

30 - 4

Άσκηση. Έστω $\omega(x,y,z) = x + 2y + z^2$ και σ $\subset \mathbb{R}^3$

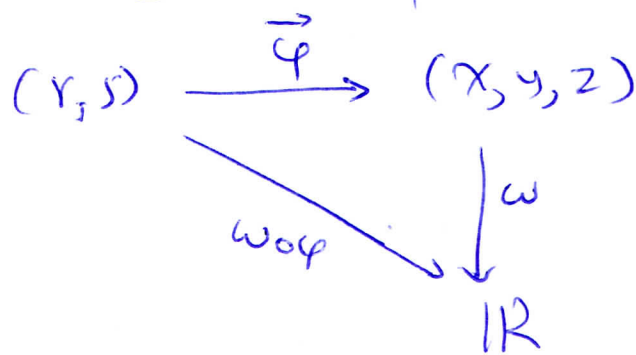
$x = r/s, y = r^2 + \ln s, z = 2s.$

① Να βρεθούν οι $\frac{\partial}{\partial r}(\omega \circ \vec{\varphi}), \frac{\partial}{\partial s}(\omega \circ \vec{\varphi})$ με χρήση του κανόνα της αλυσίδας.

② Επαληθεύσατε το αποτέλεσμα.

Απάντηση.

① Έχουμε ως συναρτήσεις



με $\omega \circ \vec{\varphi}(r,s) = \omega(x(r,s), y(r,s), z(r,s))$
 $= \omega(r/s, r^2 + \ln s, 2s)$

Υπολογίζουμε τους πίνακες των διαφορικών των $\vec{\varphi}, \omega$ στα αντιστοιχα σημεία:

$$J(\vec{\varphi})_{(r_0, s_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{pmatrix}_{(r_0, s_0)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/s & -r/s^2 \\ 2r & 1/s \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{(r_0, s_0)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/s_0 & -r_0/s_0^2 \\ 2r_0 & 1/s_0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ και}$$

$$J(\omega)_{\vec{\varphi}(r_0, s_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} & \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec{\varphi}(r_0, s_0)}$$

$$= (1 \quad 2 \quad 2s)_{\vec{\varphi}(r_0, s_0)}$$

$$= (1 \quad 2 \quad 2z(r_0, s_0))$$

$$= (1 \quad 2 \quad 4s_0).$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας,
 θα έχουμε πως:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}(\omega_0 \vec{\varphi})_{(r_0, s_0)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(\omega_0 \vec{\varphi}) & \frac{\partial}{\partial s}(\omega_0 \vec{\varphi}) \end{pmatrix}_{(r_0, s_0)} \\
 &= \mathcal{J}_{\vec{\varphi}(r_0, s_0)}(\omega) \cdot \mathcal{J}_{(r_0, s_0)}(\vec{\varphi}) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4s_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/s_0 & -r_0/s_0^2 \\ 2r_0 & 1/s_0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1/s_0 + 4r_0 + 8s_0 \\ -r_0/s_0^2 + 2/s_0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/s_0 + 4r_0 + 8s_0 \\ -r_0/s_0^2 + 2/s_0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

(ii) Επαλήθευση:

$$\begin{aligned}
 (\omega_0 \vec{r})(r, s) &= x(r, s) + 2y(r, s) + z^2(r, s) \\
 &= r/s + 2(r^2 + 4rs) + 4s^2
 \end{aligned}$$

οπότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r}(\omega_0 \vec{r})(r, s) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{s} + 2(r^2 + 4rs) + 4s^2 \right) \\
 &= \frac{1}{s} + 4r, \\
 \frac{\partial}{\partial s}(\omega_0 \vec{r})(r, s) &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{r}{s} + 2(r^2 + 4rs) + 4s^2 \right) \\
 &= \frac{1}{s} + \frac{2r}{s} + 8s.
 \end{aligned}$$



Άσκηση. Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, διαφορίσιμη.

Ο τελεστής Laplace $\nabla^2 f$ της f , ορίζεται ως

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad ||$$

(Ορίζουμε $\nabla^2 f \equiv 0 \iff f$ αρμονική)

Εάν $F(r, \varphi) = f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$

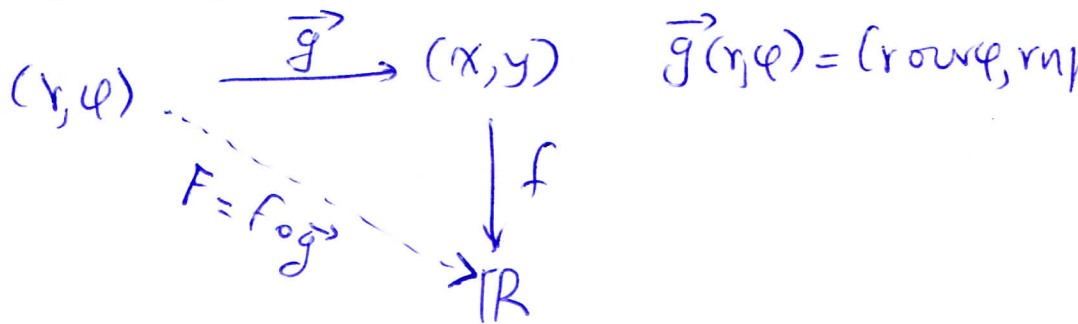
Να αποδειχθεί ότι:

$$(i) \quad \|\nabla f\|^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 \quad ||$$

$$(ii) \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \quad ||$$

Απάντηση. (i) Έχουμε την σύνθεση F

των συναρτήσεων:



Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} f(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \varphi) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi\end{aligned}$$

και επίσης

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} f(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \cos \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \varphi) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \varphi.\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi\right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \left(-r \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \|\nabla f\|^2, \text{ ο.ε.δ.}\end{aligned}$$

(ii) Απαρτητικό. Αφήνεται ως άσκηση.

6 Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
είναι C^1 και ισχύει, $\forall \lambda > 0$,

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

N.S.o. $x \cdot \nabla f(x) = \alpha f(x)$. (Euler)
 $\alpha \in \mathbb{R}$

Απόδ. Θα γενικτοποιήσουμε τον κανόνα
της αλυσίδας. Ορίζουμε

$$\mathbb{R}_\lambda \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n_{(x_1, \dots, x_n)} - \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_\lambda$$

οπότε $\varphi(\lambda) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda))$
και είναι πάντα η σύνθεση $h = f \circ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} h'(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \left\{ f(\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)) \right\} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} \\ &\quad \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \lambda} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot x_n \\ &= \nabla f(\varphi(\lambda)) \cdot x \quad (2) \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε

$$h(\lambda) = f(\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)) = f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \\ = \lambda^a f(x_1, \dots, x_n)$$

από την (1). Παραγωγίζοντας:

$$h'(\lambda) = a \lambda^{a-1} f(x_1, \dots, x_n) \quad (3)$$

Εξισώνοντας ως (2), (3):

$$\nabla f(\varphi(\lambda)) \cdot x = a \lambda^{a-1} f(x)$$

και για $\lambda = 1$:

$$\nabla f(\varphi(1)) \cdot x = \nabla f(x) \cdot x = a f(x)$$

Εφαρμογή. Έστω σωμα μάζας M στο κέντρο

οποίου βρίσκεται στο σημείο $(0,0,0)$ του \mathbb{R}^3 . Έστω

μάζα m τοποθετηθεί στο σημείο $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

τότε θα δειχθεί ότι η δύναμη $\vec{F} = -\nabla V$, όπου V η

συνάρτηση βαρυτικού δυναμικού με νόμο

$$V(x,y,z) = -GMm / (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

(i) Να δείξετε ότι η V είναι ομογενής βαθμού $a =$

(ii) Ισχύει $(x,y,z) \cdot \vec{F} = -V$.

Κατεύθυνση Παράγωγος.

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ανοικτό. Θεωρούμε $\vec{x}_0 \in A$ σταθερό και $\vec{a} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{a}\| = 1$. Κάπως στο A είναι ανοικτό υπάρχει διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ με κέντρο 0, τέτοιο ώστε $\vec{x}_0 + t\vec{a} \in A$ για $t \in I$. Ορίζεται συνεπώς η συνάρτηση $g: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ με τύπο $g(t) = \vec{x}_0 + t\vec{a}$. Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση διαφορίσιμη στο \vec{x}_0 , η σύνθεση $h = f \circ g: I \rightarrow \mathbb{R}$ θα είναι διαφορίσιμη, και από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$h'(t) = \frac{d}{dt} f(\vec{g}(t)) = \nabla f(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t) \\ = \nabla f(\vec{x}_0 + t\vec{a}) \cdot \vec{a}, \quad t \in I$$

Ειδικότερα, θα υπάρχει η $h'(0) = \nabla f(\vec{x}_0)$

Ορισμός. Έστω f ως ανωτέρω. Η κατεύθυνση παράγωγος $D_{\vec{a}} f(\vec{x}_0)$ της f στο $\vec{x}_0 \in A$ προς την κατεύθυνση $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ είναι

$$D_{\vec{a}} f(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{a}$$

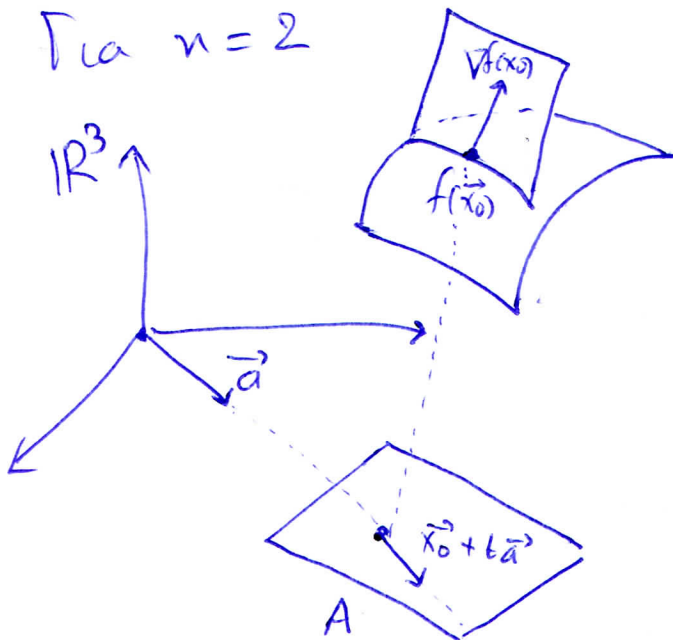
Παρατηρήσεις.

(i) Για $\vec{a} = \vec{e}_i$ το i διάνοιγμα της οριζόντιας βάσης, είναι $D_{\vec{a}} f(\vec{x}_0) = D_{\vec{e}_i} f(\vec{x}_0) = \vec{e}_i \cdot \nabla f(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$.

(ii) Ερμηνεύει η f να μην είναι διαφορίσιμη στο \vec{x}_0 , αλλά η $h'(D)$ να υπάρχει. Ανάλογα η $D_{\vec{a}} f(\vec{x}_0)$ μπορεί να υπάρχει ακόμα και αν το $\nabla f(\vec{x}_0)$ δεν ορίζεται.

(iii) Η ύπαρξη του $D_{\vec{a}} f(\vec{x}_0)$ στο \vec{x}_0 ως προς κάθε $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, δεν συνεπάγεται ούτε καν την συνέχεια της f στο \vec{x}_0 .

Γεωμετρική Ερμηνεία.



Η $D_{\vec{a}} f(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{a}$ μας δίνει την μεταβολή της f στο \vec{x}_0 , για διάφορες κατευθύνσεις \vec{a} .

Ερώση. Για ποιές κατευθύνσεις \vec{a} η

$D_{\vec{a}} f(\vec{x}_0)$ γίνεται μέγιστη/ελάχιστη;

Απάντηση. Από τις ιδιότητες του εσ. γνωρίζουμε

θα έχουμε πως

- Η $D_{\vec{a}} f(\vec{x}_0)$ είναι μέγιστη όταν $\vec{a} = \frac{\nabla f(\vec{x}_0)}{\|\nabla f(\vec{x}_0)\|}$

- Η $D_{\vec{a}} f(\vec{x}_0)$ είναι ελάχιστη όταν $\vec{a} = -\frac{\nabla f(\vec{x}_0)}{\|\nabla f(\vec{x}_0)\|}$

Άσκηση. Έστω $f(x,y,z) = xyz e^{x^2+y^2+z^2}$. Να υπολογιστεί η $D_{\vec{a}} f(0,1,1)$ στην κατεύθυνση $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

Απάντηση. Υπολογίζουμε το $\nabla f(0,1,1) =$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{(0,1,1)} = \left(\frac{\partial}{\partial x} (xyz e^{x^2+y^2+z^2}), \frac{\partial}{\partial y} (xyz e^{x^2+y^2+z^2}), \frac{\partial}{\partial z} (xyz e^{x^2+y^2+z^2}) \right)$$

$$= \left(yze^{x^2+y^2+z^2} + 2x^2ye^{x^2+y^2+z^2}, xze^{x^2+y^2+z^2} + 2xy^2e^{x^2+y^2+z^2}, xye^{x^2+y^2+z^2} + 2xyz^2e^{x^2+y^2+z^2} \right)$$

$$= (e^2, 0, 0) \text{ και άρα } D_{\vec{a}} f(0,1,1) =$$

$$= \nabla f(0,1,1) \cdot \vec{a} = \frac{e^2}{\sqrt{2}}$$

Άσκηση. Έστω $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ και το σημείο $(1,1,1)$. Για ποιές κατευθύνσεις \vec{a} η $D_{\vec{a}}f(1,1,1)$ παρουσιάζει μέγιστη αύξηση; Για ποιές ελάχιστη; Για ποιές μηδενική;

Απάντηση. Η σχέση $f(x,y,z) = c$, $c > 0$ ορίζει μια σφαίρα στον \mathbb{R}^3 , ακτίνας \sqrt{c} .
 Είναι $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$
 άρα $\nabla f(1,1,1) = (2, 2, 2)$.
 Από τα προηγούμενα,

Η αύξηση είναι μέγιστη όταν $\vec{a} = \frac{\nabla f(1,1,1)}{\|\nabla f(1,1,1)\|}$

$$= \frac{(2, 2, 2)}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1).$$

Η αύξηση είναι ελάχιστη όταν $\vec{a} = -\frac{\nabla f(1,1,1)}{\|\nabla f(1,1,1)\|}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1).$$

Για μηδενική αύξηση, θέτουμε $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και επιβάδουμε την $D_{\vec{a}}f(1,1,1) = 0$.

(Άσκηση!)