

Εύρητα 3 (συνέχεια)

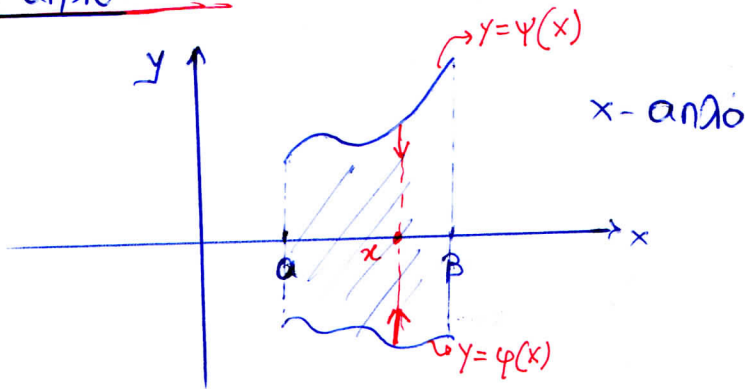
Διηρό ολουήραμα

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

i) $D = \{(x,y) : a \leq x \leq \beta, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$

$\varphi, \psi : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ σωχείς

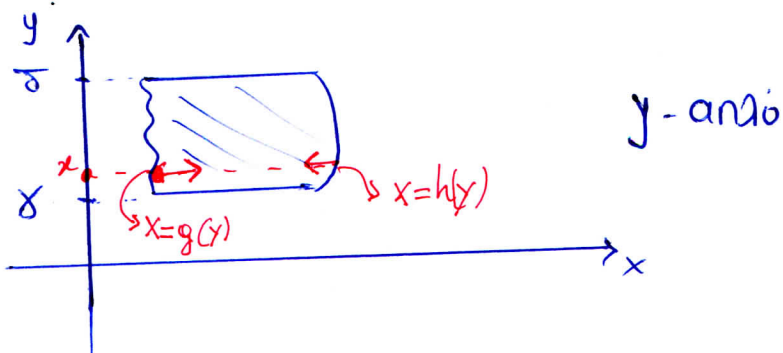
x-αηλό



ii) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \delta \leq y \leq \delta', g(y) \leq x \leq h(y)\}$

$g, h : [\delta, \delta'] \rightarrow \mathbb{R}$ σωχείς

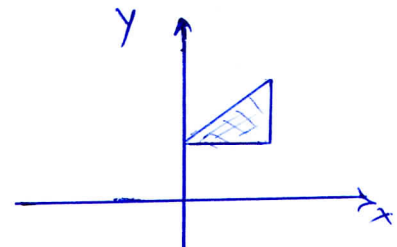
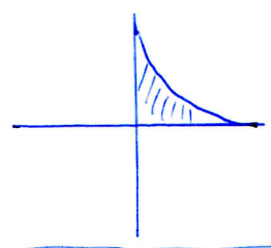
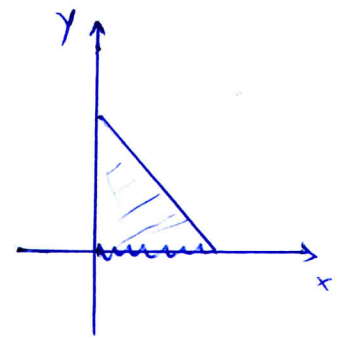
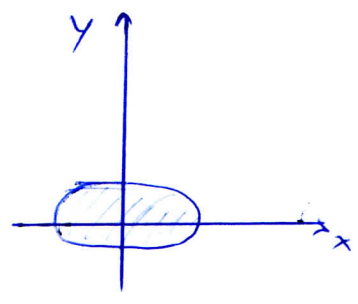
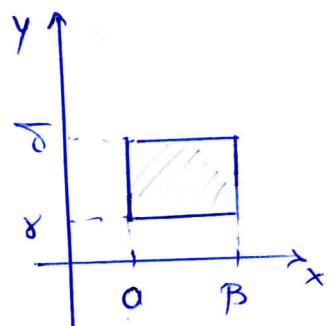
y-αηλό



iii) D είναι x και y αηλό

D αηλό





Αντά σήματα



'0x1 x-x0
'0x1 y-y0

Θ. Fubini

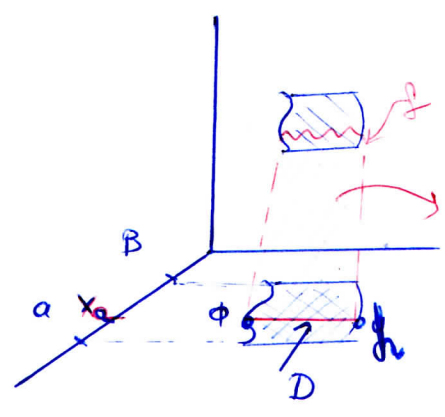
$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

i) D x-αντί $\int_D \int f(x,y) dx dy = \int_a^{\beta} \left(\int_{\phi(x)}^{y(x)} f(x,y) dy \right) dx$

ii) D y-αντί

$$\int_D \int f(x,y) dx dy = \int_{\delta}^{\delta} \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y) dx \right) dy$$

$f=1$, $\int_D \int 1 dx dy = \text{εμβαδόν του } D$



B_{x_0}
 $\phi(x_0)$ $y(x_0)$

$$\int_{\phi(x_0)}^{y(x_0)} f(x_0, y) dy = \text{εμβαδόν } B(x_0)$$



$$f \geq 0, \quad \mathcal{I}(f, D) = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

$$V(\mathcal{I}(f, D)) = \iint_D f(x, y) dx dy$$

↑
όγκος
στερεώ

$$f=1, \quad V(\mathcal{I}(f, D)) = A(D)$$

Άσκηση 6666 :

$$1) \quad I = \iint_B (e^x \cdot nky + x \cdot nky) dx dy, \quad B = [1, 2] \times [0, \pi/2]$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 (e^x \cdot nky + x \cdot nky) dx \right) dy = \int_1^2 \left(\int_0^{\pi/2} (e^x \cdot nky + x \cdot nky) dy \right) dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(e^x \cdot nky + \frac{x^2}{2} nky \Big|_{x=1}^2 \right) dy$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(e^2 - e \right) nky + \frac{3}{2} nky \Big|_1^2 dy = \left(e^2 - e + \frac{3}{2} \right) \int_0^{\pi/2} nky dy$$

$$I = \left(e^2 - e + \frac{3}{2} \right) \left(-6ny \Big|_0^{\pi/2} \right)$$

$$I = e^2 - e + 3/2$$



$$2) I = \int_T \int (6x + 6y + 6) dx dy$$

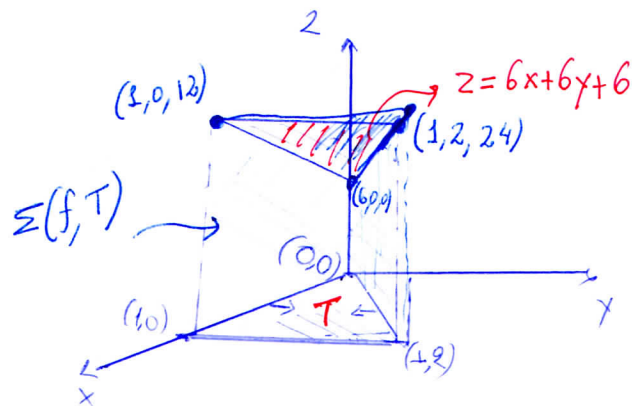
$$T = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x \} \quad \underline{x\text{-anglo}}$$

$$I = 6 \int_0^1 \left(\int_0^{2x} (x + y + 1) dy \right) dx$$

$$I = 6 \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + y \Big|_{y=0}^{2x} \right) dx$$

$$I = 6 \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{2x^2}{2} + 2x \right) dx$$

$$I = 6 \int_0^1 (4x^2 + 2x) dx = 6 \left[\frac{4}{3} x^3 + x^2 \right]_{x=0}^1 = 6 \left(\frac{4}{3} + 1 \right) = 14$$



$$V(f, T) = 14$$

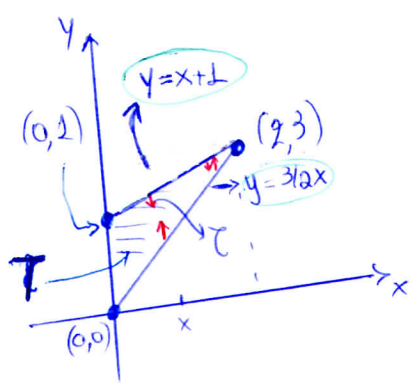


Ορίζουμε ως μάζα του D το $M = \iint_D \delta(x,y) dx dy$ όπου

$\delta(x,y)$ = πυκνότητα μάζας στο (x,y) / Συν 2) υπολογιστεί ως βάρος τριγωνικού ηλ. T με συνάρτηση $\delta(x,y) = 6x + 6y$

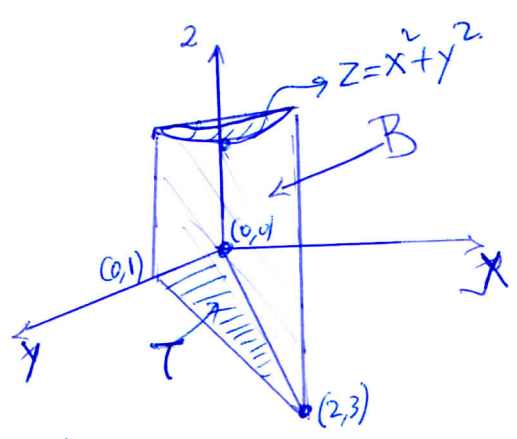
3) $I = \int_T \int (x^2 + y^2) dx dy$

T τρίγωνο με κορυφές A(0,0), B(0,1), Γ(2,3)



$$T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, \frac{3}{2}x \leq y \leq x+1\}$$

$$I = \int_0^2 \left(\int_{\frac{3}{2}x}^{x+1} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \dots = 17/6$$



$$z = x^2 + y^2$$

$$V(B) = \int_T \int (x^2 + y^2) dx dy$$

Άλλες διαστάσεις της 3)

Να υπολογιστεί ο όγκος του B.

$$B = \{(x,y,z) : (x,y) \in T, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 = f(x,y)\}$$

ή μάζα του T με $\delta(x,y) = x^2 + y^2$



$$4) I = \int_D \int xy \, dx \, dy$$

D περιβάλλεται από την $y=x^2, x=2, y=0$.

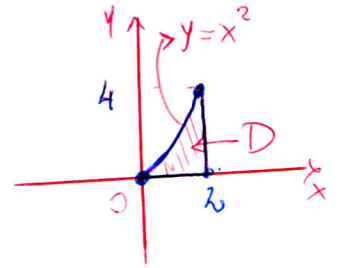
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2 \right\}$$

x-από

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2 \right\}$$

y-από

Περιγράφει το ίδιο πράγμα με διαφορετικό τρόπο!



$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} xy \, dy \right) dx = \dots = \frac{16}{3}$$

Αλλαγή της σειράς Ολοκλήρωσης (Για να υπολογιστεί κονά οφείλ)

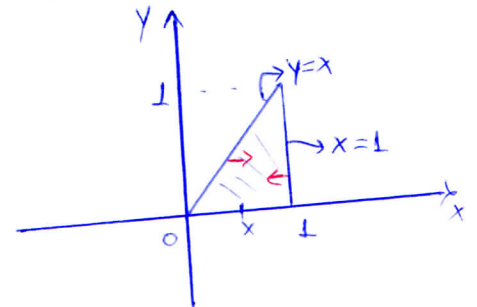
$$4) I = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} \, dx \right) dy$$

$$D = \left\{ (x,y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1 \right\}$$

y-από

$$= \left\{ (x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \right\}$$

x-από



$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{-x^2} \, dy \right) dx = \int_0^1 x \cdot e^{-x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-1})$$

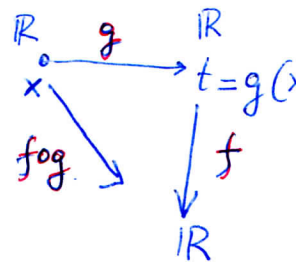
- ⊗ $\int e^{-x^2} \, dx$ Δεν υπολογίζεται, δηλ. δεν υπάρχει στοιχειώδης
- * $\int \ln x^i \, dx$ συνάφεται με $f'(x) = e^{-x^2} \, dx$ (βλ. και ανάπτυξη Taylor)
(για $g(x) = \ln x^i$)

$$2) I = \int_0^1 \left(\int_y^1 n f(x^2) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^x n f(x^2) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^x n f(x^2) dy \right) dx = \int_0^1 x \cdot n f(x^2) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos(x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} (1 - \cos 1)$$

Αλλαγή συντεταγμένων στο \mathbb{R}^2

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) g'(x) dx = \int_a^b f(t) dt \quad \begin{cases} (g' > 0) \\ (t = g(x)) \end{cases}$$

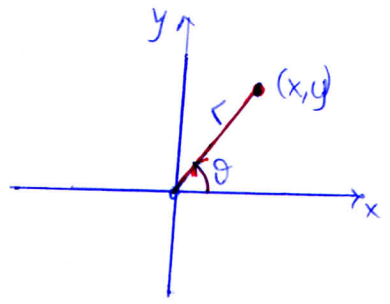


$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (g' > 0)$ (Άλλαξη μεταβλητής $t = g(x)$)

Πολικός μετασχηματισμός

$$\vec{\tau}: [0, +\infty] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\vec{\tau}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$



$$\vec{\tau}_T(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ = ορίζεται ως $\vec{\tau}_T(r, \theta)$

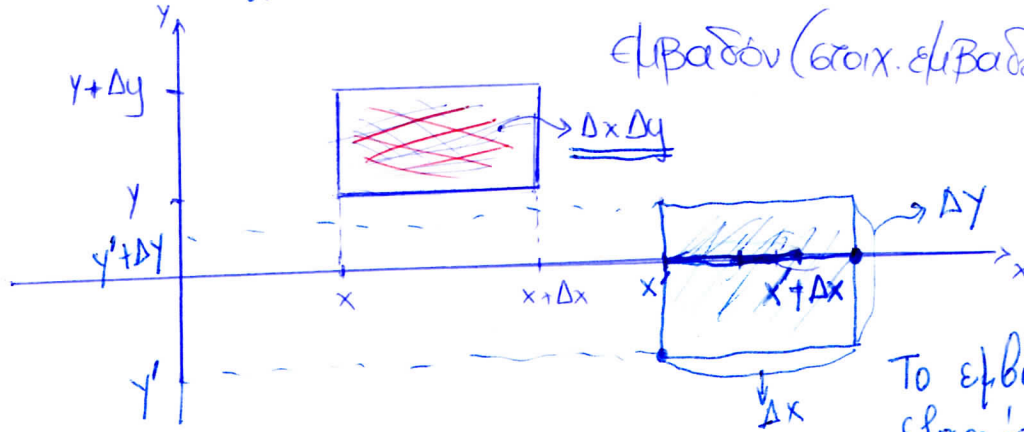
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \tau$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\vec{\tau}^{-1}(D)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

Τύπος αλλαγής συντεταγμένων
 διπλό ολοκλήρωμα
 (από x-y σε r-θ)



Μια κλάση προβέγγιων του τύπου

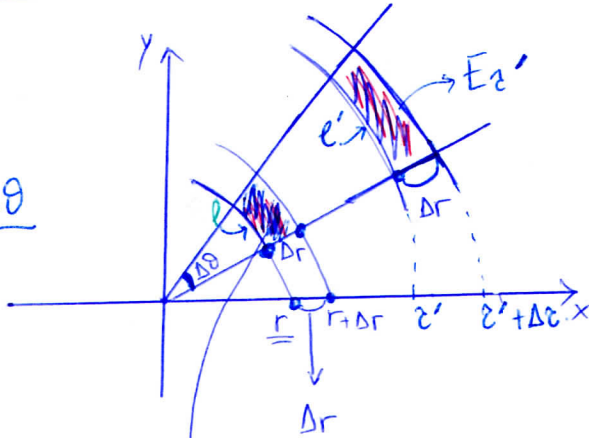


Εμβαδόν (στοιχ. εμβαδόν) σε καρτ. συντελ. $\Delta x, \Delta y$ βαθμεία

$$E = \Delta x \cdot \Delta y$$

Το εμβαδόν E του ορθογώνου εφαρμόζεται από τα $\Delta x, \Delta y$ και όχι από τις κορυφές του.

Κρατάμε τα $\Delta r, \Delta \theta$ βαθμεία



$$E_2 \approx (\Delta r) l = (\Delta r) r \cdot \Delta \theta = r \Delta r \Delta \theta$$

Ενώ $E_2' \approx (\Delta r') r' = (\Delta r') (r' \Delta \theta) = r' \Delta r' \Delta \theta$.

Παρατηρούμε ότι οι "στοιχειώδεις" εμβαδόν κρατώντας τα $\Delta r, \Delta \theta$ βαθμεία μεταβάλλεται, ανάλογα με τις "κορυφές" του.

