Διανυσματικός Λογισμός

Όρια - Συνέχεια - Διαφόριση

Μερική Παράγωγος

Μερική Παράγωγος

Έστω $f: A\left(\subseteq \mathbb{R}^2\right) \to \mathbb{R}$, A ανοικτό σύνολο και $\left(x_0, y_0\right) \in A$.

Ορισμός: Μερική παράγωγος ως προς x (αντ. ως προς y) στο σημείο $\left(x_0, y_0\right)$ είναι η παράγωγος της f ως προς x στο x_0 (αντ. ως προς y στο y_0), όπου έχουμε κρατήσει το y σταθερό και ίσο με y_0 (αντ. το x σταθερό και ίσο με x_0).
Δηλαδή:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0 + h, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0, y_0 + h\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{h}$$

Τι σημαίνει όμως αυτό γεωμετρικά;

Παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ και θέλουμε να

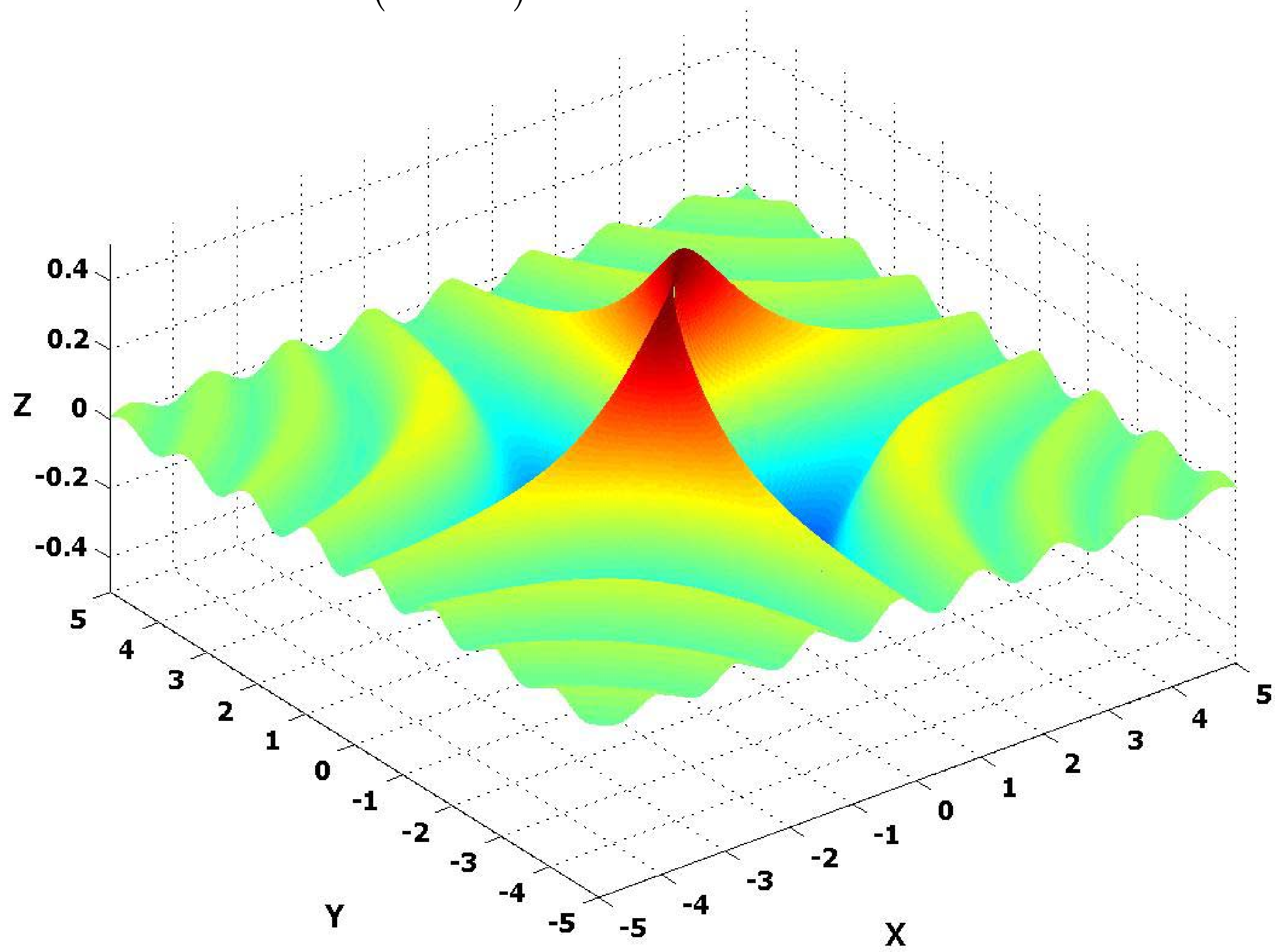
υπολογίσουμε τη μερική παράγωγό της ως προς x στο σημείο (1,-2).
Δηλαδή:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2)=;$$

Ο ορισμός λέει ότι κρατάμε το y σταθερό (στην περίπτωση μας σταθερό και ίσο με -2) και παραγωγίζουμε την f στο σημείο x=1.

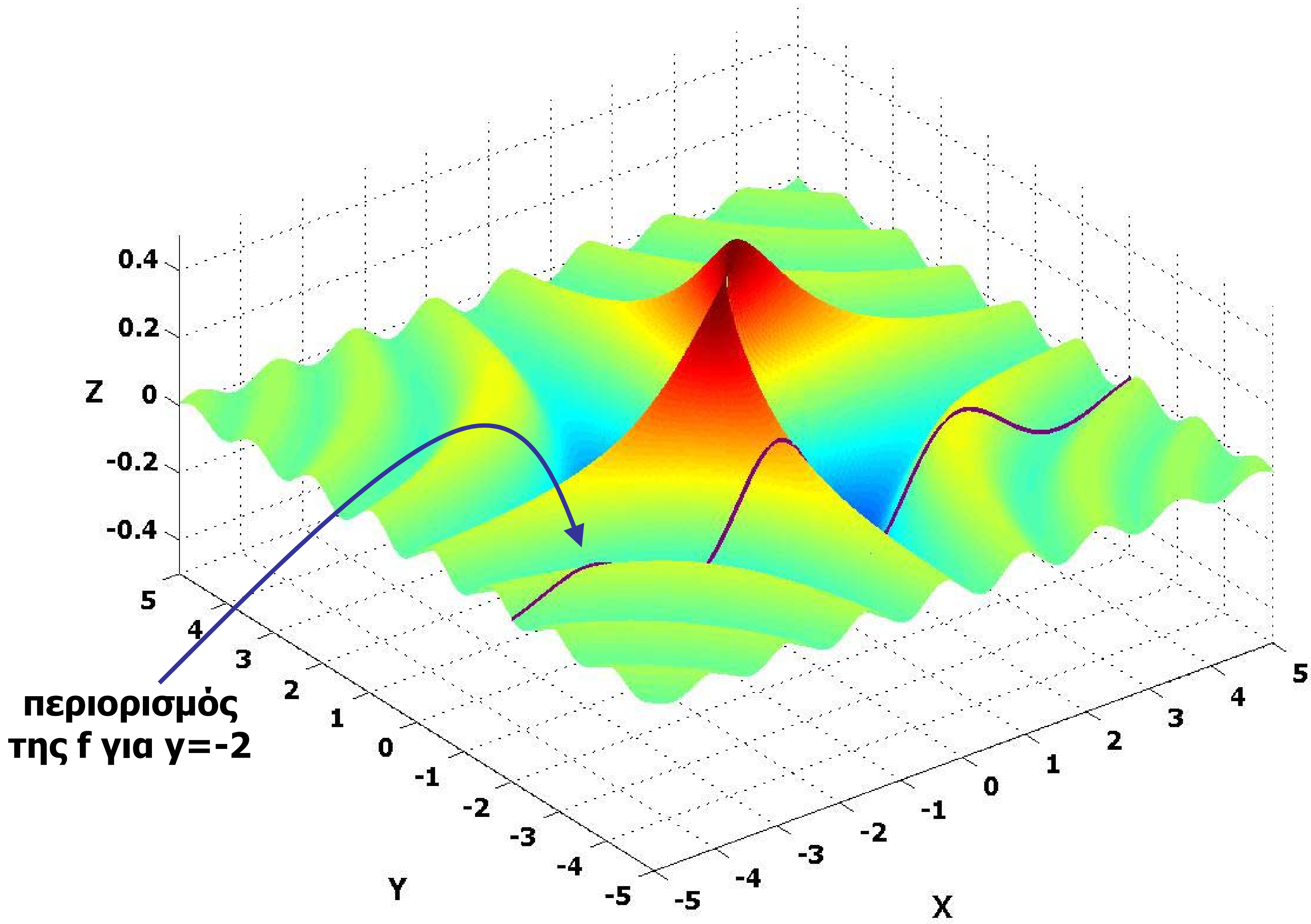
Έχουμε τη συνάρτησή μας...

$$f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{\left(x^2+y^2\right)},\ \ (x,y)\in[-5,5]\times[-5,5]\setminus\{(0,0)\}$$

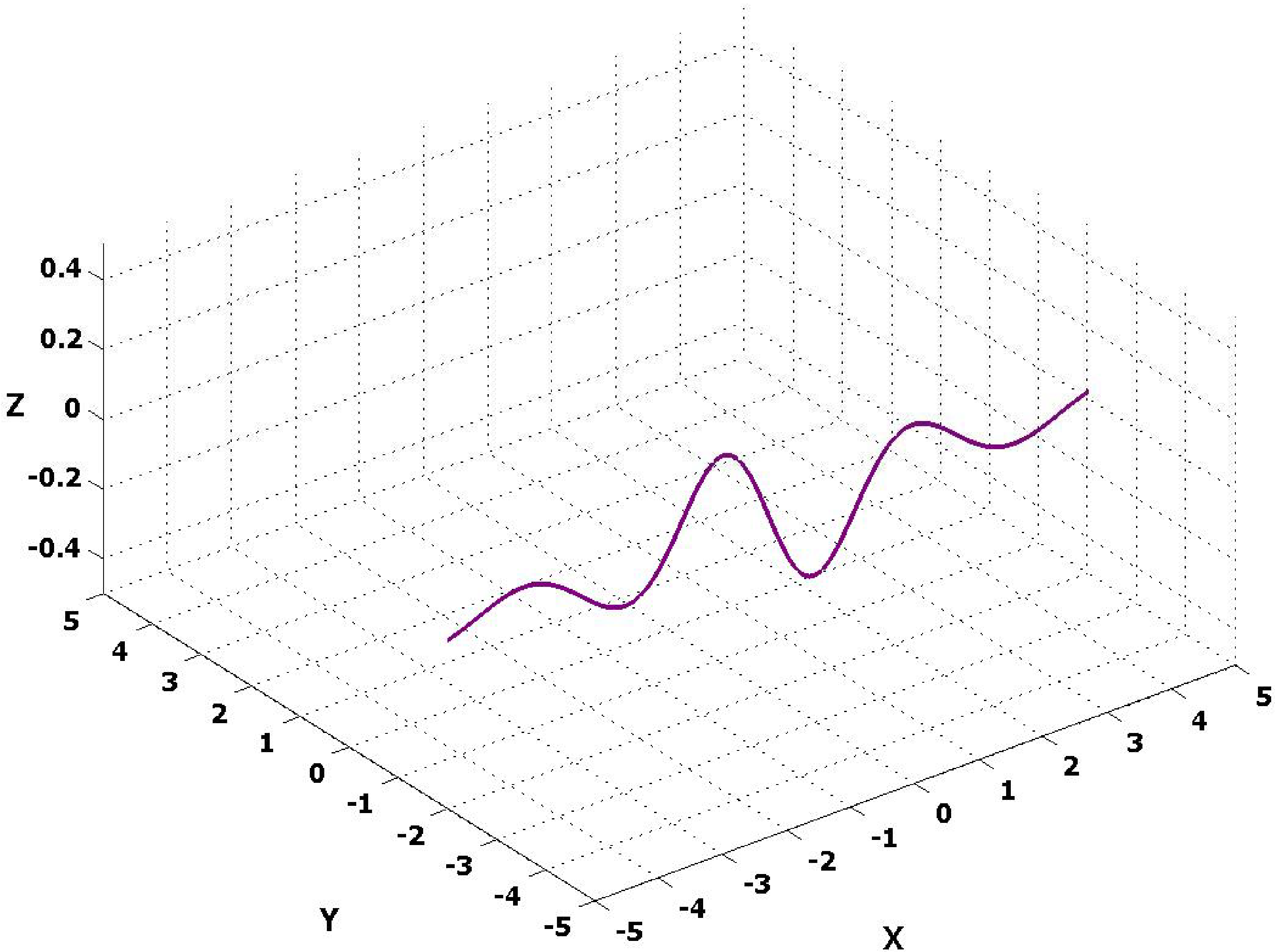


Παίρνουμε τον περιορισμό της για y=-2

(δηλαδή το μέρος της συνάρτησης που αντιστοιχεί για y=-2)



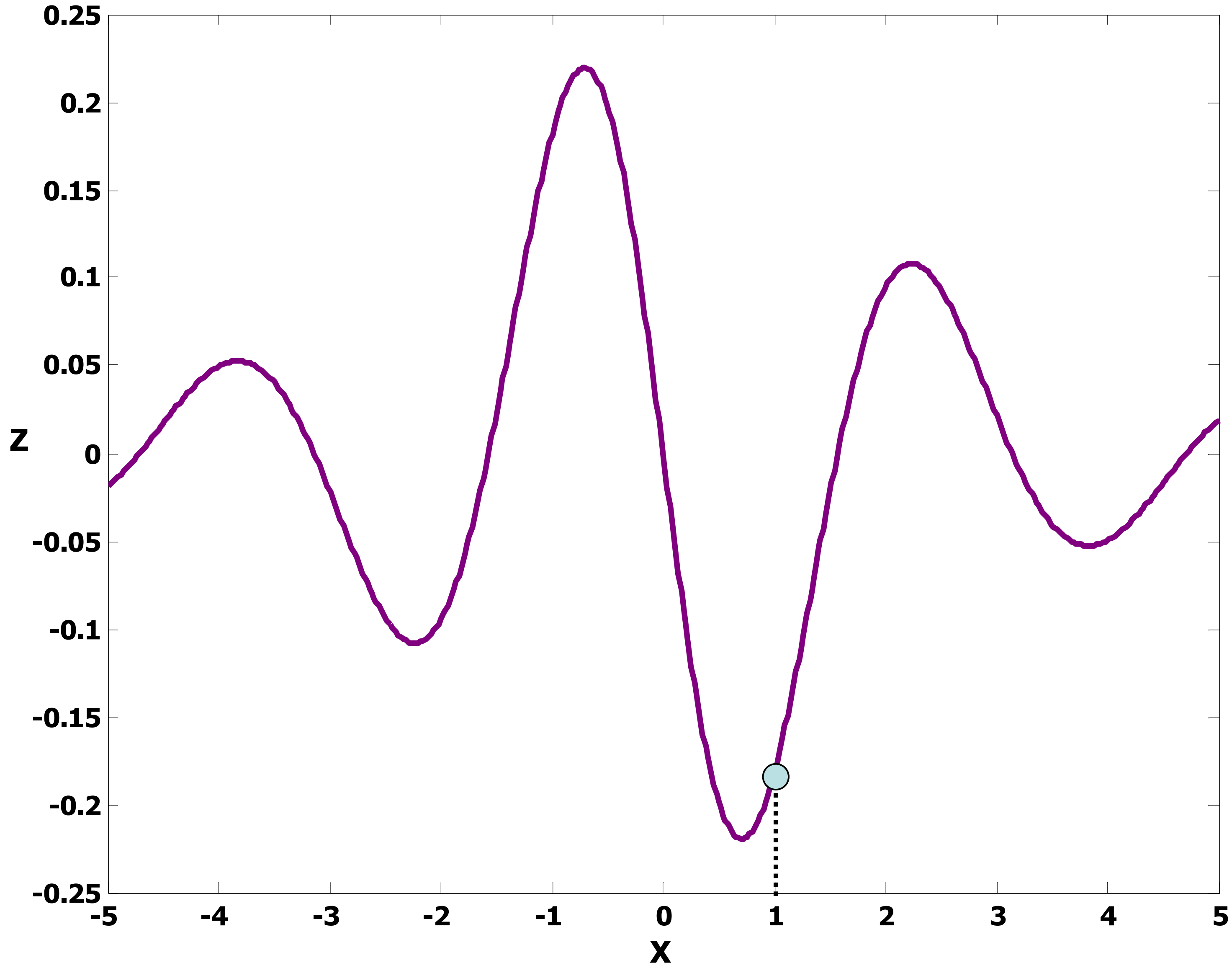
Απομονώνουμε τώρα αυτόν τον περιορισμό…



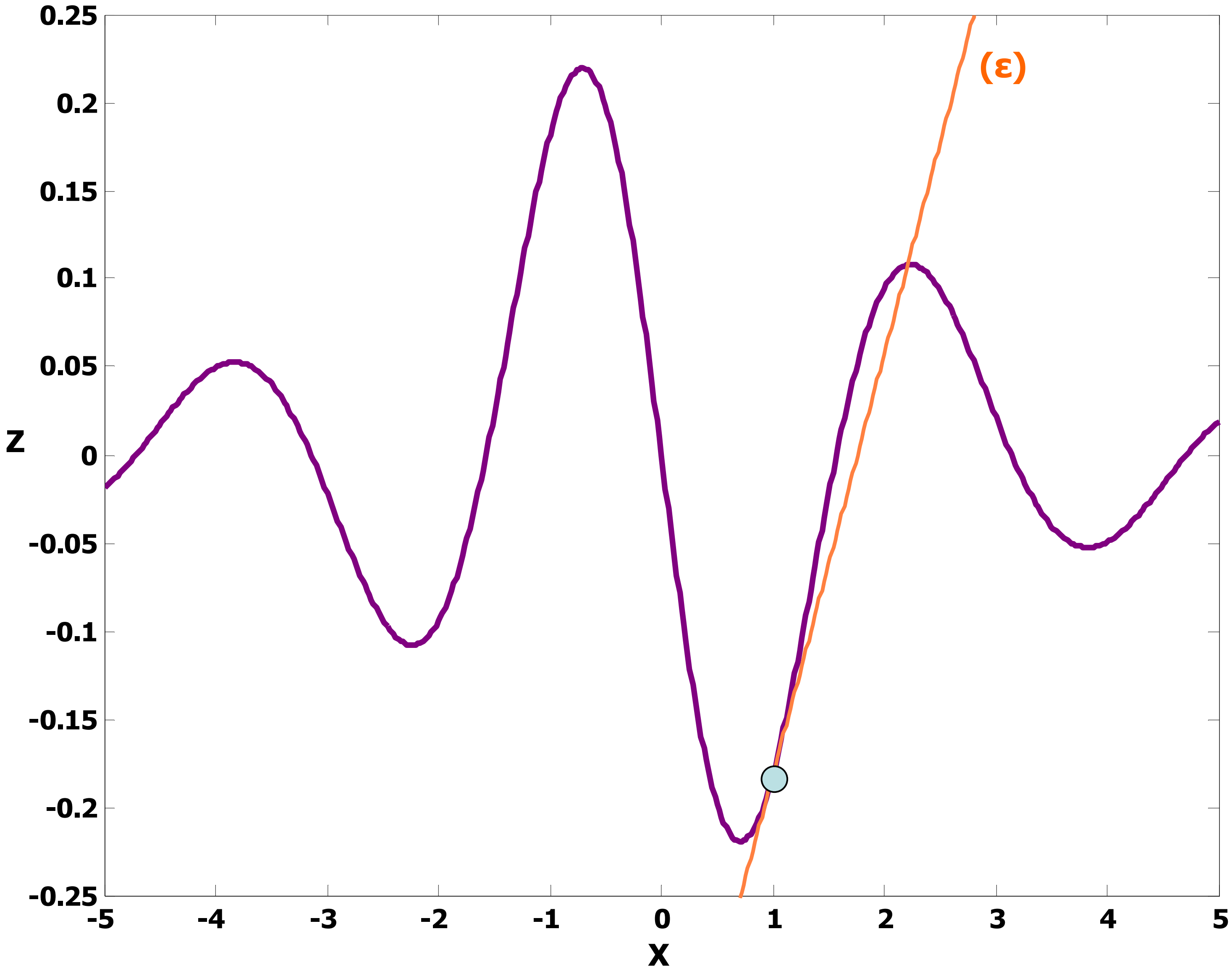
… και για να τον δούμε καλύτερα

τον παρουσιάζουμε στις 2 διαστάσεις

Η μερική παράγωγος που αναζητούμε είναι η παράγωγος αυτής της συνάρτησης ως προς x στο σημείο x=1.



Η κλίση της (ε) μας δίνει το ζητούμενο $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$



Κατευθυνόμενη Παράγωγος

Κατευθυνόμενη Παράγωγος

Έστω $f: A\left(\subseteq \mathbb{R}^2\right) \to \mathbb{R}$, A ανοικτό σύνολο, $\vec{a} = \left(x_0, y_0\right) \in A$ και $\vec{u} = \left(u_1, u_2\right) \in \mathbb{R}^2$ τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός: Κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\vec{a}$ προς την κατεύθυνση του $\vec{u}$ ονομάζεται ο ρυθμός μεταβολής της f κατά μήκος ευθείας που περνά από το $\vec{a}$ και είναι παράλληλη προς το $\vec{u}$. Δηλαδή:

$$D_{\vec{u}} f\left(\vec{a}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\vec{a}+h\cdot\vec{u}\right)-f\left(\vec{a}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\cdot u_1, y_0+h\cdot u_2\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}$$

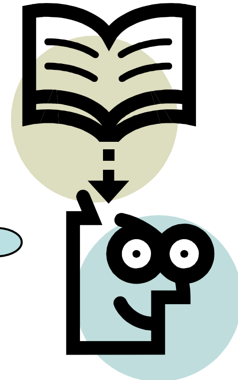
Τι σημαίνει όμως αυτό γεωμετρικά;

Στη μερική παράγωγο βρίσκουμε τον περιορισμό της f ως προς μια ευθεία παράλληλη στον άξονα y ή x (μερική ως προς x ή ως προς y αντίστοιχα) και στη συνέχεια παραγωγίζουμε τη συνάρτηση που μας προκύπτει.

Η **μόνη διαφορά** της κατευθυνόμενης από της μερικής παραγώγου είναι ότι τώρα περιορίζουμε την f ως **προς μια ευθεία που περνά από ένα σημείο του πεδίου ορισμού της και είναι παράλληλη με ένα τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα u**.

Έπειτα και πάλι παραγωγίζουμε τη συνάρτηση που μας προκύπτει.

Η μερική παράγωγος δηλαδή
είναι ειδική περίπτωση της
κατευθυνόμενης…!



Παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{\sin\left(2x^2+3y^2\right)}{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ και θέλουμε να υπολογίσουμε την κατευθυνόμενη παράγωγο ως προς το διάνυσμα $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ στο σημείο (-1,-2). Δηλαδή:

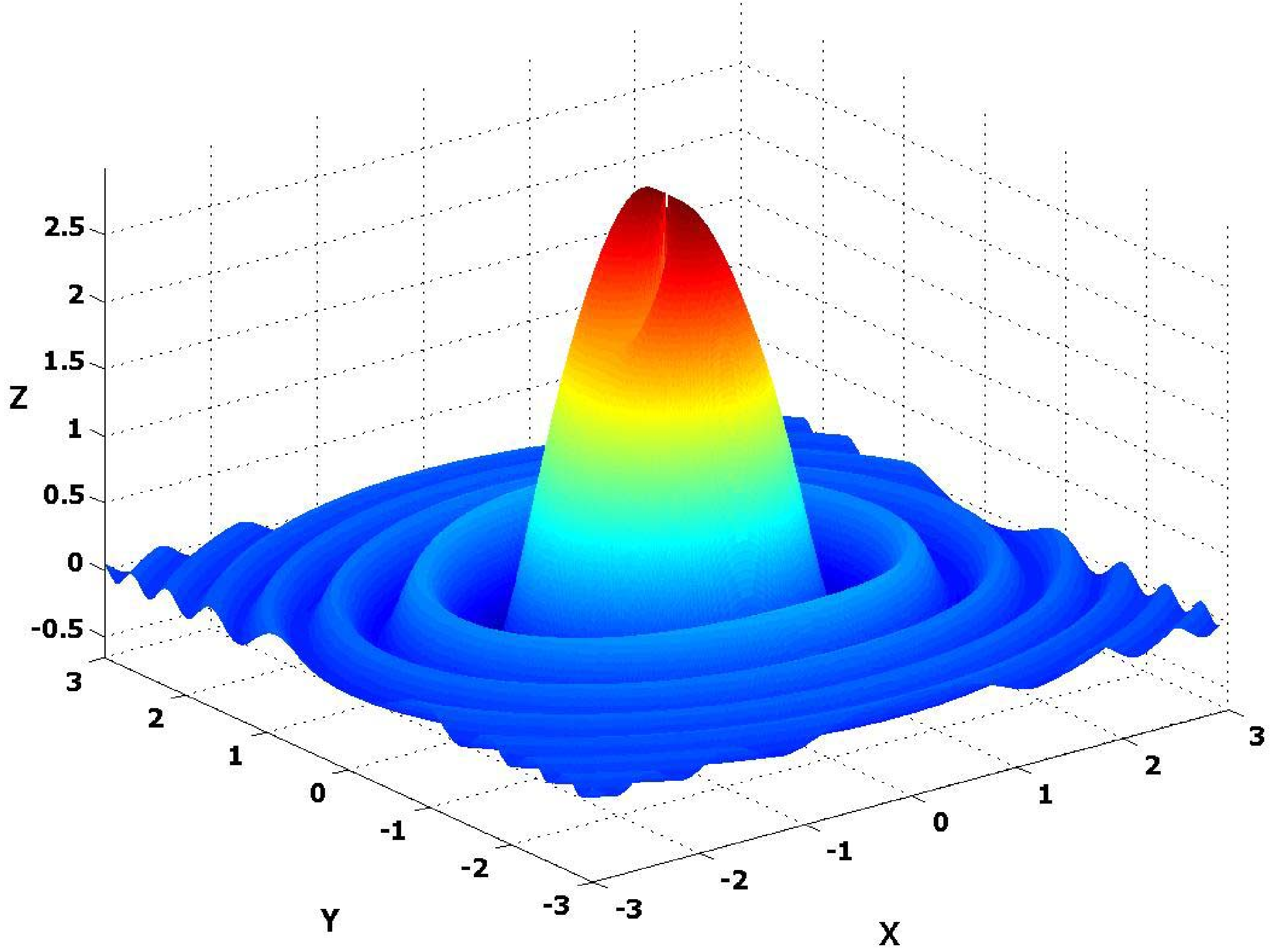
$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}f(-1,-2)=;$$

Η καρτεσιανή εξίσωση της ευθείας που περνά από το (-1,-2) και είναι παράλληλη στο $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ είναι η: $y=x-1$

Ο ορισμός λέει ότι περιορίζουμε την f στην ευθεία $y=x-1$ και παραγωγίζουμε τη συνάρτηση που θα μας προκύψει στο σημείο (-1,-2).

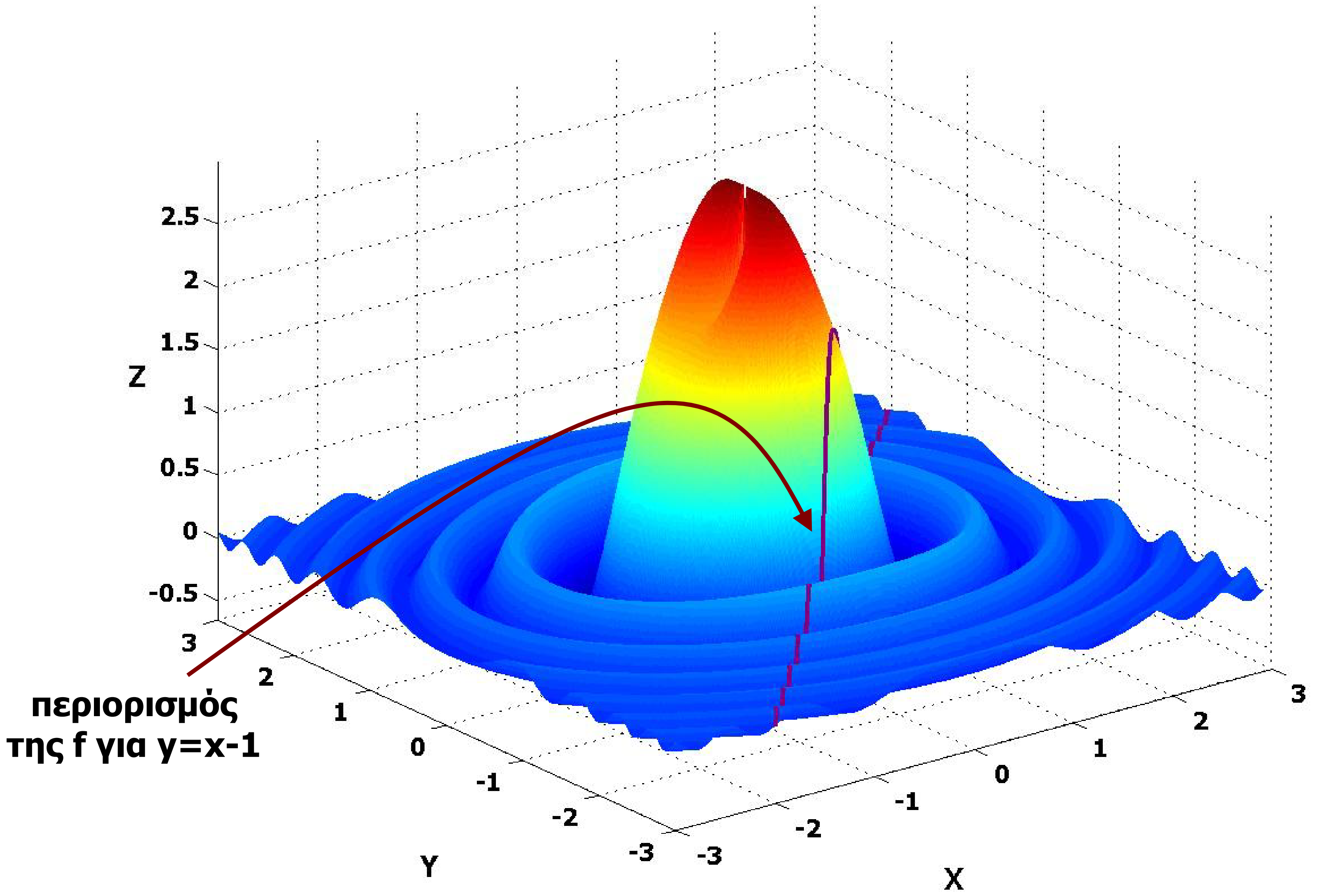
Έχουμε τη συνάρτησή μας...

$$f(x,y)=\frac{\sin\left(2x^2+3y^2\right)}{x^2+y^2},\ \ (x,y)\in[-3,3]\times[-3,3]\setminus\{(0,0)\}$$

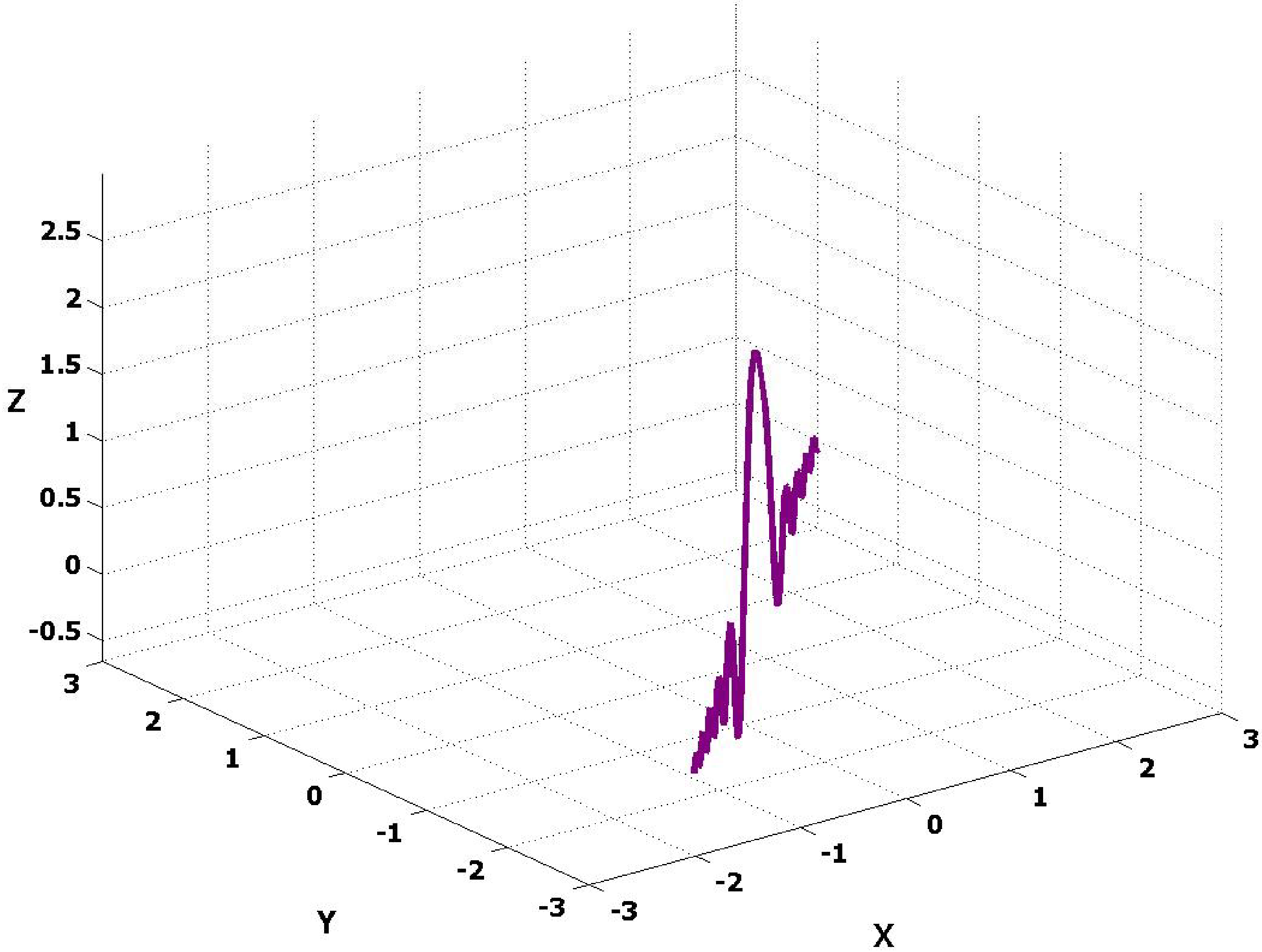


Παίρνουμε τον περιορισμό της για y=x-1

(δηλαδή το μέρος της συνάρτησης που αντιστοιχεί για y=x-1)



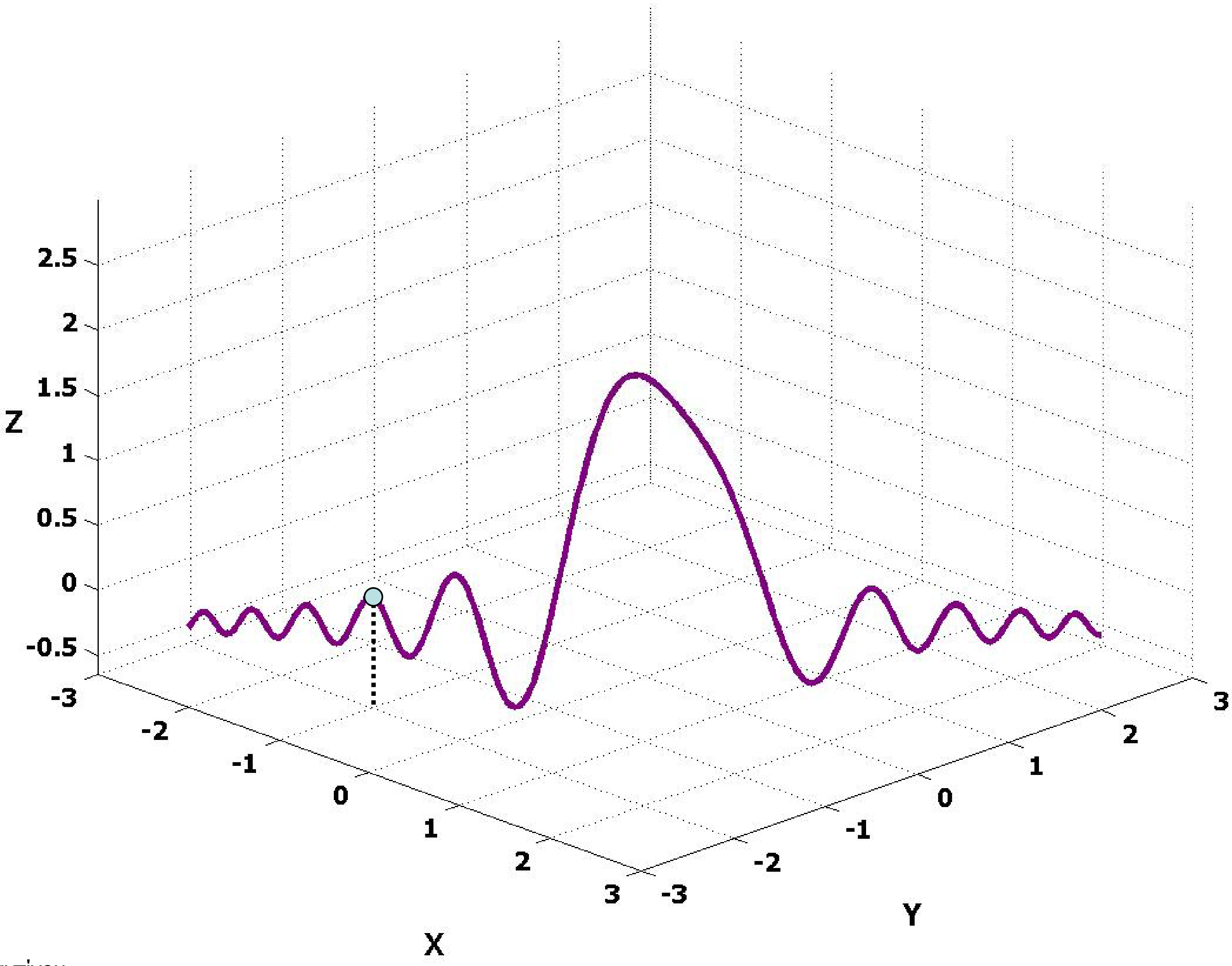
Απομονώνουμε τώρα αυτόν τον περιορισμό…



… και για να τον δούμε καλύτερα

περιστρέφουμε λίγο τους άξονες

Η κατευθυνόμενη παράγωγος που αναζητούμε είναι η παράγωγος αυτής της συνάρτησης ως προς x στο σημείο x=-1.



Διαφορικό

Διαφορικό

Έστω $f: A\left(\subseteq \mathbb{R}^d\right) \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in A$, Α ανοικτό σύνολο.

Ορισμός: Η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{x}_0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ u: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ γραμμική και q: $S\left(\vec{0},\varepsilon\right) \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{\vec{h}\to\vec{0}} q\left(\vec{h}\right) = 0$

τέτοιες ώστε $f\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) = f\left(\vec{x}_0\right) + u\left(\vec{h}\right) + \left\|\vec{h}\right\| q\left(\vec{h}\right)$

ή ισοδύναμα

$\Leftrightarrow$ $\exists$ u: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ γραμμική τέτοια ώστε $\lim\limits_{\vec{h}\to\vec{0}} \dfrac{f\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - f\left(\vec{x}_0\right) - u\left(\vec{h}\right)}{\left\|\vec{h}\right\|} = 0$

Τη **μοναδική** αυτή συνάρτηση u συμβολίζουμε με $df\left(\vec{x}_0\right)$ και ονομάζουμε διαφορικό της f στο $\vec{x}_0$.

Για $d = 1$ έχουμε:

$f: A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, A ανοικτό σύνολο

$$df(x_0)(h) = \frac{d}{dx} f(x_0) \cdot h, \; h \in \mathbb{R}$$

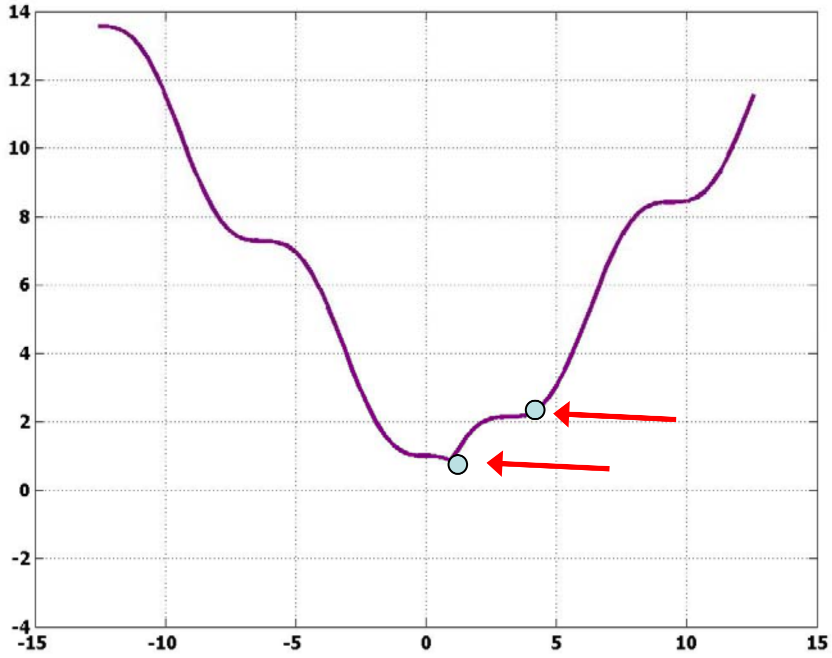
<u>Παράδειγμα</u> :

Η $f(x) = \sin x + |x|, \; x \in [-4\pi, 4\pi]$

έχει σε όλα τα σημεία της διαφορικό εκτός από το σημείο $x = 0$

Ας δούμε για το σημείο $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

$f(x) = \sin x + |x| \;\; x \in [-4\pi, 4\pi]$



Για $d = 1$ έχουμε:

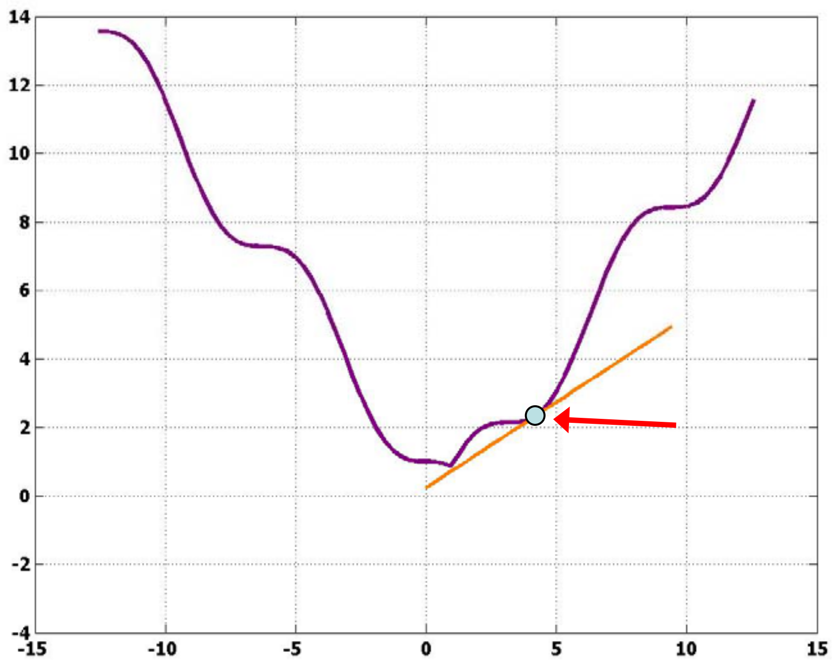
$$f: A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ x_0 \in A,\ A \text{ ανοικτό σύνολο}$$

$$df(x_0)(h) = \frac{d}{dx} f(x_0) \cdot h,\ h \in \mathbb{R}$$

Έχουμε την **εφαπτόμενη ευθεία**.

Το **διαφορικό** είναι η ευθεία αυτή, αν την μεταφέρουμε στην αρχή των αξόνων...!

$$f(x) = \sin x + |x| \quad x \in [-4\pi, 4\pi]$$

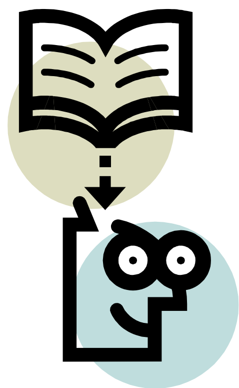


Για $d = 1$ έχουμε:

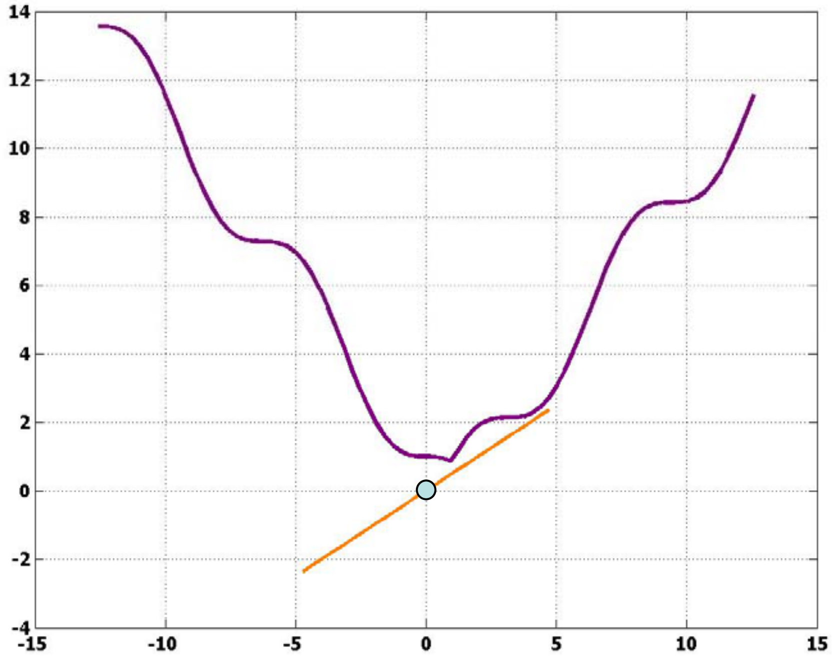
$$f: A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ x_0 \in A,\ A \text{ ανοικτό σύνολο}$$

$$df(x_0)(h) = \frac{d}{dx} f(x_0) \cdot h,\ h \in \mathbb{R}$$

Αυτό γιατί το διαφορικό είναι εξ' ορισμού **γραμμική συνάρτηση** και **πρέπει** να περνά από την αρχή των αξόνων.



$f(x) = \sin x + |x| \quad x \in [-4\pi, 4\pi]$



Για $d = 2$ έχουμε:

$$f: A\left(\subseteq \mathbb{R}^2\right) \to \mathbb{R},\ \left(x_0, y_0\right) \in A,\ A \text{ ανοικτό σύνολο}$$

$$df\left(x_0, y_0\right)\left(h_1, h_2\right) = \frac{\partial}{\partial x} f\left(x_0, y_0\right) \cdot h_1 + \frac{\partial}{\partial y} f\left(x_0, y_0\right) \cdot h_2,\ \left(h_1, h_2\right) \in \mathbb{R}^2$$

<u>Παράδειγμα</u> :

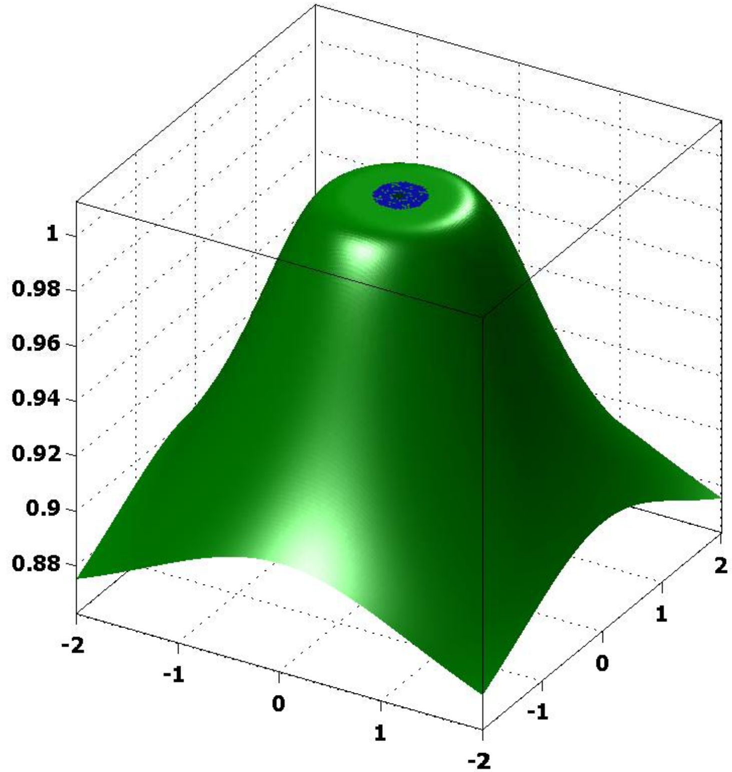
Η $f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}} \sin\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right)$,

$(x,y) \in [-2,2] \times [-2,2] \setminus \{(0,0)\}$

έχει διαφορικό σε όλα τα σημεία της.

Ας δούμε για το σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}} \sin\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right),\ (x,y) \in [-2,2] \times [-2,2] \setminus \{(0,0)\}$$



Για $d = 2$ έχουμε:

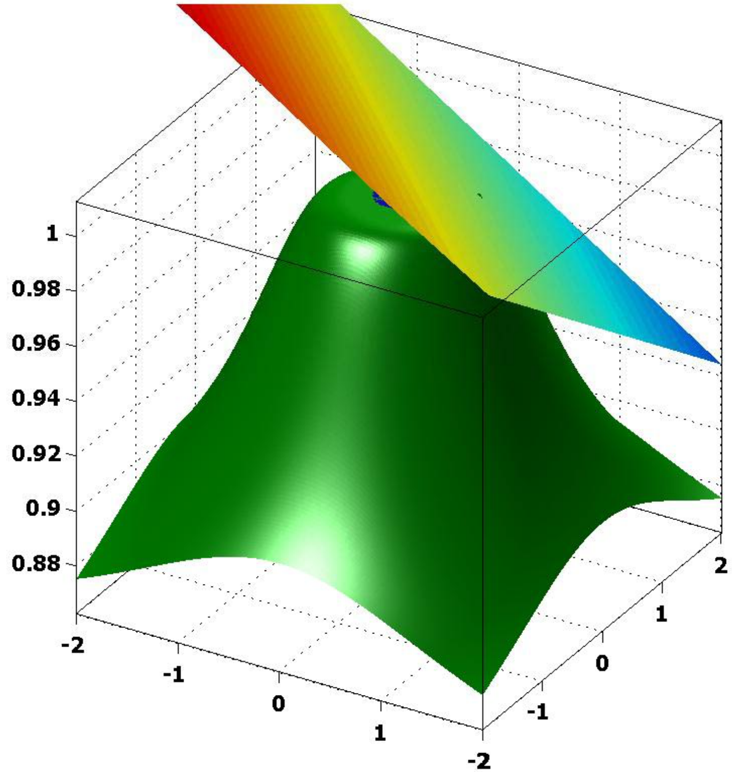
$$f: A\left(\subseteq \mathbb{R}^2\right) \to \mathbb{R},\ \left(x_0, y_0\right) \in A,\ A \text{ ανοικτό σύνολο}$$

$$df\left(x_0, y_0\right)\left(h_1, h_2\right) = \frac{\partial}{\partial x} f\left(x_0, y_0\right) \cdot h_1 + \frac{\partial}{\partial y} f\left(x_0, y_0\right) \cdot h_2,\ \left(h_1, h_2\right) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}} \sin\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right),\ (x,y) \in [-2,2]\times[-2,2] \setminus \{(0,0)\}$$

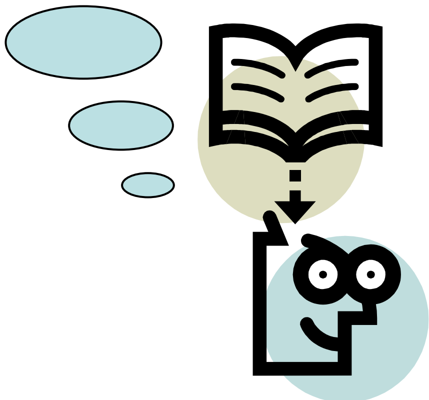
Έχουμε το **εφαπτόμενο επίπεδο**.

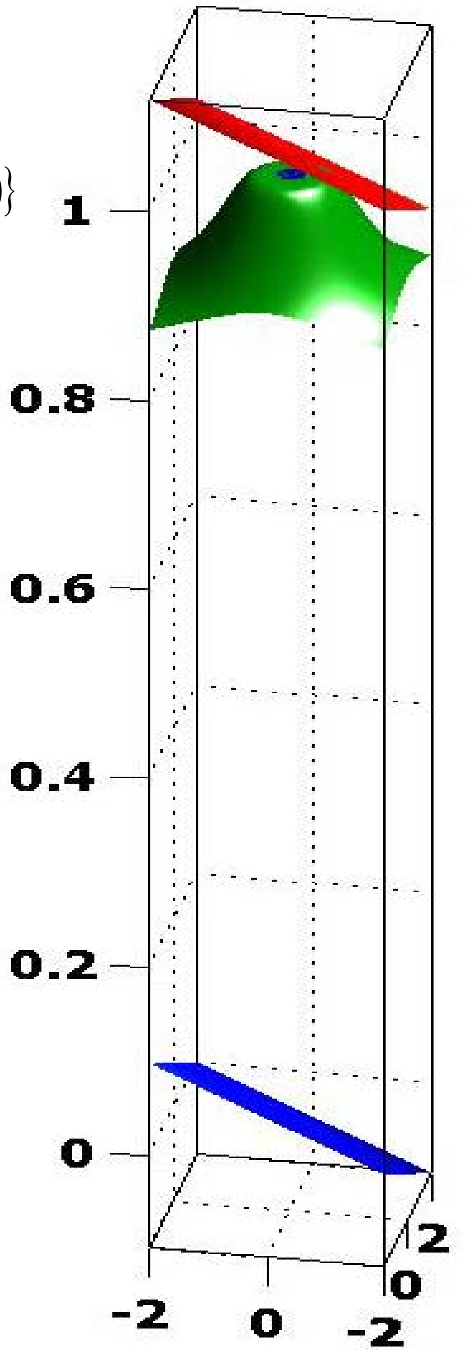
Το **διαφορικό** είναι το επίπεδο αυτό, αν το μεταφέρουμε στην αρχή των αξόνων...!



$$f(x,y)=e^{\frac{1}{x^2+y^2}}\sin\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right),\ (x,y)\in[-2,2]\times[-2,2]\setminus\{(0,0)\}$$

Βλέπουμε ότι η **μόνη** σχέση που έχουν το διαφορικό και το εφαπτόμενο επίπεδο είναι ότι είναι παράλληλα!

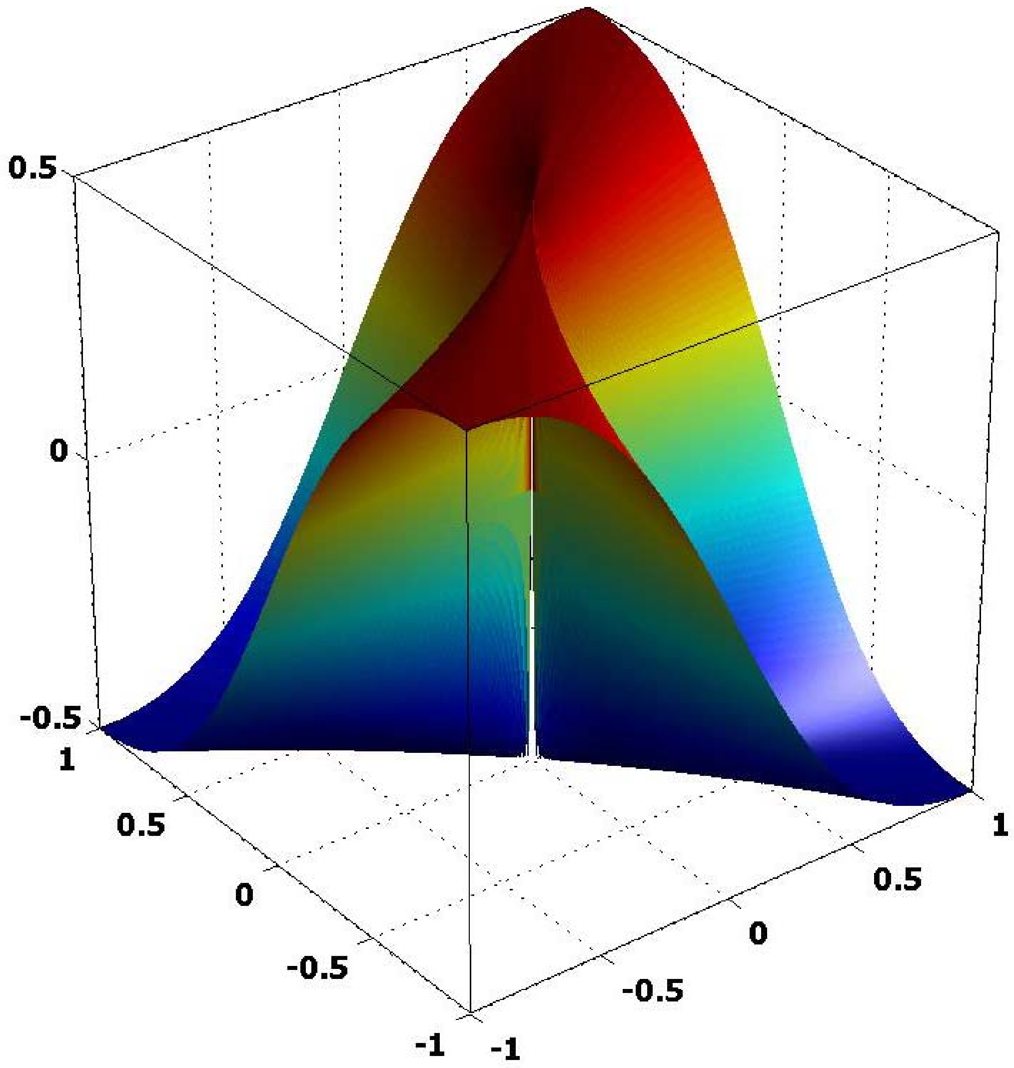




Ασκήσεις - Παραδείγματα

1.

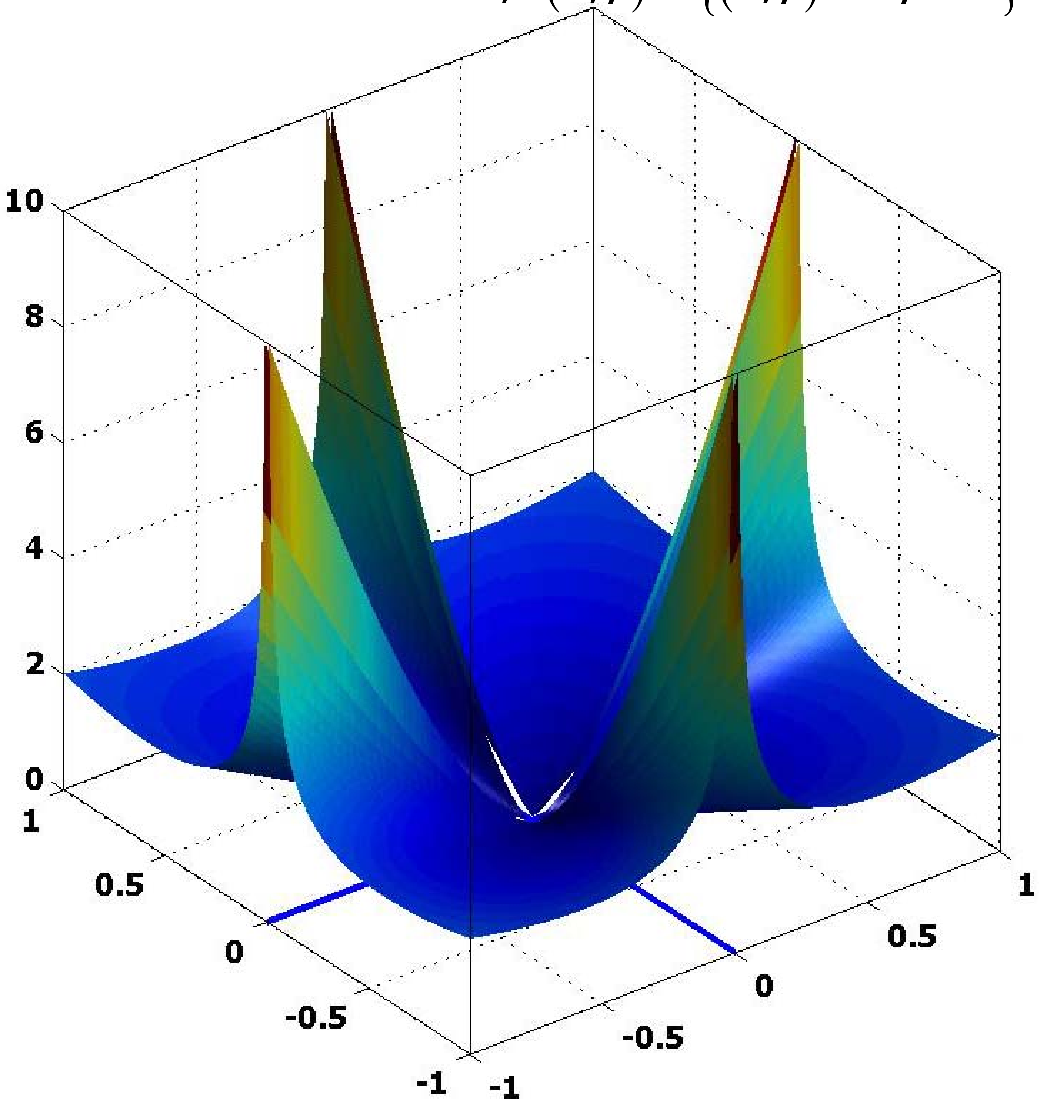
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \in [-1,1]\times[-1,1] \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



- Είναι ασυνεχής στο (0,0)
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
- $\nexists\ D_{\vec{u}}(0,0)$
  $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\pm\vec{e}_1, \pm\vec{e}_2\}$
- $\nexists\ df(0,0)$

2.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{|xy|}} & (x,y) \in [-1,1]\times[-1,1] \setminus \{(x,y):\ xy=0\} \\ 0, & (x,y) \in \{(x,y):\ xy=0\} \end{cases}$$

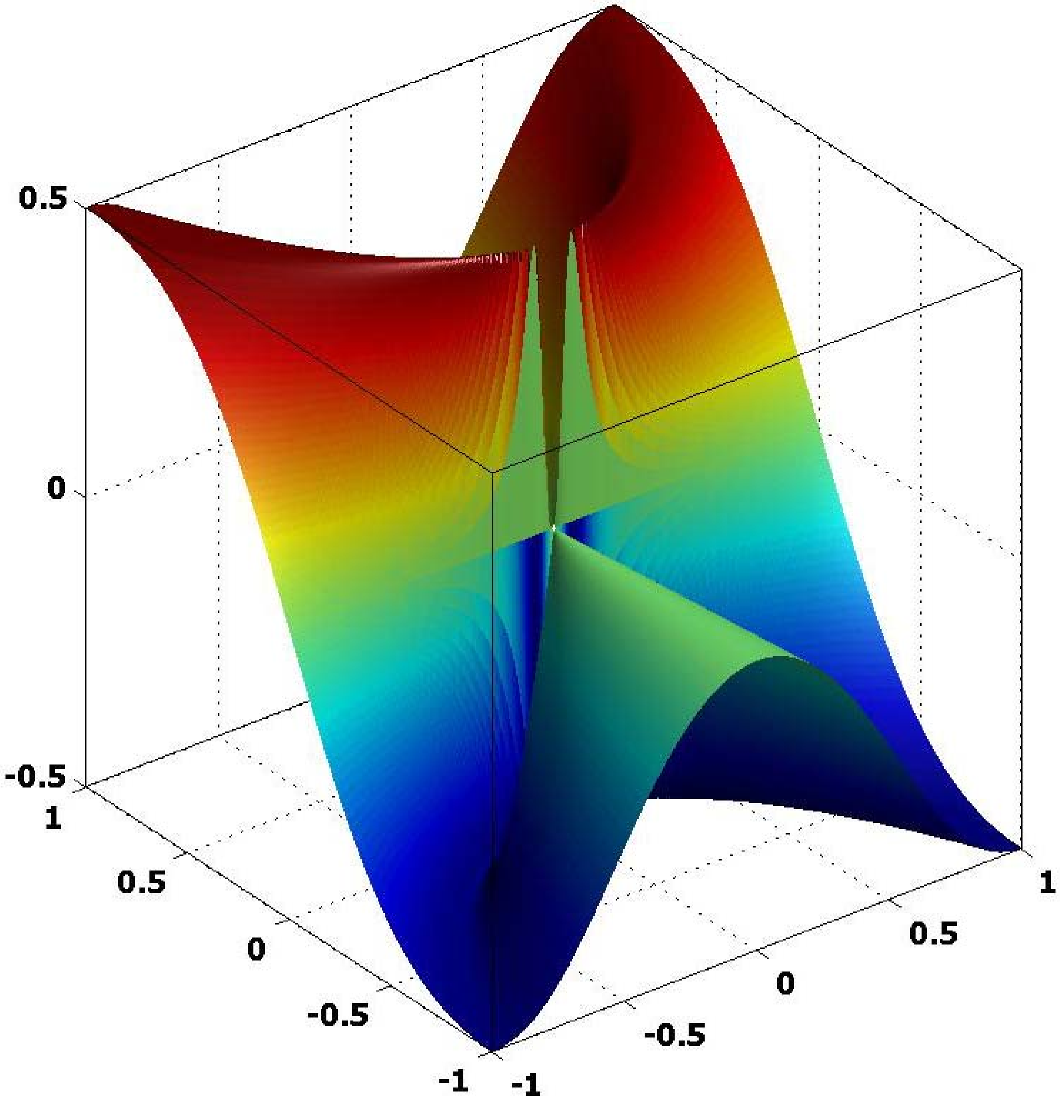


- Είναι ασυνεχής στο (0,0)
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
- $\nexists\ D_{\vec{u}}(0,0)$

  $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\pm\vec{e}_1, \pm\vec{e}_2\}$
- $\nexists\ df(0,0)$

3.

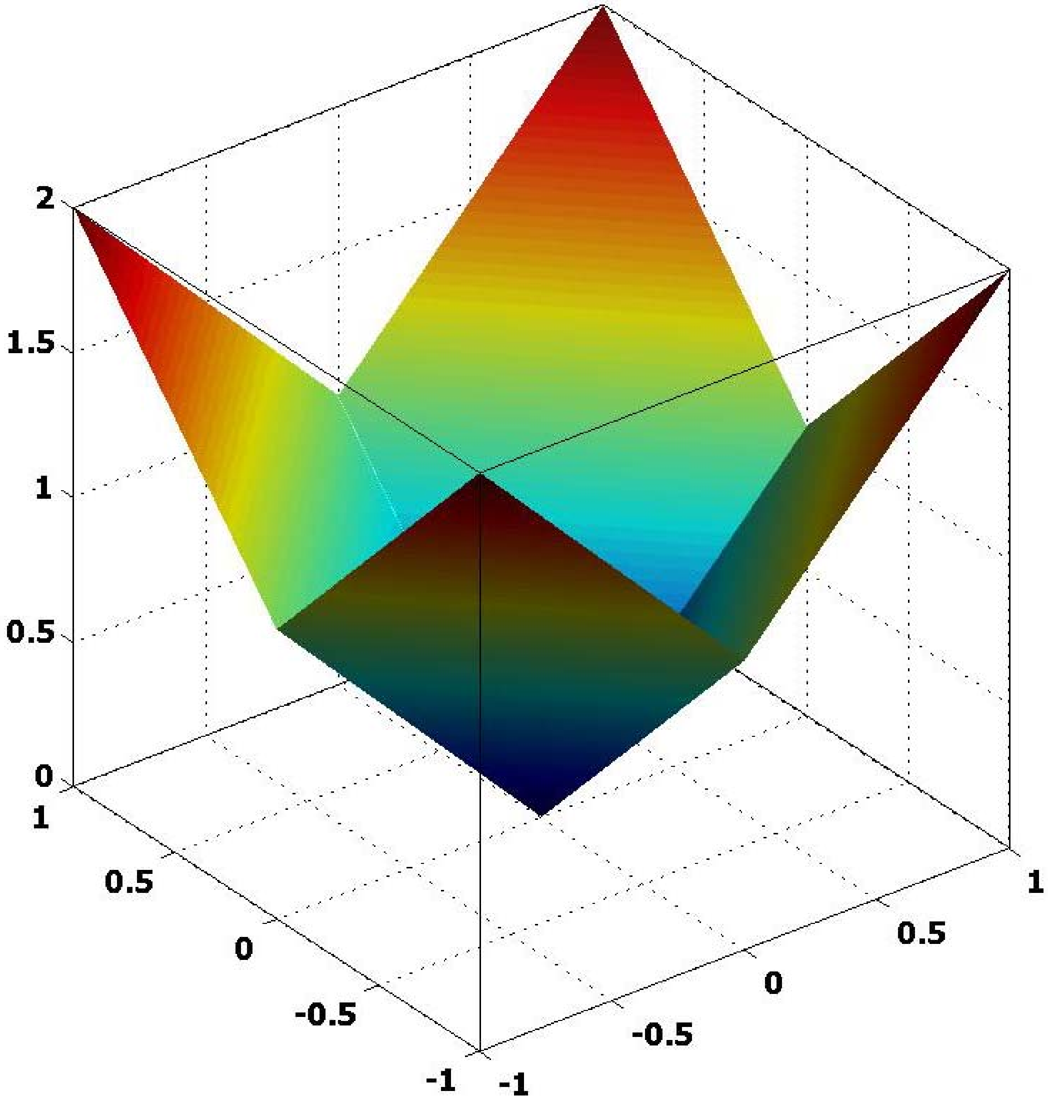
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x,y) \in [-1,1] \times [-1,1] \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



- Είναι ασυνεχής στο (0,0)
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
- $\exists\ D_{\bar{u}}(0,0)$
- $\nexists\ df(0,0)$

4.

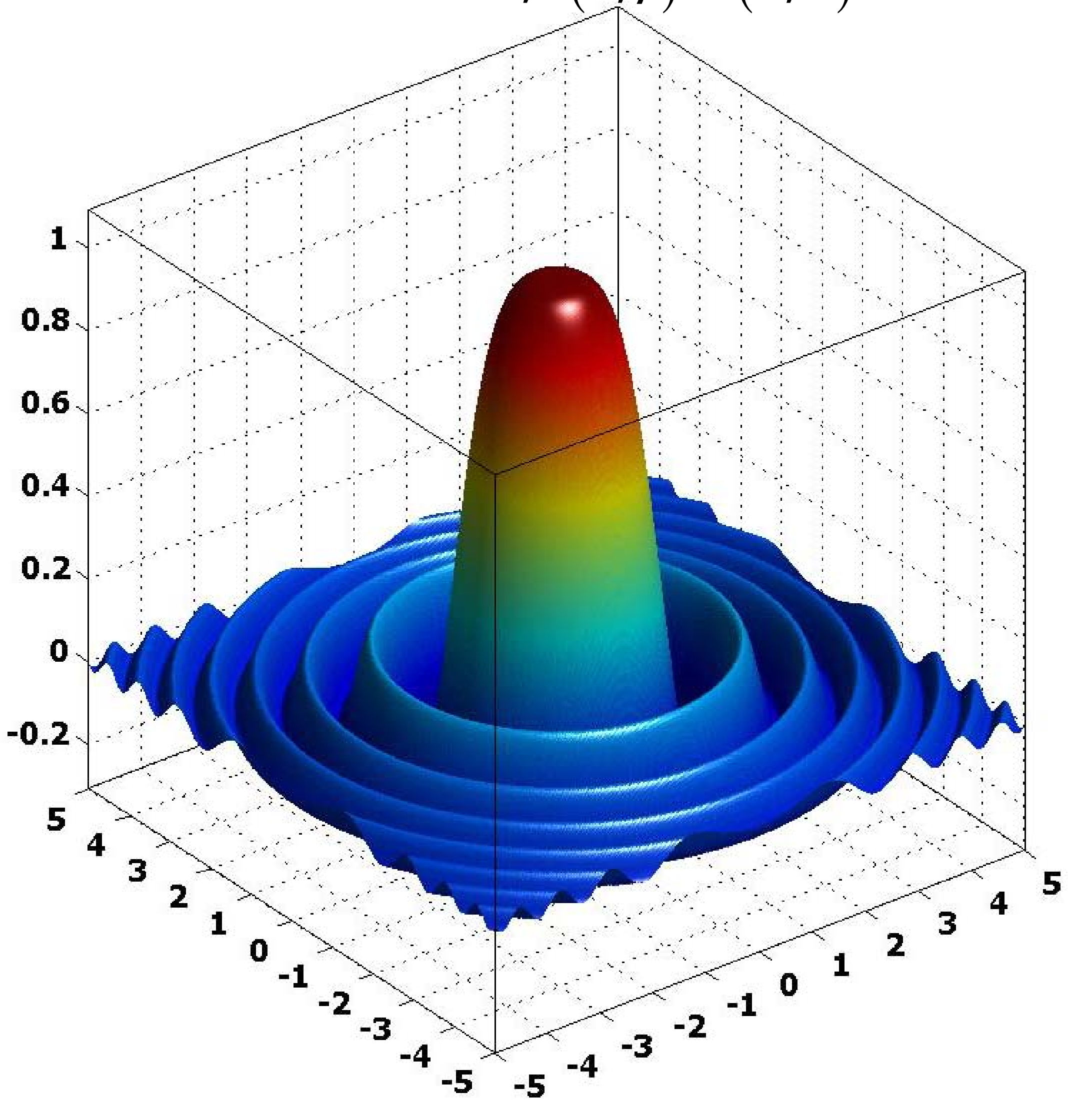
$$f(x,y) = |x| + |y|$$



- Είναι συνεχής στο (0,0)
- $\nexists \ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
- $\nexists \ D_{\vec{u}}(0,0)$
- $\nexists \ df(0,0)$

5.

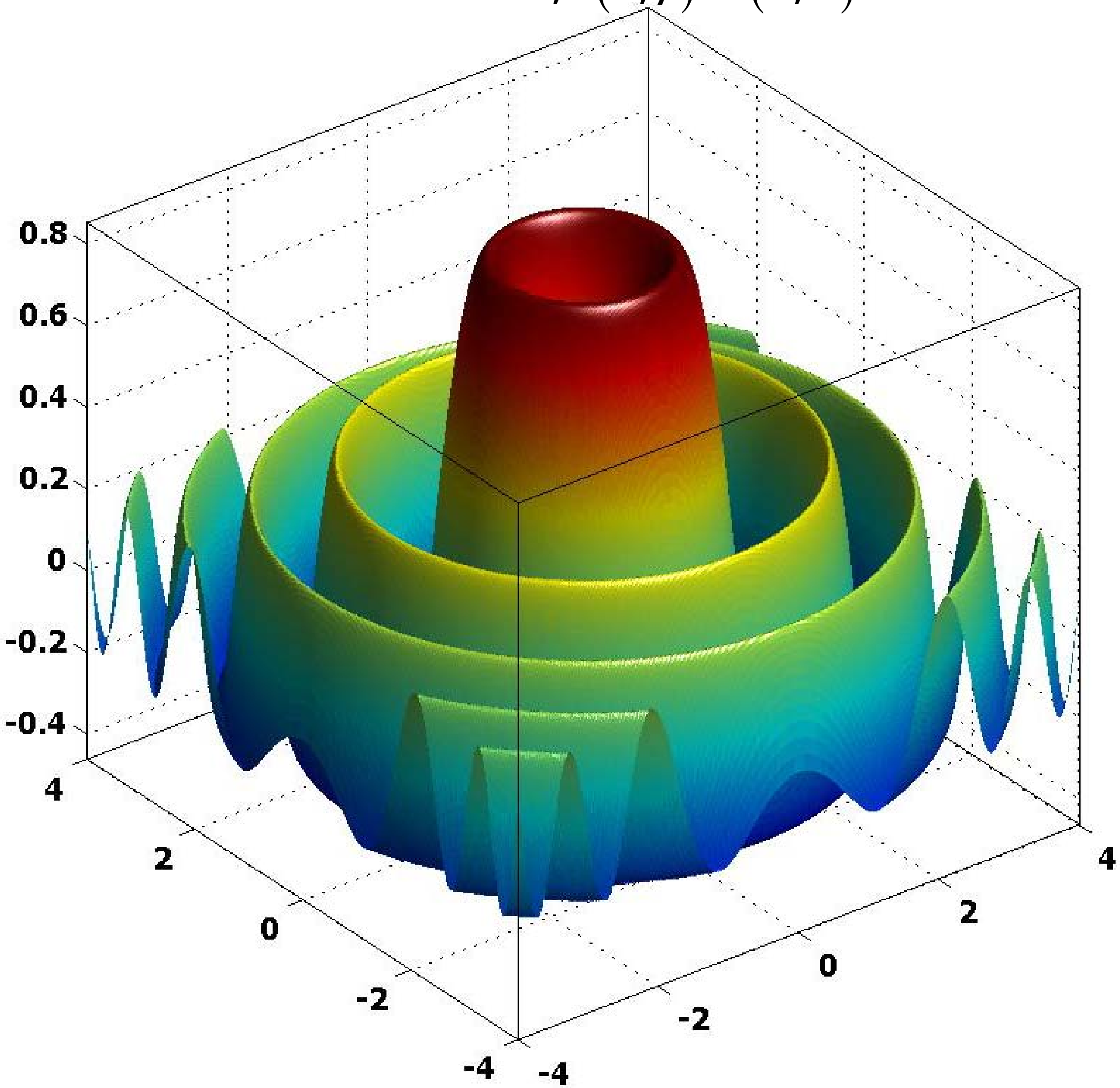
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y) \in [-5,5]\times[-5,5] \setminus \{(0,0)\} \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



- Είναι συνεχής στο (0,0)
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
- $\exists\ D_{\vec{u}}(0,0) = 0$
- $df(0,0)(h_1,h_2) = 0$

6.

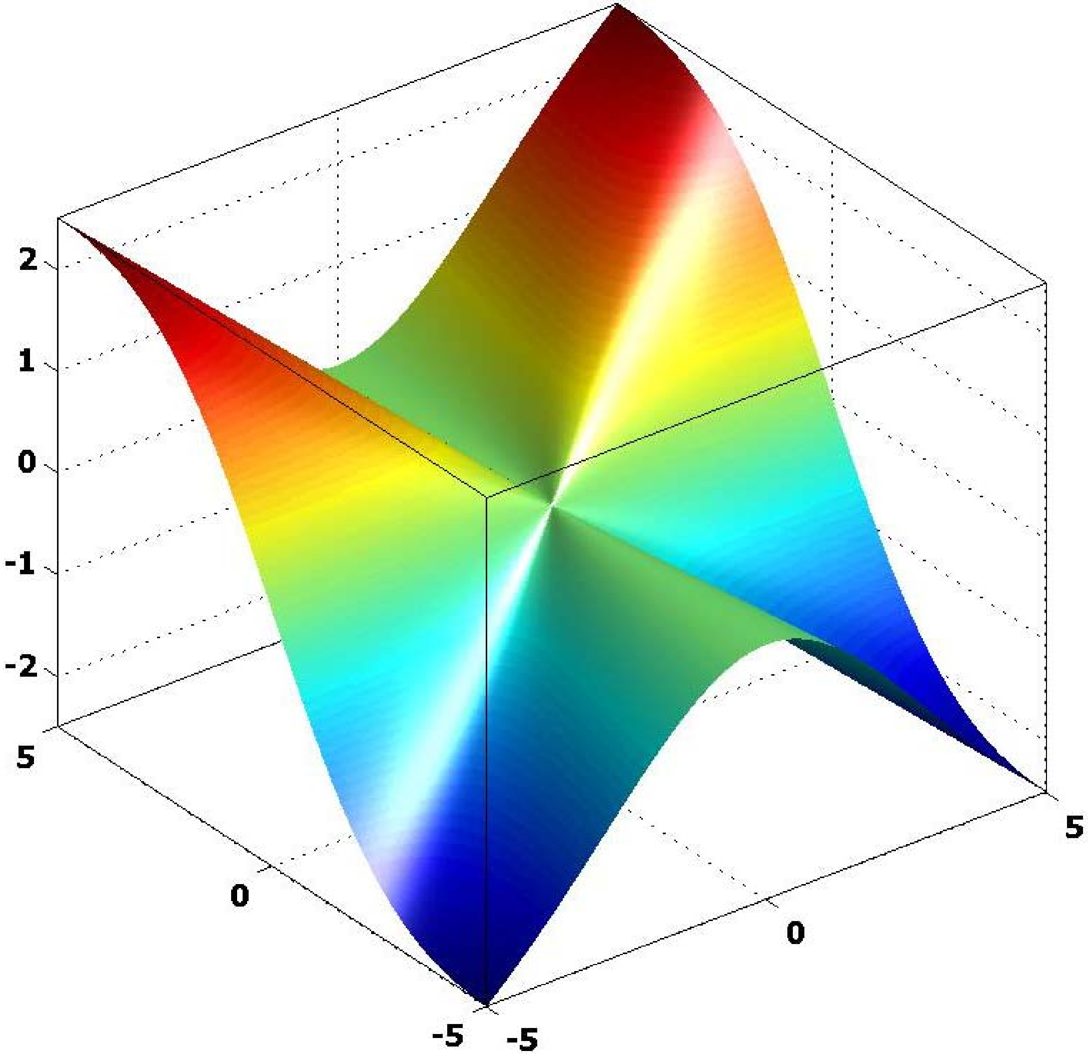
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \in [-4,4]\times[-4,4] \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



- Είναι συνεχής στο (0,0)
- $\nexists\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0),\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$
- $\nexists\ D_{\bar{u}}(0,0)$
- $\nexists\ df(0,0)$

7.

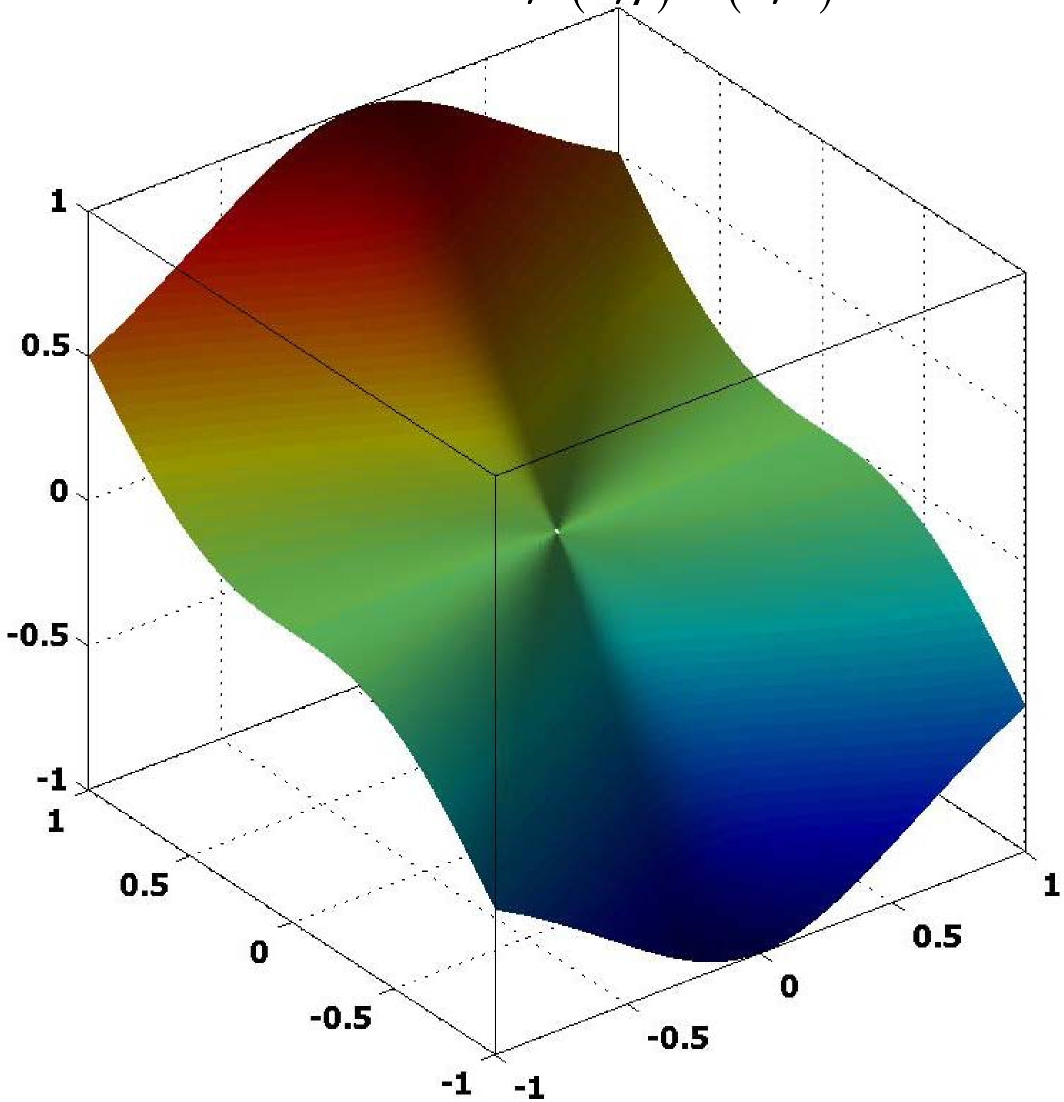
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \in [-1,1]\times[-1,1] \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



- Είναι συνεχής στο (0,0)
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
- $\exists\ D_{\vec{u}}(0,0)$
- $\nexists\ df(0,0)$

8.

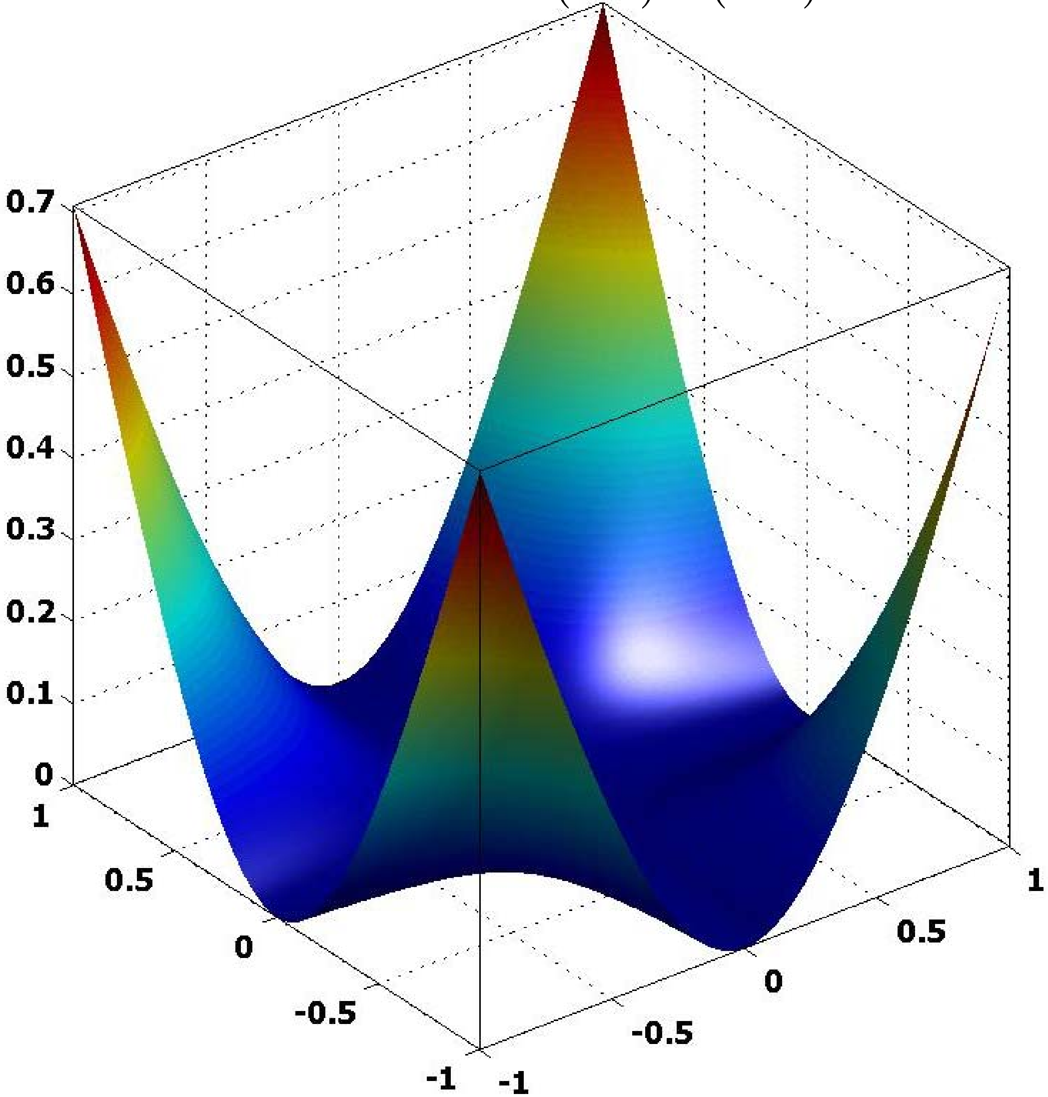
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \in [-1,1]\times[-1,1] \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



- Είναι συνεχής στο (0,0)
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1, \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
- $\nexists \ D_{\vec{u}}(0,0)$
  $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\pm\vec{e}_1, \pm\vec{e}_2\}$
- $\nexists \ df(0,0)$

9.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \in [-1,1]\times[-1,1] \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



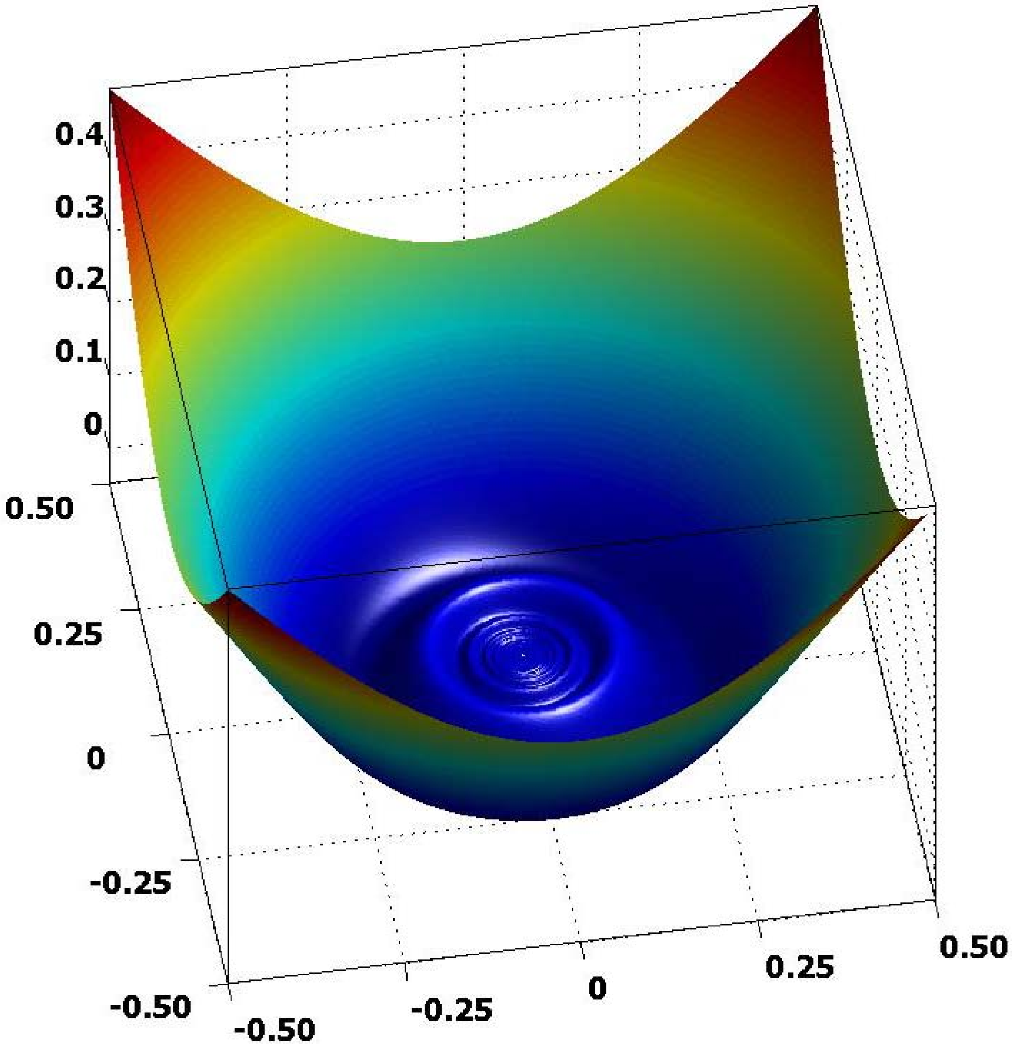
- Είναι συνεχής στο (0,0)
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
- $\exists\ D_{\vec{u}}(0,0)$
- $\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

  και είναι και **συνεχείς**
- $df(0,0)(h_1,h_2) = 0$

10.

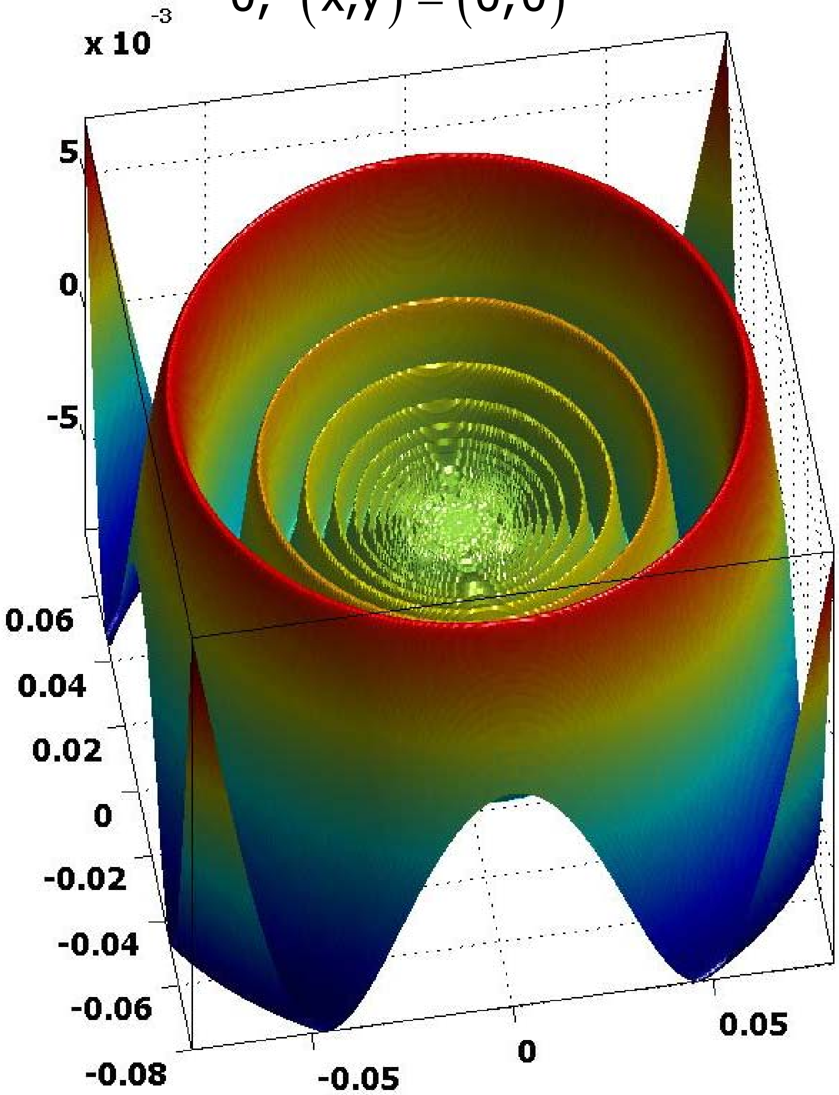
$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]\times\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]\setminus\{(0,0)\}\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$



- Είναι συνεχής στο (0,0)
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$
- $\exists\ D_{\vec{u}}(0,0)$
- $\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ και είναι **ασυνεχείς**
- $df(0,0)(h_1,h_2)=0$

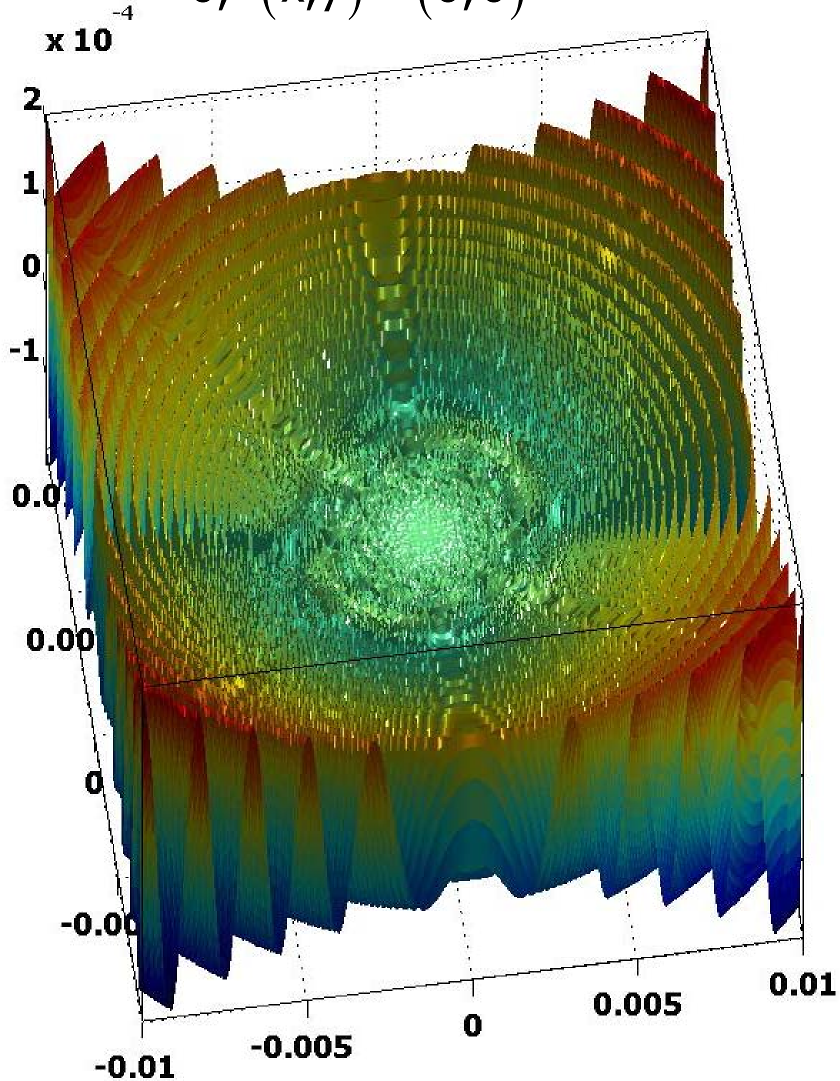
Ας πάμε πιο κοντά…

10. $$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\in[-0.08,0.08]\times[-0.08,0.08]\setminus\{(0,0)\}\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$



… και ακόμη πιο κοντά…

10. $$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\in[-0.01,0.01]\times[-0.01,0.01]\setminus\{(0,0)\}\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

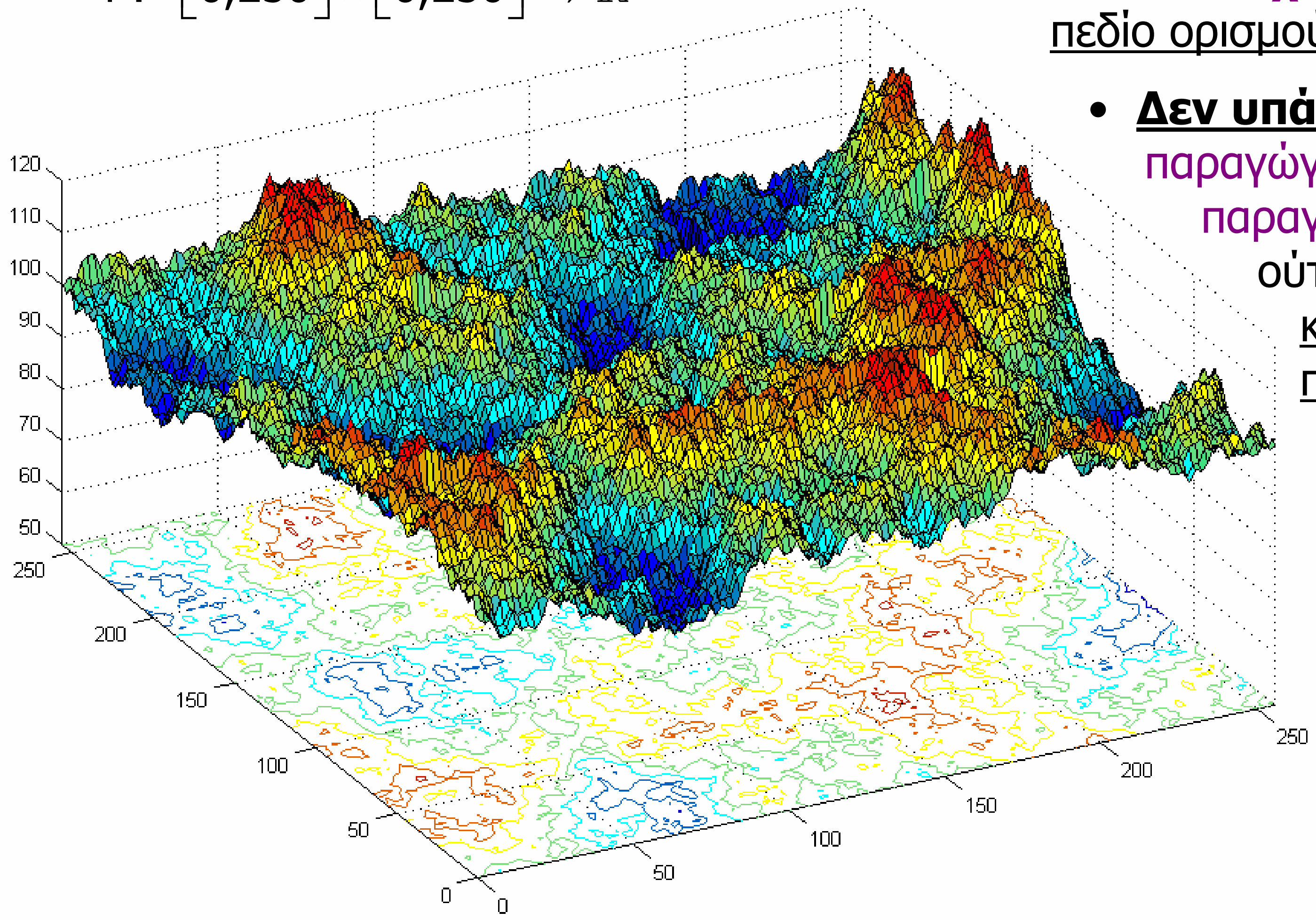


… και ακόμη πιο κοντά…

11. **Όλες οι προηγούμενες συναρτήσεις μπορούν να θεωρηθούν ως «καλώς» συμπεριφερόμενες συναρτήσεις.**

Υπάρχουν όμως και πολλές άλλες…

$$f : [0,250] \times [0,250] \to \mathbb{R}$$



- **Είναι συνεχής** σε όλο το πεδίο ορισμού της!
  - **Δεν υπάρχουν** μερικές παράγωγοι, κατευθυνόμενες παράγωγοι και ασφαλώς ούτε διαφορικό για κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της!

Συγγραφή – Ηλεκτρονική Επεξεργασία

Ναβίτ Κωνσταντίνου

Επιστημονική Επιμέλεια

Αν. Καθηγήτρια Λεωνή Ευαγγελάτου-Δάλλα

(Τμήμα Μαθηματικών)

Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Φυσικής

Μάιος 2004