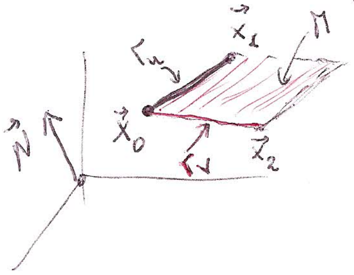
ΜΑΘΗΜΑ 26 (9-05)

Επιφανειακά Ολοκληρώματα: Εφαπτόμενο επίπεδο, Κάθετο διάνυσμα σε επιφάνεια, Ολοκληρώματα

Για να ορίσουμε το μήκος καμπύλης Γ και τα επικαμπύλια ολοκληρώματα χρειαστήκαμε το στοιχειώδες μήκος $ds=\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$ $(\Gamma: \vec{r}=\vec{r}(t),\ C^1$ ή κ.τ. $C^1)$.
Αρχίσαμε με ευθύγραμμα τμήματα, συνεχίσαμε με πολυγωνικές γραμμές και επεκτείναμε τους ορισμούς για C^1 ή κ.τ. C^1 καμπύλες παραμετρικοποιημένες.

Πως θα ορίσουμε το στοιχειώδες εμβαδόν επιφάνειας;
Με τι είδους "απλές" επιφάνειες θα αρχίσουμε για να επεκταθούμε σε "καλές" επιφάνειες;

Ποιου "απλού" σχήματος/επιφάνειας γνωρίζουμε να υπολογίζουμε το εμβαδόν;



Παραλληλογράμμου!

$$E=\|(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\times(\vec{x}_2-\vec{x}_0)\|$$

$\vec{N}\perp(\vec{x}_1-\vec{x}_0),\ (\vec{x}_2-\vec{x}_0)$, $\vec{N}=(\vec{x}_2-\vec{x}_0)\times(\vec{x}_1-\vec{x}_0)$

Γράφουμε μια παραμέτριση της επιφάνειας Π του παραλληλογράμμου:

$$\vec{r}(u,v)=\vec{r}(u_0,v_0)+(u-u_0)(\vec{x}_1-\vec{x}_0)+(v-v_0)(\vec{x}_2-\vec{x}_0) \quad \text{με } u\in[u_0,u_1],\ v\in[v_0,v_1]$$

ώστε: $\vec{r}(u_1,v_0)=\vec{x}_1$, $\vec{r}(u_0,v_1)=\vec{x}_2$, $\vec{r}(u_0,v_0)=\vec{x}_0$.

$(u_1-u_0=1,\ v_1-v_0=1)$

Η Γ_u : $\vec{r}(u,v_0)=\vec{r}(u_0,v_0)+(u-u_0)(\vec{x}_1-\vec{x}_0)$, με $u\in[u_0,u_1]$

έχει εφαπτόμενο διάνυσμα το $(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\overset{\text{συμβ.}}{=:}\vec{r}_u(u_0,v_0)=\left.\dfrac{d\vec{r}(u,v_0)}{du}\right|_{u=u_0}$

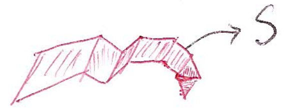
Η Γ_v : $\vec{r}(u_0,v)=\vec{r}(u_0,v_0)+(v-v_0)(\vec{x}_2-\vec{x}_0)$, με $u\in[v_0,v_1]$

έχει εφαπτόμενο διάνυσμα το $(\vec{x}_2-\vec{x}_0)\overset{\text{συμβ.}}{=:}\vec{r}_v(u_0,v_0)=\left.\dfrac{d\vec{r}(u_0,v)}{dv}\right|_{v=v_0}$

Άρα το $\vec{r}_u(u_0,v_0)\times\vec{r}_v(u_0,v_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια Π του παραλληλογράμμου, το εμβαδόν του Π είναι

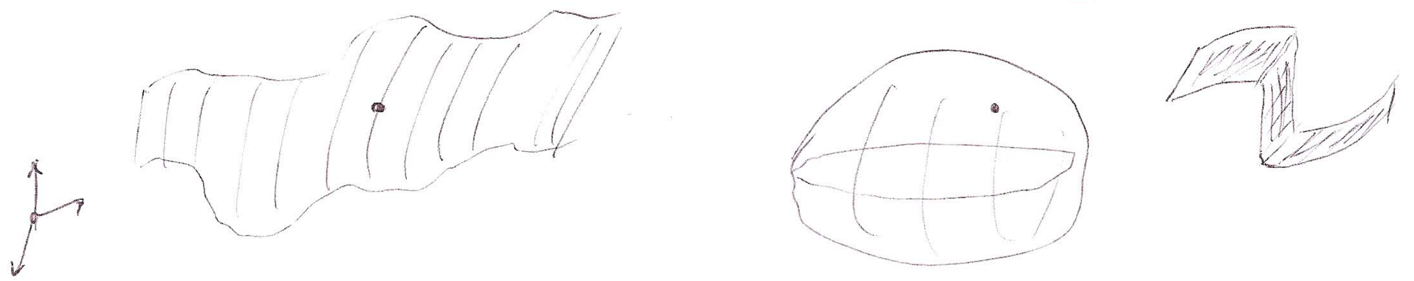
$$E=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|(u_1-u_0)(v_1-v_0)$$

Αν έχουμε μια πολυεδρική επιφάνεια, που έχει έδρες παραλληλόγραμμα (ή τρίγωνα) μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν της

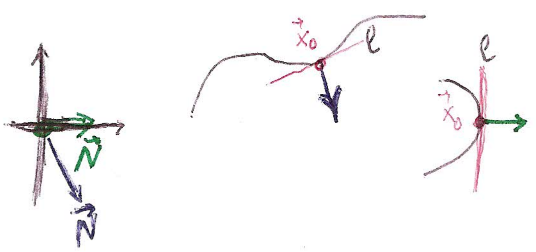


βρίσκοντας τα κάθετα σε κάθε παραλληλόγραμμο και μετά προσθέτοντας έχουμε το $E(S)$

Τι πρέπει να δημιουργήσουμε σε τυχαία "καλή" επιφάνεια; ΚΑΘΕΤΑ διανύσματα σε τυχαίο σημείο της !!



Εάν είχαμε μια "καλή" καμπύλη Γ στον $\mathbb{R}^2$ θα βρίσκαμε την



εφαπτομένη ευθεία ℓ στο $\vec{x}_0\in\Gamma$ και $\vec{N}$ κάθετο στην Γ στο $\vec{x}_0$ θα ήταν "καλό" να οριστεί να είναι κάθετο στην ℓ.

Για να δουλέψουμε για επιφάνειες οφείλουμε να ορίσουμε το **Εφαπτόμενο Επίπεδο** σε επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$

Πως περιγράφεται μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$;;

α) $S_c=\{(x,y,z) : F(x,y,z)=c\}$, όπου $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ (ή σε $B\subseteq\mathbb{R}^3$)

α') $S_0=\{(x,y,z) : (x,y)\in D\ ,\ z=f(x,y)\}$, όπου $f: D(\subseteq\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}$

δηλ. το γράφημα της f. $S=\{(x,y,z) : F(x,y,z)=z-f(x,y)=0\}$ (ανάγεται στην α)

β) $S=\{\vec{r}(u,v) : (u,v)\in D\}$ όπου $\vec{r}: D(\subseteq\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}^3$

$\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$.

α) Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ (βαθμωτό πεδίο)

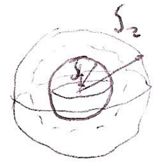
π.χ. F = θερμοκρασία, πίεση στο $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Τότε τα σημεία $(x,y,z)\in S$ έχουν την ίδια στάθμη (θερμοκρασία, …)

π.χ. • αν $F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, τότε για $\alpha>0$

$S_\alpha=\{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2+z^2}=\alpha\}$

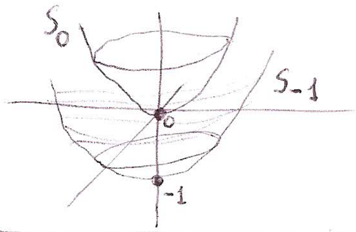
είναι σφαίρες.



• αν $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$, τότε για

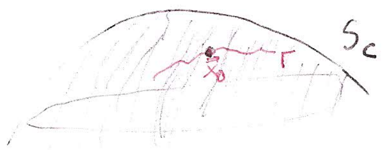
$S_\alpha=\{(x,y,z) : x^2+y^2-z=\alpha\}=\{(x,y,z) : \alpha+z=x^2+y^2\}$

είναι παραβολοειδή.



Η $S_c=\{(x,y,z) : F(x,y,z)=c\}$ καλείται ισοσταθμική επιφάνεια της F στάθμης c

Ας πάρουμε μια καμπύλη Γ πάνω στην S_c που περνά από το $\vec{x}_0 \in S_c$



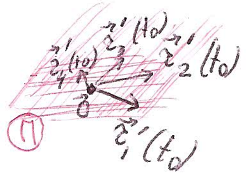
δηλαδή $\begin{cases} F(\vec{r}(t)) = c, & t \in [\alpha, \beta] \\ \vec{r}(t_0) = \vec{x}_0 & \text{για κάποιο } t_0 \in [\alpha, \beta] \end{cases}$ $\quad (\Gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha, \beta])$

Τότε $\dfrac{d(F \circ \vec{r})(t)}{dt} = 0$, υποθέτοντας ότι οι F, $\vec{r}$ είναι διαφορίσιμες.

Όμως $\dfrac{d(F \circ \vec{r})(t_0)}{dt} = \nabla F(\vec{r}(t_0)) \circ \vec{r}\,'(t_0)$ (Κανόνας Αλυσιδωτής Παραγώγισης)

Τελικά: $\nabla F(\vec{x}_0) \circ \vec{r}\,'(t_0) = 0$

Άρα το $\nabla F(\vec{x}_0)$ είναι κάθετο στο εφ. διάνυσμα $\vec{r}\,'(t_0)$ τυχαίας Γ που περνά από το $\vec{x}_0$ $(\nabla F(\vec{x}_0) \neq \vec{0})$

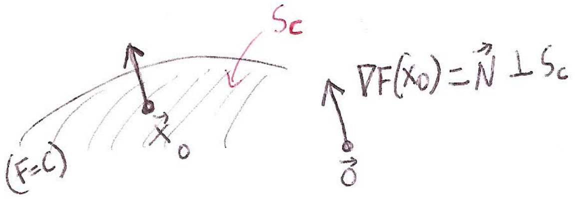


Όλα αυτά τα $\vec{r}\,'(t_0)$ ανήκουν στο ίδιο επίπεδο Π αυτό ορίζεται ως εφαπτόμενο επίπεδο της S_c στο $\vec{x}_0$.

Το επίπεδο αυτό έχει κάθετο το $\nabla F(\vec{x}_0)$ και περνά από το $\vec{x}_0$. Η εξίσωση του ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ στο $\vec{x}_0 \in S$ στην ισοσταθμική $S_c = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = c\}$ θα είναι:

$$\nabla F(\vec{x}_0) \circ (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0 \quad \text{ή}$$

αν $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{x} = (x, y, z)$



$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Μπορούμε φυσιολογικά να ορίσουμε:

Το $\vec{N} = \nabla F(\vec{x}_0)$ είναι κάθετο στην S_c στο $\vec{x}_0 \in S_c$

(είναι $\perp$ στα εφ. διανύσματα $\vec{r}\,'(t_0)$)

Το α') είναι πια απλό! Έστω $f: D \to \mathbb{R}$ και $z_0 = f(x_0, y_0), (x_0, y_0) \in D$.

$S_0 = \{(x,y,z) : z = f(x,y)\}$, $F(x,y,z) = z - f(x,y)$, $F: D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^2)$

δηλαδή η S_0 είναι ισοσταθμική της F στάθμης $c = 0$.

Οπότε αν η f είναι διαφορίσιμη το εφαπτόμενο επίπεδο στην S_0 (στο γράφημα της f) είναι $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)$

$\cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ ή

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) + 1 \cdot (z - z_0) = 0 \quad \text{ή}$$

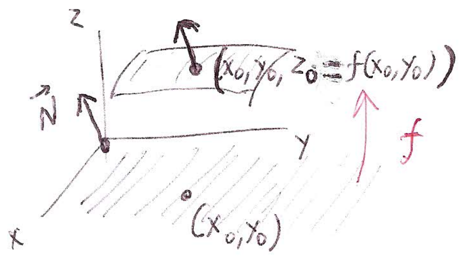
$$z = z_0 + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \text{ή}$$

* $$L(x,y) = f(x_0,y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

δηλ. η Γραμμικοποίηση της f στο $(x_0,y_0) \in D$.

Κάθετο διάνυσμα στο γράφημα της f είναι

$$\vec{N} = \nabla F(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$$

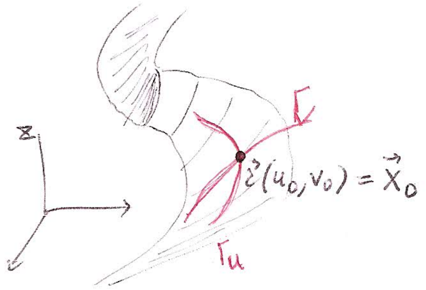


$$\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$$

- Σε ισοσταθμική επιφάνεια το $\vec{x}_0 \in S_c$ με $\nabla F(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ καλείται ομαλό
- Παρατηρούμε ότι τα σημεία του γραφήματος μιας διαφορίσιμης συνάρτησης είναι όλα ομαλά

β) $S = \{ \vec{r}(u,v) \ : \ (u,v) \in D \}$

και $\vec{x}_0 = \vec{r}(u_0, v_0) \in S$



Σταθεροποιούμε το v_0,

τότε η $\Gamma_u : \vec{r}_1(u) = \vec{r}(u, v_0)$ είναι καμπύλη πάνω στην S

Σταθεροποιούμε το u_0,

τότε η $\Gamma_v : \vec{r}_2(v) = \vec{r}(u_0, v)$ είναι καμπύλη πάνω στην S.

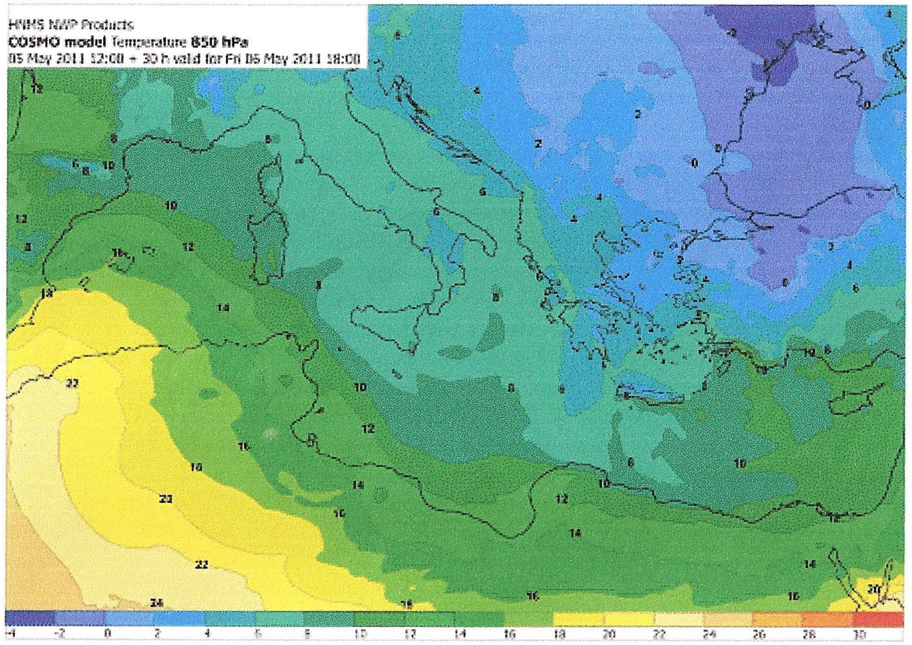
Η Γ_u έχει εφαπτόμενο διάνυσμα στο $u = u_0$: $\vec{r}_u(u_0,v_0) = \vec{r}_1{}'(u_0)$

και η Γ_v » » στο $v = v_0$: $\vec{r}_v(u_0,v_0) = \vec{r}_2{}'(v_0)$

Άρα : κάθετο στην S θα είναι $\vec{N} = \vec{r}_u(u_0,v_0) \times \vec{r}_v(u_0,v_0)$ στο σημείο $\vec{x}_0 = \vec{r}(u_0,v_0)$ (αν $\vec{r}_u(u_0,v_0) \times \vec{r}_v(u_0,v_0) \neq \vec{0}$)

~ . ~

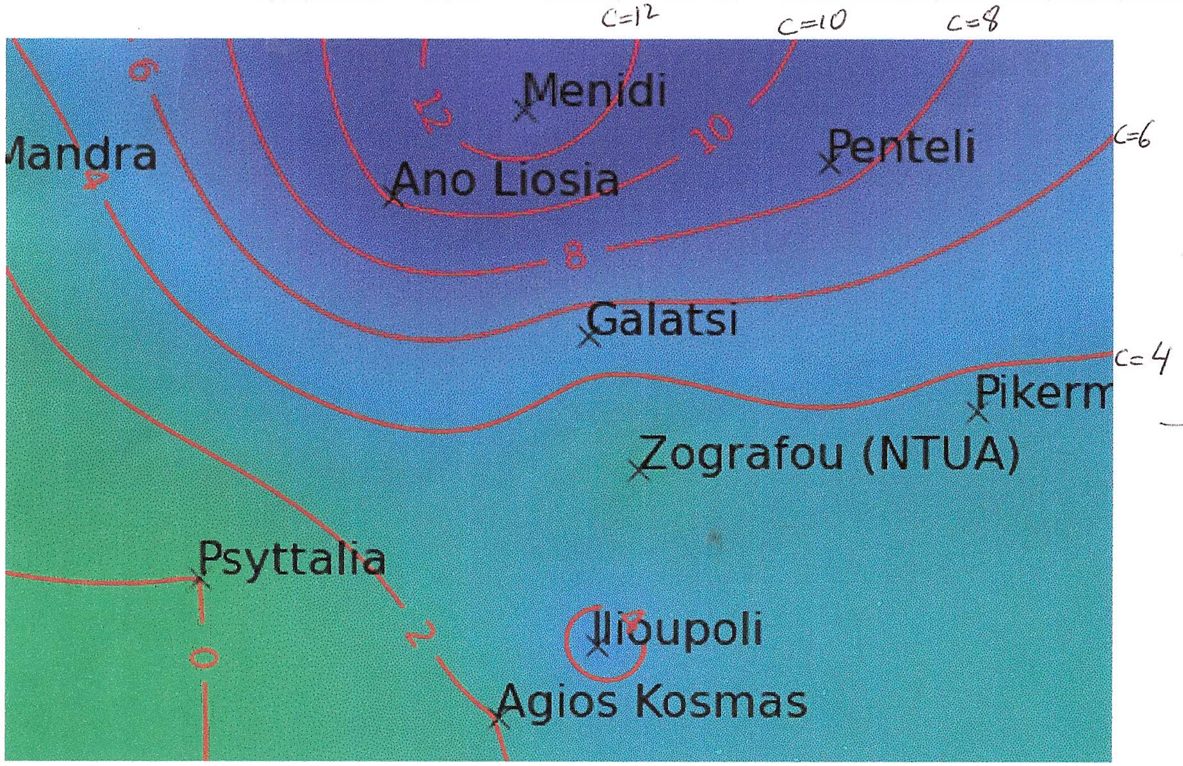
Ανάλογα με τις ισοσταθμικές επιφάνειες έχουμε τις ισοσταθμικές καμπύλες για $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.



6 Μαΐου 2011.

ΕΜΥ (hnms.gr)

Ισοσταθμικές καμπύλες



Βροχή 5 Μαΐου 2011.

$f(x,y) =$ χιλιοστά βροχής στο $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\Gamma_c = \{(x,y) : f(x,y) = c\}$ | ισοσταθμική καμπύλη στάθμης c

ΕΜΠ (hoa.ntua.gr)

Ασκήσεις

1) Να ευρεθεί κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας S στο $\vec{x}_0 \in S$ και το εφαπτόμενο επίπεδο :

$S = \{(x,y,z) : z = x^2+y^2\}$ στο $\vec{x}_0 = (1,1,2) \in S$.

α) $F(x,y,z) = z - x^2 + y^2$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. , $S = S_0$ ισοσταθμική της F με $c=0$

Κάθετο στο $(1,1,2)$ είναι

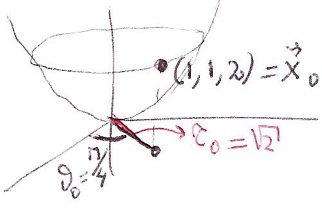
$\vec{N}(1,1,2) = \nabla F(1,1,2) = (-2,-2,1)$

α΄) $S = \{(x,y,z) : f(x,y) = x^2+y^2\}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $S =$ γράφημα της f

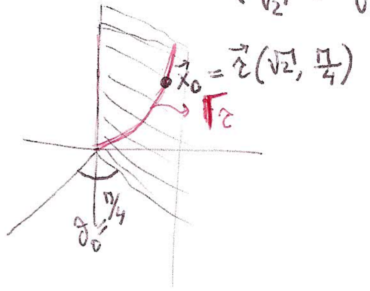
Κάθετο στο $(1,1,2)$ είναι $\vec{N}(1,1,2) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), -\frac{\partial f}{\partial y}(1,1), +1\right) = (-2,-2,1)$

β) $S = \{\vec{r}(r,\theta) = (r\,\text{συν}\theta, r\,\text{ημ}\theta, r^2) \ , (r,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi]\}$

$(1,1,2) = \vec{r}\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

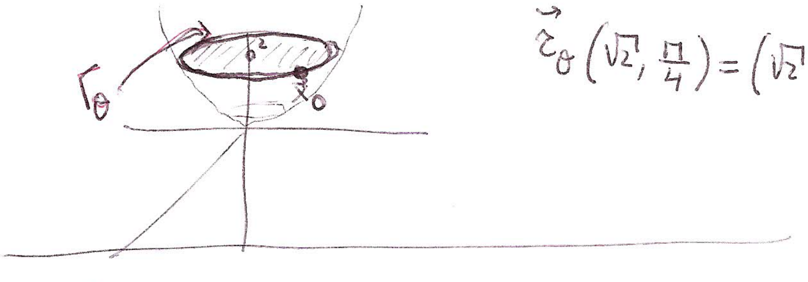


Γ_r : $\vec{r}_1\left(r, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, r^2\right)$



$\vec{r}_r\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, r^2\right)'_{(r=\sqrt{2})} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right)$

Γ_θ : $\vec{r}_2(\sqrt{2}, \theta) = (\sqrt{2}\,\text{συν}\theta, \sqrt{2}\,\text{ημ}\theta, 2)$



$\vec{r}_\theta\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}\,\text{συν}\theta, \sqrt{2}\,\text{ημ}\theta, 2)'_{\theta=\frac{\pi}{4}} = (-1, 1, 0)$

$\vec{N}(1,1,2) = \vec{r}_r\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) \times \vec{r}_\theta\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right) \times (-1,1,0) \Rightarrow$

$\vec{N}(1,1,2) = \sqrt{2}\,(-2,-2,1)$

Το εφαπτόμενο επίπεδο είναι $\vec{N}(1,1,2)\circ(\vec{x}-\vec{x}_0)=0$ (στο $(1,1,2)\in S$)

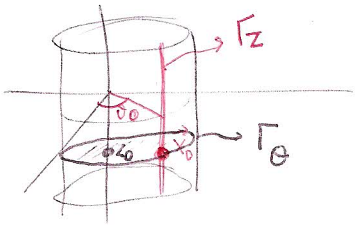
$$2(x-x_0)+2(y-y_0)-(z-z_0)=0 \quad , (x_0,y_0,z_0)=(1,1,2)$$

$$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$$

$\boxed{z=2x+2y-2}$ Εφ. επίπεδο της S στο $(1,1,2)$

2) Να βρεθεί κάθετο διάνυσμα της $S=\{(x,y,z):\ x^2+y^2=a^2\}$ $(a>0)$ στο $(x_0,y_0,z_0)\in S$.

—



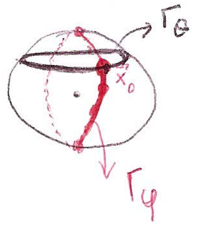
$$S=\{\vec{r}(\theta,z)=(a\,\text{συν}\,\theta,\ a\,\text{ημ}\,\theta,\ z):\ (\theta,z)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}_\theta(\theta_0,z_0)=(-a\,\text{ημ}\,\theta_0,\ a\,\text{συν}\,\theta_0,\ 0)\\ \vec{r}_z(\theta_0,z_0)=(0,\ 0,\ 1)\end{array}\right\}\ \vec{N}=\vec{r}_\theta(\theta_0,z_0)\times\vec{r}_z(\theta_0,z_0)=\underline{(a\,\text{συν}\,\theta_0,\ a\,\text{ημ}\,\theta_0,\ 0)}$$

όπου $(x_0,y_0,z_0)=(a\,\text{συν}\,\theta_0,\ a\,\text{ημ}\,\theta_0,\ z_0)$

3) Να βρεθεί κάθετο διάνυσμα στην $S:\ x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ στο $(x_0,y_0,z_0)\in S$.

—



$$(x_0,y_0,z_0)=(a\,\text{συν}\,\theta_0\,\text{ημ}\,\varphi_0,\ a\,\text{ημ}\,\theta_0\,\text{ημ}\,\varphi_0,\ a\,\text{συν}\,\varphi_0)$$

$$S:\ \vec{r}(\theta,\varphi)=(a\,\text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi,\ a\,\text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi,\ a\,\text{συν}\,\varphi)\quad,(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}_\theta(\theta_0,\varphi_0)=(-a\,\text{ημ}\,\theta_0\,\text{ημ}\,\varphi_0,\ a\,\text{συν}\,\theta_0\,\text{ημ}\,\varphi_0,\ 0)\\ \vec{r}_\varphi(\theta_0,\varphi_0)=(a\,\text{συν}\,\theta_0\,\text{συν}\,\varphi_0,\ a\,\text{ημ}\,\theta_0\,\text{συν}\,\varphi_0,\ -a\,\text{ημ}\,\varphi_0)\end{array}\right\}$$

$$\underline{\vec{N}}=\vec{r}_\theta(\theta_0,\varphi_0)\times\vec{r}_\varphi(\theta_0,\varphi_0)=\underline{-a\,\text{ημ}\,\varphi_0\,\vec{r}(\theta_0,\varphi_0)}$$

$$(=c(x_0,y_0,z_0)\quad,c=\text{σταθερά})$$

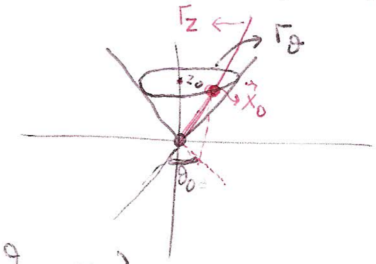
4) Να βρεθεί κάθετο στην S: $z^2=x^2+y^2$, στο $(x_0,y_0,z_0)\in S$ με $z_0\neq 0$.

—

$\vec{r}(\theta,z)=(z\,\sigma\upsilon\nu\theta,\ z\,\eta\mu\theta,\ z)$, $(x_0,y_0,z_0)=(z_0\,\sigma\upsilon\nu\theta_0,\ z_0\,\eta\mu\theta_0,\ z_0)$

$\vec{r}_\theta(\theta_0,z_0)=(-z_0\,\eta\mu\theta_0,\ z_0\,\sigma\upsilon\nu\theta_0,\ 0)$

$\vec{r}_z(\theta_0,z_0)=(\sigma\upsilon\nu\theta_0,\ \eta\mu\theta_0,\ 1)$



$\vec{N}=\vec{r}_\theta(\theta_0,z_0)\times\vec{r}_z(\theta_0,z_0)=(z_0\,\sigma\upsilon\nu\theta_0,\ z_0\,\eta\mu\theta_0,\ -z_0)$.

<u>Σημείωση</u> Στις 2), 3), 4) το εφαπτόμενο βρίσκεται ευκολότερα με τον α)

2) $\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2-\alpha^2, \\ (x_0,y_0,z_0)\in S=\{(x,y,z): x^2+y^2-\alpha^2=0\}\end{cases}$ $\nabla F(x_0,y_0,z_0)=(2x_0,2y_0,0)\perp S$

$(\nabla F(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$ διότι $\alpha>0)$

Άρα το <u>εφ. επίπεδο είναι</u> $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+0(z-z_0)=0$

$\underline{xx_0+yy_0=\alpha^2}$

3) $\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\alpha^2, \\ (x_0,y_0,z_0)\in S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2-\alpha^2=0\}\end{cases}$ $\nabla F(x_0,y_0,z_0)=(2x_0,2y_0,2z_0)\perp S$

$(\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$ διότι $\alpha>0)$

Άρα το <u>εφ. επίπεδο</u> είναι $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$

$xx_0+yy_0+zz_0=\alpha^2$

4) $\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2 \\ (x_0,y_0,z_0)\in S=\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2=0\}\end{cases}$ $\nabla F(x_0,y_0,z_0)=(2x_0,2y_0,-2z_0)\perp S$

(Πρέπει $z_0\neq 0$ για να έχουμε $\nabla F(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$)

Άρα το <u>εφ. επίπεδο</u> είναι $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0)=0$

$xx_0+yy_0-zz_0=0$

<u>ΣΗΜ</u> Προφανώς εάν $\vec{N}\perp S$ κάθε $\lambda\vec{N}$ με $\lambda\neq 0$ είναι κάθετο.
Τα $\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$, $-\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ είναι τα μοναδικά <u>Μοναδιαία κάθετα</u>.