Ανάλυση II - 15/03/2011 - μάθημα 09
(αναπλήρωση)

Ενότητα 2

• Συναρτήσεις μεταξύ Ευκλ. χώρων (Γενικά)

$$\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n \ (n, m \geq 1)$$

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \to (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$$
$$= (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

$$G_{\vec{f}} = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) : \vec{x} \in A\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$
καλείται γράφημα της $\vec{f}$

Ταξινόμηση των $\vec{f} : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$

1) $n = 1, \ m = 1$

$f : A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση μίας μεταβλητής

είναι:

• Πολυωνυμικές:
$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = P(x)$

• Ρητές: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q = πολυώνυμα

- Τριγωνομετρικές και αντίστροφες αυτών: ημ, συν, εφ, σφ, τοξημ, τοξσυν, τοξεφ.

- Εκθετικές, λογαριθμικές: a^x, $\log_a$ $(a>0)$

- Συναρτήσεις μέσω ολοκληρωμάτων

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (\text{Γάμμα συνάρτηση})$$

- Συναρτήσεις μέσω ορίων:

$$f_{(\lambda,s)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \eta\mu(\lambda^n x), \; x \in [0,1]$$

$$\lambda > 1, \; 1 < s < 2$$

(Τύπου Weirstrass, Mandelbrot)

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \; s > 1 \quad (\text{Συνάρτηση του Riemann})$$

- Συνδυασμοί των παραπάνω

2) $n=1, \quad m \geq 2$

$\vec{r} : I \, (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$, διαν. συνάρτηση μιας μεταβλητής

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ το διάν. θέσης κινητού τη χρονική στιγμή t.

Ταχύτητα, επιτάχυνση είναι διανυσματικές ~~μεταβλητές~~ συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

3) $n \geq 2, \quad m=1$

$f : A \, (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, Πραγμ. συνάρτηση πολλών μεταβλητών ή Βαθμωτό Πεδίο

π.χ. $T(x,y,z)$ = η θερμοκρασία στο $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

- $\delta(x,y,z)$ = η πυκνότητα μάζας στο $(x,y,z) \in A \, (\subseteq \mathbb{R}^3)$

4) $n \geq 2, \ m \geq 2$

$$\vec{f}(x_1,\dots,x_n) = (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)) \in \mathbb{R}^m$$

$f_i : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ συνιστώσες συναρτήσεις της $\vec{f}$ $(i=1,\dots,m)$

$\vec{f}$ διαν. συνάρτηση πολλών μεταβλητών.

π.χ. : • $\vec{V}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

η ταχύτητα μέσα σε ρευστό

• Κυλινδρικοί μετασχ. : $\vec{T}(r,\theta,z) = (r\,\text{συν}\theta, r\,\text{ημ}\theta, z)$

Όρια / συνέχεια $\vec{f} : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$

1) $\vec{f} : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

• $\vec{x}_0 \in A'$ $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, \vec{x}_0) > 0 :$

αν $\vec{x} \in A$ με $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$

τότε $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon$

$\vec{x}_0 \in A$, $\vec{x}_0$ μεμονωμένο σημείο, θεωρούμε

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) (= \vec{b}) = \vec{f}(\vec{x}_0)$$

2) $\vec{f}: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$. $\vec{x}_0 \in A$

Η $\vec{f}$ είναι <u>συνεχής στο $\vec{x}_0$</u>

$$\overset{op}{\Longleftrightarrow} \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0)$$

<u>Σημείωση</u>: Για $n=m=1$ είναι οι γνωστοί ορισμοί. (από Αναλ. I)

<u>Ισχύουν</u>

i) Ανάλογες ιδιότητες για τα αθροίσματα, γινόμενα, πηλίκα (αν ορίζονται), σύνθεση, με αυτά που ισχύουν $f: A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

ii) $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$

T.E.E.I: α) $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$

τα εξής είναι ισοδύναμα

β) $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = b_i$

$i = 1, \dots, m$

όπου $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$

Κριτήριο μη ύπαρξης ορίου / ασυνέχειας

Έστω $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in A$

Εάν βρούμε 2 διαφορετικές "διαδρομές" που "τείνουν" στο $\vec{x}_0$ και τα όρια κατά μήκος αυτών είναι a, b με $a \neq b$, τότε $\nexists$ όριο στο $\vec{x}_0$

- Για να ελέγξουμε αν η $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ είναι <u>ΑΣΥΝΕΧΗΣ</u> στο $\vec{x}_0$, αρκεί να βρούμε μια "διαδρομή" που τείνει στο $\vec{x}_0$ και το όριο κατά μήκος αυτής είναι διαφορετικό από το $f(\vec{x}_0)$

Ασκήσεις

1η) Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(3,1)} \frac{x^2+y^3+xy^2}{x^4+y^2+5}$$

Λύση

$$\lim_{(x,y)\to(3,1)} \frac{x^2+y^3+xy^2}{x^4+y^5+5} = \frac{3^2+1+3\cdot 1^2}{3^4+1^2+5}$$

2η) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\,\eta\mu\frac{1}{x^2},\ e^{xy},\ \log(xy)\right)$

$$\vec{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$$

Λύση

$$\left.\begin{array}{l}
\lim\limits_{(0,0)} x\,\eta\mu\dfrac{1}{x^2} = 0 \ (\text{Ανάλ. I}) \\
\lim\limits_{(0,0)} e^{xy} = 1 \\
\lim\limits_{(0,0)} \log(xy) = -\infty
\end{array}\right\} \ \text{Άρα } \nexists \lim_{(0,0)} \vec{f}(x,y)$$

3η) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x^2}, x+1, y^2+z^2+8\right)$

$= (0, 1, 8)$

4η) <u>(βασική άσκηση)</u>

$f, g : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ με (<u>Μ = ΣΤΑΘΕΡΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ</u>)

$$\left.\begin{aligned} &|f(\vec{x})| \leq M \ \forall \ \vec{x} \in A \\ &\lim_{x \to \vec{x}_0} g(\vec{x}) = 0 \end{aligned}\right\} \text{Τότε } \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})\, g(\vec{x}) = 0$$

<u>Λύση</u>: $|f(\vec{x})\, g(\vec{x})| \leq M|g(\vec{x})|$

$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} M|g(\vec{x})| = 0$

Άρα $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} |f(\vec{x})\, g(\vec{x})| = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})\, g(\vec{x}) = 0$

5η) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}\right) = \underline{0}$ (μηδενική × φραγμένη)

6) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\,\underbrace{xy}$$

$\left(\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1\right)$ (φραγμένη × μηδενική)

7) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0$$

(μηδενική × φραγμένη)

$$\left(\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right| \leq 1 \iff x^2+y^2 \geq 2|x||y| \iff (|x|-|y|)^2 \geq 0\right)$$

8η) $$\lim_{(0,0,0)} \frac{x^3+y^2z+xyz+z^3}{x^2+y^2+z^2}$$

(*) $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$|y| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$|z| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Λύση

$$\left|\frac{x^3+y^2z+xyz+z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq$$

$$\frac{|x|^3+|y|^2|z|+|x||y||z|+|z|^3}{\|(x,y,z)\|^2} \overset{(*)}{\leq}$$

$$\frac{\|(x,y,z)\|^3+\|(x,y,z)\|^3+\|(x,y,z)\|^3+\|(x,y,z)\|^3}{\|(x,y,z)\|^2} =$$

$$= 4\|(x,y,z)\| \xrightarrow{(0,0,0)} 0$$

9η) $\lim\limits_{(0,0)} \left(\dfrac{2x^4+y^4}{x^2+y^2}, \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, \dfrac{y^3-2xy^2}{x^2+y^2} \right) =$

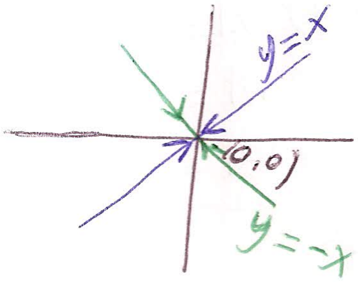
$= (0, 0, 0)$

10) $**$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} &, (x,y) \neq (0,0) \\ a &, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής;

<u>Λύση</u> Πλησιάζουμε το $(0,0)$ με δύο διαφ. διαδρομές (π.χ)



- $y = x$
- $y = -x$

Άρα <u>δεν</u> υπάρχει το όριο στο $(0,0)$. Επομένως η f <u>δεν</u> μπορεί να γίνει συνεχής για κάποιο $a \in \mathbb{R}$

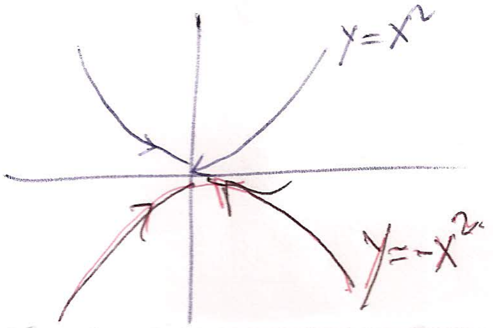
Αφού

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{2x^2} = 1 \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to 0} f(x,-x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2x^2}{2x^2} = -1 \end{array} \right\} \neq$$

11η) **

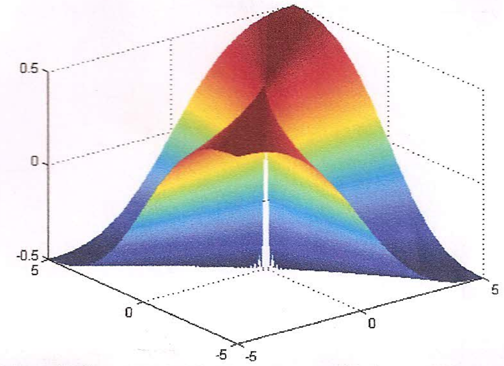
$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2,\ g(x,x^2)\xrightarrow[x\to 0]{} 1\\ y=-x^2,\ g(x,-x^2)\xrightarrow[x\to 0]{} -1\end{array}\right\}\neq$$



Βλ. Γενικό Παράρτημα Ετών (2007) για άλλες ασκήσεις+σχήματα

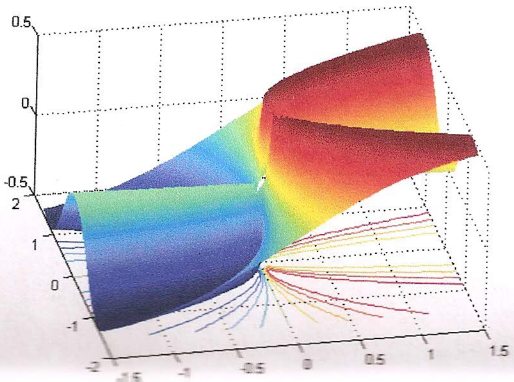
Σχήμα Άσκηση 10/



$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0)$$

$$f(x,x)=\frac{1}{2},\ f(x,-x)=-\frac{1}{2}\ //$$

Σχήμα Άσκηση 11/



$$g(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2},\ (x,y)\neq(0,0)$$

$$g(x,x^2)=\frac{1}{2},\ g(x,-x^2)=-\frac{1}{2}$$