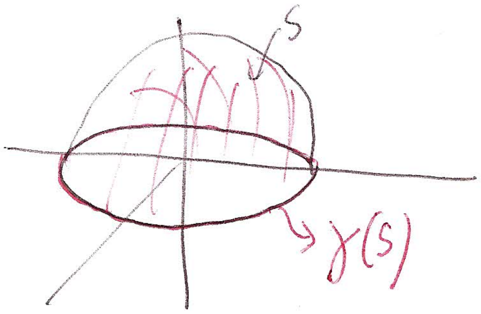
Ταινία Möbius

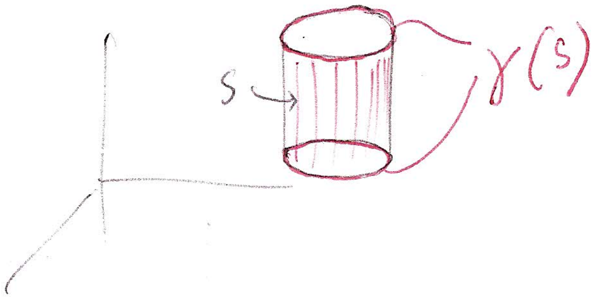
"Σύνορο" επιφάνειας $\gamma(S)$ (ή $\partial(S)$) (S λεία)

Έστω σημείο $\vec{\alpha}=\vec{r}(u,v)\in S$ και $S\cap \hat{S}(\vec{\alpha},\varepsilon)=B(\vec{\alpha},\varepsilon)$.
Εάν το $\vec{\alpha}$ δεν ανήκει στο "εσωτερικό" του $B(\vec{\alpha},\varepsilon)$ τότε το $\vec{\alpha}$ καλείται συνοριακό σημείο της επιφάνειας S.



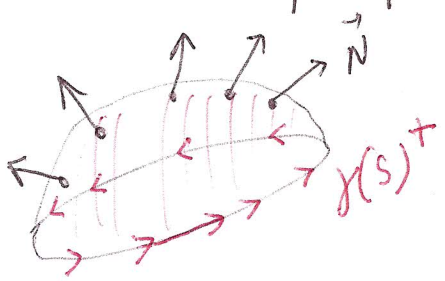


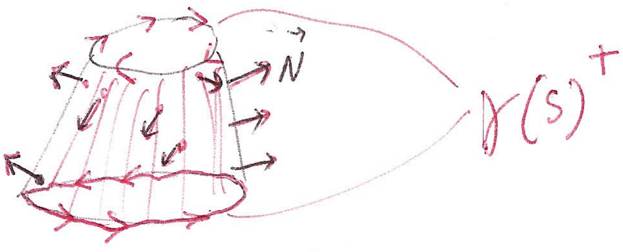




Το σύνολο των συνοριακών σημείων της S συμβολίζεται με $\gamma(S)$ (ή ∂S)
και είναι απλή+κλειστή καμπύλη/καμπύλες

Προσανατολίζουμε την $\gamma(S)$ ως προς το $\vec{N}(u,v)$ ($(u,v)\in D$) κατά την θετική φορά, αν περπατώντας κατά μήκος της καμπύλης $\gamma(S)$, το κεφάλι μας δείχνει την κατεύθυνση του $\vec{N}$, η S να είναι στα αριστερά μας.





Ο προσανατολισμός της $\gamma(S)$ εξαρτάται από τον προσανατολισμό της S.

Τύπος του Stokes (~1850)

Έστω $S=\{\vec{r}(u,v) : (u,v)\in D\}$ απλή, λεία, C^2 επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με $\vec{N}(u,v)$ το δ.π. των μοναδιαίων καθέτων της και $\gamma(S)$ το σύνορο της S, θετικά προσανατολισμένο ως προς $\vec{N}$.
Εάν $\vec{F}=(P,Q,R) : S\,(\subseteq \mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}^3$ C^1 δ.π τότε έχουμε

$$\oint_{\gamma(S)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S} \overset{(*)}{=} \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{N}\,dS \qquad \left(\begin{array}{l} d\vec{r}=\vec{r}\,'\,dt \\ d\vec{S}=(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,du\,dv \\ dS=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,du\,dv \end{array}\right)$$

Αναλυτικά: Εάν $\vec{\rho}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ είναι (θετική) παραμέτριση του $\gamma(S)$
Τότε
$$\int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{\rho}(t))\cdot\vec{\rho}\,'(t)\,dt = \iint_D (\nabla\times\vec{F})\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,du\,dv.$$
στην περίπτωση που το $\gamma(S)$ αποτελείται μόνο από μια καμπύλη.

Η ροή/κυκλοφορία του $\vec{F}$ κατά μήκος της $\gamma(S)$ ισούται με την εξερχόμενη ροή του $\nabla\times\vec{F}$ διά μέσου της S

Για περισσότερα: "Vector Calculus" J. E. Marsden and A. J. Tromba
Σύνδεσμοι ηλ. τάξης
ή άλλα βιβλία.

(*) Σχέση των 2 επιφανειακών ολοκληρωμάτων.