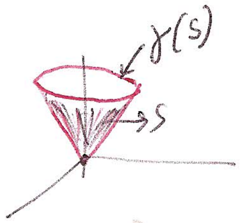
Ασκήσεις

1) Έστω $\vec{F}(x,y,z)=(x^2-y)\vec{i}+4z\vec{j}+x^2\vec{k}$ και

$S=\{(x,y,z): z=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ z\in[0,2]\}$.

Να εφαρμόσουμε τον τύπο του Stokes.



$$\oint_{\gamma(S)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D (\nabla\times\vec{F})\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,du\,dv$$

• $S:\ \vec{r}(r,\theta)=(r\,\text{συν}\theta,\ r\,\text{ημ}\theta,\ r)\ ,\ (\theta,r)\in[0,2\pi]\times[0,2]=D$

$$\begin{cases}\vec{r}_r(r,\theta)=(\text{συν}\theta,\ \text{ημ}\theta,\ 1)\\ \vec{r}_\theta(r,\theta)=(-r\,\text{ημ}\theta,\ r\,\text{συν}\theta,\ 0)\end{cases}$$

$\vec{r}_r(r,\theta)\times\vec{r}_\theta(r,\theta)=(-r\,\text{συν}\theta,-r\,\text{ημ}\theta,r)$
$\neq(0,0,0)$ για $r\neq0$.

$$(\nabla\times\vec{F})(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ (x^2-y) & (4z) & (x^2)\end{vmatrix}_{(x,y,z)} = (0-4)\vec{i}-(2x-0)\vec{j}+(0+1)\vec{k}$$

$\nabla\times\vec{F}(\vec{r}(r,\theta))=-4i-(2r\,\text{συν}\theta)\vec{j}+\vec{k}$

$$I_1=\iint_D(\nabla\times\vec{F})\cdot(\vec{r}_r\times\vec{r}_\theta)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\Big[\int_0^2(-4,-2r\,\text{συν}\theta,1)\cdot(-r\,\text{συν}\theta,-r\,\text{ημ}\theta,r)\,dr\Big]d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big[\int_0^2\left(4r\,\text{συν}\theta+2r^2\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\theta+r\right)dr\Big]d\theta=\dots=4\pi$$

• $\gamma(S):\ \vec{\rho}(\theta)=(2\,\text{συν}\theta,\ 2\,\text{ημ}\theta,\ 2)\ ,\ \theta\in[0,2\pi]$

$\begin{pmatrix}x^2+y^2=4\\ z=2\end{pmatrix}$

$$I_2=\oint_{\gamma(S)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\vec{F}(\vec{\rho}(\theta))\cdot\vec{\rho}\,'(\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\vec{F}(2\,\text{συν}\theta,2\,\text{ημ}\theta,2)\cdot(-2\,\text{ημ}\theta,\ 2\,\text{συν}\theta,\ 0)\,d\theta$$

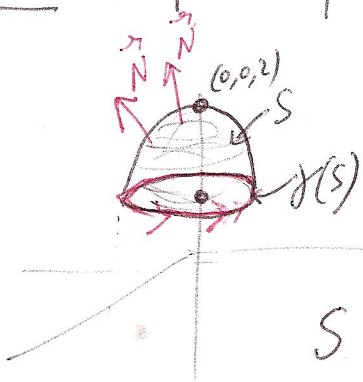
$=\dots=4\pi$

Τελικά $I_1=I_2$.

2) Έστω $\vec{F}(x,y,z) = (-y,\ x+y+z,\ y+z)$ και

$$S = \{(x,y,z) : z = 2-(x^2+y^2),\ x^2+y^2 \leq 1\}$$

<u>Να</u> εφαρμόσουμε τον τύπο του Stokes



$$\oint_{\gamma(S)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D (\nabla\times\vec{F})\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,du\,dv.$$

$$S : \vec{r}(r,\theta) = (r\,\text{συν}\theta,\ r\,\text{ημ}\theta,\ 2-r^2),\ (\theta,r)\in[0,2\pi]\times[0,1]$$

$$\left.\begin{cases}\vec{r}_r(r,\theta) = (\text{συν}\theta,\ \text{ημ}\theta,\ -2r)\\ \vec{r}_\theta(r,\theta) = (-r\,\text{ημ}\theta,\ r\,\text{συν}\theta,\ 0)\end{cases}\right\} \vec{r}_r(r,\theta)\times\vec{r}_\theta(r,\theta) =$$

$$= (2r^2\text{συν}\theta,\ 2r^2\text{ημ}\theta,\ r) \neq (0,0,0)$$
$$r\neq 0$$

$$\nabla\times\vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ (-y) & (x+y+z) & (y+z)\end{vmatrix} = (0,0,2).$$

$$\underline{I_1} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\nabla\times\vec{F}(\vec{r}(r,\theta))\right)\cdot(\vec{r}_r\times\vec{r}_\theta)(r,\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 2r\,dr\right)d\theta = \underline{2\pi}.$$

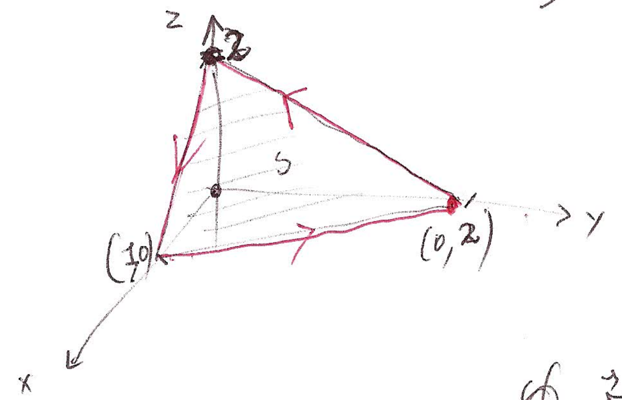
$$\gamma(S) : \vec{\rho}(\theta) = (\text{συν}\theta,\ \text{ημ}\theta,\ 1),\quad \theta\in[0,2\pi]$$

$$\underline{I_2} = \int_0^{2\pi}\vec{F}(\vec{\rho}(\theta))\cdot\vec{\rho}\,'(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}(-\text{ημ}\theta,\ \text{ημ}\theta+\text{συν}\theta+1,\ \text{ημ}\theta+1)\cdot(-\text{ημ}\theta,\ \text{συν}\theta,\ 0)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(1+\text{ημ}\theta\,\text{συν}\theta+\text{συν}\theta)\,d\theta = \underline{2\pi}$$

Τελικά $I_1 = I_2$.

3) Να υπολογιστεί η ροή/κυκλοφορία του δ.π $\vec{F}(x,y,z)=(xy,x,3+z)$ κατά μήκος του συνόρου της $S=\{(x,y,z): 2x+y+z=2 \text{ με } x,y,z\geq 0\}$



Το σύνορο είναι κ.τ. C^1 καμπύλη.
Θα χρειαζόμαστε 3-επικαμπύλια.
Θυμόμαστε(!) ότι:

$$\oint_{\gamma(S)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$$

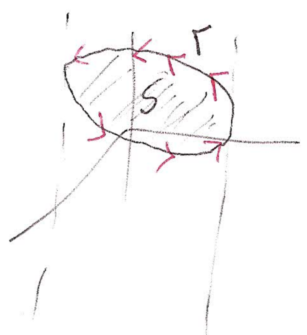
/ Κάθετο στο επίπεδο $2x+y+z=2$ είναι το $(2,1,1)$

$S: \vec{r}(x,y)=(x,y,2-2x-y)$, $(x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2-2x\}$

$\nabla\times\vec{F}(x,y,z)=(0,0,1-x)$ Άρα

$$\oint_{\gamma(S)} \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D \left(\nabla\times\vec{F}(\vec{r}(x,y))\right)\cdot(\vec{r}_x\times\vec{r}_y)\,dx\,dy=\int_0^1\left[\int_0^{2-2x}(1-x)\,dy\right]dx=\underline{2/3}$$

4) Να υπολογιστεί η ροή/κυκλοφορία του δ.π $\vec{F}(x,y,z)=(-y^3,x^3,-z^3)$ κατά μήκος της καμπύλης Γ $\{(x,y,z): x^2+y^2=1,\ x+y+z=1\}$



$I=\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$, όπου $S=\{(x,y,z): x+y+z=1,\ x^2+y^2\leq 1\}$ με κάθετο το $(1,1,1)$

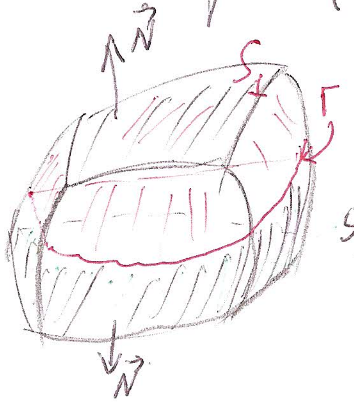
$\nabla\times\vec{F}(x,y,z)=(0,0,3(x^2+y^2))$

$I=\iint_D 3(x^2+y^2)\,dx\,dy$ όπου $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$, $D'=\{(r,\theta): 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$

$$I=3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r\,dr\,d\theta=\frac{3\pi}{2}$$

5) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^3$ στερεό με επιφάνεια S κανονική + κλειστή (+υποθ. Stokes) και $\vec{F}: B \to \mathbb{R}^3$ C^1 δ.π. Τότε

$$\oiint_{\partial B} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$$



$S = S_1 \cup S_2$

Έστω Γ απλή + κλειστή + (κτ) C^1 καμπύλη στο $\partial B = S$ ώστε $\Gamma = \gamma(S_1) = \gamma(S_2)$, $(S = S_1 \cup S_2, \ S_1 \cap S_2 = \Gamma)$

Τότε $\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ και $\iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = -\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Άρα $\iint_{S = S_1 \cup S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$.

6)** Έστω $\vec{F} : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ C^1, με $\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = (0,0,0)$ $(x,y,z) \in A$.

($\vec{F}$=αστρόβιλο)

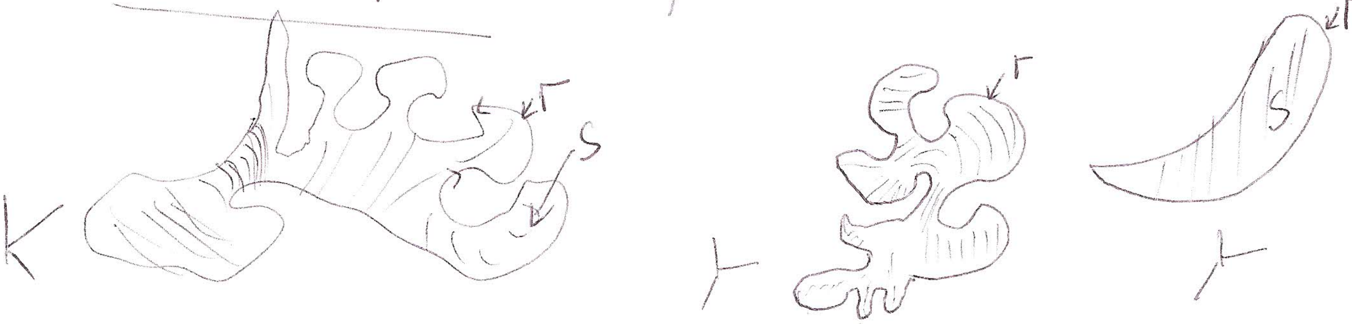
Υποθέτουμε ότι για τυχαία Γ απλή+κλειστή+C^1 καμπύλη του A, υπάρχει επιφάνεια S (που ικανοποιεί (κτ) τις υποθέσεις Stokes) ώστε το σύνορο $\gamma(S) = \Gamma$

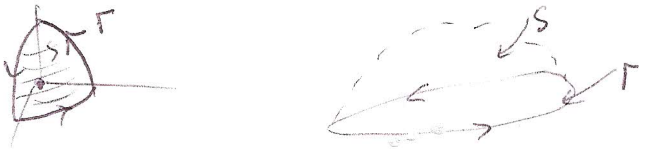
και $S \subseteq A$.

Τότε $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Λύση

$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$.

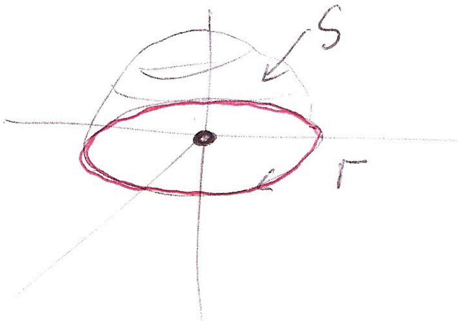




$S \subseteq A$ = π.ο της $\vec{F}$

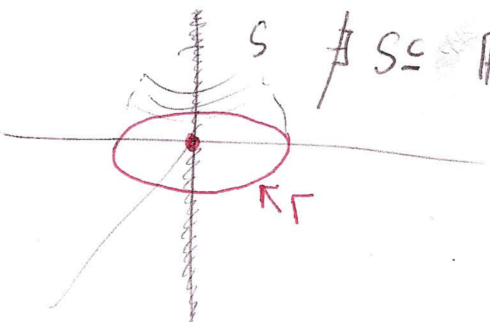
$A = \mathbb{R}^3$ ✓

$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$



✓

$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ δεν ισχύει η υπόθεση της άσκησης!

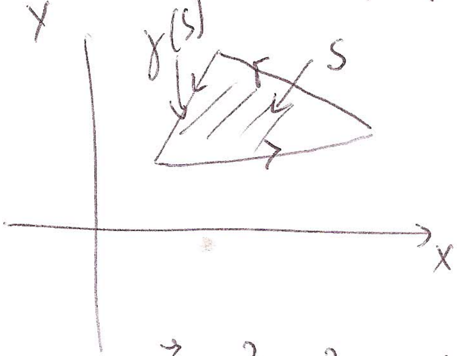


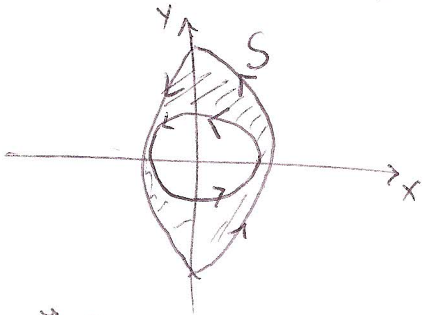
$\nexists\, S \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ ώστε $\gamma(S) = \Gamma$

✗

Παρατήρηση

Έστω επιφάνεια S του επιπέδου x-y, και το σύνορό της είναι καμπύλη/καμπύλες απλή + κλειστή + $C^1_{(κτ)}$ + λεία$_{(κτ)}$





και $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, C^1 δ.π. $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$.

Ορίζουμε το $\vec{F}$ στον $\mathbb{R}^3$ με $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0)$ -

Το μον. $\vec{N}(x,y)$ = κάθετο στην επιφάνεια S (που είναι στο x-y) είναι το $(0,0,1)$.

Από τον τύπο του Stokes με $(\nabla \times \vec{F})(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$

$$\int_{\gamma(S)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F})(x,y,z) \cdot d\vec{S} = \iint_S \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot (0,0,1)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

δηλαδή: ο τύπος του Stokes στο επίπεδο x-y είναι ο τύπος του Green (εφαπτομενική μορφή).

Υπάρχουν και άλλα λυμένα παραδείγματα στο άλλο αρχείο. -

συνέχεια στην 267