Μάθημα 17 - 04/04/2011 T10

Ασκήσεις (συνέχεια)

2) $f(x) = \eta\mu x$, $x_0 = 0$

(i) Να γραφεί το πολ. Taylor, υπόλ. Taylor

(ii) Αποδείξτε ότι ~~ημx≠~~

$$\eta\mu x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(iii) Να ευρεθεί προσέγγιση του ημ(0,2) με χρήση πολ. Taylor 3-βαθμού και εκτίμηση του σφάλματος.

$$T_{n,x_0=0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x) = \eta\mu x, & f(0) = 0 \\ f'(x) = \sigma\upsilon\nu x, & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\eta\mu x, & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\sigma\upsilon\nu x, & f'''(0) = -1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} f^{(4)}(x) = \eta\mu x, & f^{(4)}(0) = 0 \\ f^{(5)}(x) = f'(x) & \dots \end{array}\right.$$

$$f^{(2n)}(0) = 0$$

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

T11

$$T_{2n+2,0}(x) = T_{2n+1,0}(x) =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(+ \frac{0 \cdot x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right)$$

$$R_{2n+2,0}(x) = \frac{\eta\mu^{(2n+3)}(\xi x)}{(2n+3)!} x^{2n+3}$$ για κάποιο ξx μεταξύ του $x_0 = 0$, x

ii) Αρκεί $\lim_{n \to +\infty} R_{2n+2,0}(x) = 0$ Ισχύει διότι

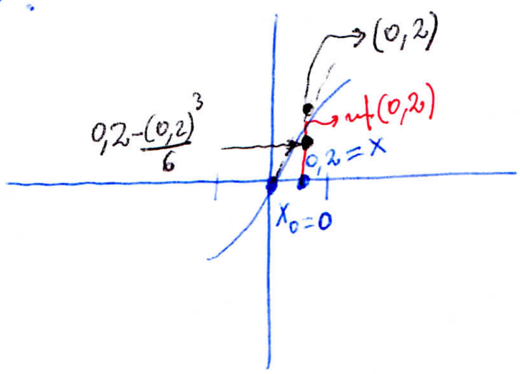
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

iii) $T_{3,0}(x) = x - \frac{x^3}{6}$, $R_{3,0}(x) = \frac{\eta\mu^{(5)}(\xi x)}{5!} x^5$.

Προσέγγιση: $(0,2) - \frac{(0,2)^3}{6} \cong \eta\mu(0,2)$

$$|R_{3,0}(0,2)| \leq \frac{(0,2)^5}{5!} < 0,000003$$



T12

3) Γεωμ. σειρά

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ για } x \in (-1, +1)$$

Μερικό άθροισμα:

$$S_n = 1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \dots + \cancel{x^n}$$

$$x S_n = \cancel{x} + \cancel{x^2} + \dots + \cancel{x^n} + x^{n+1}$$

$$(1-x) S_n = 1 - x^{n+1}$$

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$\lim_{n \to +\infty} x^n = 0 \text{ για } x \in (-1, +1)$$

Άρα $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n \to +\infty} (1 + \dots + x^n) =$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{για } x \in (-1, +1)}$$

Χρήσιμα θεωρήματα

Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-r, +r)$

δηλ. $|x| < r$

$(r \in (0, +\infty)$ ή $r = +\infty)$

(r: Ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum a_n x^n$)

Τότε ισχύουν τα εξής:

1) $f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots)'$

$= a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$

$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ για $|x| < r$.

2) $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt =$

$= \int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots)\, dt =$

$= a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$

$|x| < r$

T14

4) Αποδείξτε ότι

$$\text{συν}\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

<u>α΄ τρόπος</u>: Όπως $f(x) = \text{ημ}x$

<u>β΄ τρόπος</u>: $\text{ημ}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$

$$\xRightarrow{\text{θεώρημα}} \text{συν}x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$x \in \mathbb{R}$

5) $$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Για $x \in (-1, +1)$

(Σημ. $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

η απόδειξη με κριτήριο Abel ή αριθμό Euler)

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad t \in (-1, +1)$$

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt$$

$$\xRightarrow{\text{θεώρ.}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, +1)$$

6) $$\text{τοξεφ}\,x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,$$

$$x \in (-1, 1)$$

Σημ.: Ισχύει και για $x = 1$, $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$ (Τύπος Leibnitz-G

$$\text{τοξεφ}\,x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \dots$$ [illegible]

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t^2)^n\, dt \overset{\text{Θεώρ.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, +1)$$

7) $\underline{a \in \mathbb{R}}$ $$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \text{ για } x \in (-1, +1)$$

Διωνυμική σειρά

$$\left(\text{π.χ. } \sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n, \; x \in (-1, +1)\right)$$

(Απόδειξη: Βιβλιογραφία ή ΑνΙ, υλικό 2002-2009 σχ. Τα

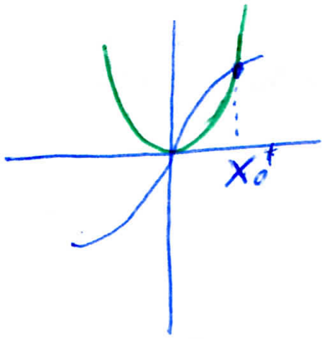
$\underline{\alpha \in \mathbb{R}}$ $$\binom{\alpha}{n} =: \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}$$

Μερικές Εφαρμογές του πολ. Taylor

(Α) Εύρεση ριζών κατά προσέγγιση

Παράδειγμα

Να ευρεθεί κατά προσέγγιση x_0, η ~~μη~~ μηδενική ρίζα x_0^* της εξίσωσης $\eta\mu x = x^2$ με χρήση πολ. Taylor 3ου βαθμού και εκτίμηση $|\eta\mu x_0 - x_0^2|$



$$\eta\mu x \cong x - \frac{x^3}{6} = T_{3,0}(x)$$

προσέγγιση της ρίζας;

$$x_0 - \frac{x_0^3}{6} = x_0^2, \quad x_0 = \sqrt{15} - 3 < 1$$

$$\eta\mu x_0 = x_0 - \frac{x_0^3}{6} + R_{3,0}(x_0) \Rightarrow |\eta\mu x_0 - x_0^2| \leq \frac{(\sqrt{15}-3)^5}{5!} < \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

(B) Υπολογισμός κατά προσέγγιση μη στοιχειωδών ολοκληρωμάτων.

<u>Παραδείγματα</u>

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}dt \,,\quad \int_0^1 ημ(t^2)\,dt \,,\quad \int_0^1 \frac{ημx}{x}\,dx \,, \dots$$

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}dt = \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)}{n!}\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)} \, \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3 1!} + \frac{1}{5\cdot 2^5 2!} \cdots$$

π.χ. για $n=4$

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}dt \cong \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3 1!} + \frac{1}{5\cdot 2^5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 2^7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 2^9\cdot 4!}$$

$$\cong 0,4613\dots$$

Σφάλμα: $e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{e^{+\xi_t}}{5!}t^{10} \,,\ -t^2 < \xi_t$

$$\Rightarrow \int_0^{1/2} e^{-t^2} = 1 - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 2^7 3!} + \frac{1}{9\cdot 2^7\cdot 4!} - \int_0^{1/2} \frac{e^{+\xi_t}\,t^{10}}{5!}$$

$$0 < \varepsilon = \int_0^{1/2} \frac{e^{\xi_t}\, t^{10}}{5!}\,dt \overset{\xi<0}{<} \int_0^{1/2} \frac{t^{10}}{5!}\,dt = \frac{1}{11\cdot 2^{11}\cdot 5!} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-6}.$$

Άρα το $\int_0^{1/2} e^{-t^2}dt$ προσεγγίζεται από την τιμή $0,4613$ με σφάλμα μικρότερο του $\frac{1}{2}\cdot 10^{-6}$

T18

Γ ** Εντοπισμός Ακροτάτων

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, x_0 = κρίσιμο σημείο

δηλ. $f'(x_0)=0$

Έστω

$f''(x) \neq 0$
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ τοπ. ελάχ.
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ τοπ. μέγιστο

- $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$

$f^{(4)}(x_0) \neq 0$
- $f^{(4)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ τοπ. ελ.
- $f^{(4)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ τοπ. μέγ.

⋮

$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$

και $f^{(2n)}(x_0) \neq 0$
- $f^{(2n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ τοπ. ελ.
- $f^{(2n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ τοπ. μέγ.

- Εάν $f''(x_0) = \dots = f^{(2n)}(x_0) = 0$,

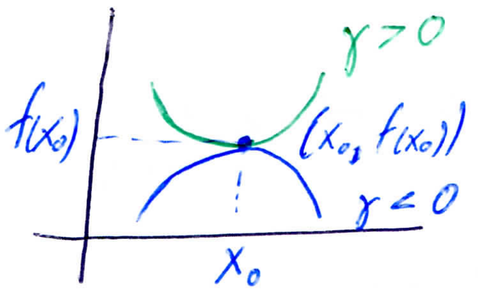
$f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ = σημείο καμπής.

$x \cong x_0$

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}}_{=\gamma \neq 0}(x-x_0)^2$$

$$f(x) \cong f(x_0) + f(x_0) + \gamma(x-x_0)^2$$

(= παραβολή $\gamma \neq 0$)



Άρα: για $x \cong x_0$ η $f(x) \cong$ παραβολή αν $\gamma>0$ η παραβολή έχει ελάχιστο στο x_0, Το ίδιο θα έχει και η f

$$f(x) \cong f(x_0) + \gamma(x-x_0)^{2n}$$

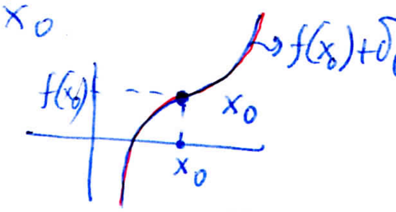
π.χ. (μόνοι μας) $f'(0)=f''(0)=\dots=f^{(5)}(0)=0$, $f^{(6)}(0)>0$ Τοπ. ΕΛΑΧ.

$f(x) = x\,\text{τοξεφ}\,x - \eta\mu^2 x$

$x_0 = 0$. Τι ακρότατο είναι;

Εάν $f(x) \cong f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!}}_{=\delta \neq 0}(x-x_0)$

η $f(x) \cong f(x_0) + \delta(x-x_0)^{2n+1}$ όπου το x_0 είναι σ. καμπής, το ίδιο θα έχει και η f στο x_0



**

Δ) Ανισοτικές σχέσεις

παραδείγματα

1) $|\eta\mu x - x| \leq \frac{1}{6000}$ για $|x| \leq \frac{1}{10}$: $\left(\eta\mu x = x - \frac{\eta\mu^{(3)}(\xi_x)}{3!}x\right)$

2) $|\sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{x^2}{2}| \leq \frac{1}{24}$, $|x| \leq 1$ $\left(\sigma\upsilon\nu x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{\sigma\upsilon\nu^{(4)}(\dots}{4!}\right.$

Ε) Επίλυση Δ.Ε.

Για Σχήματα: Μάθημα 16 $\longrightarrow$ Γ)