

Επιφάνειες στον \mathbb{R}^3

Ο ακριβής μαθηματικός ορισμός είναι ευτελής και χρειάζεται πολλές γνώσεις (παρόμοιας δυσκολίας με τον ορισμό της καμπύλης)

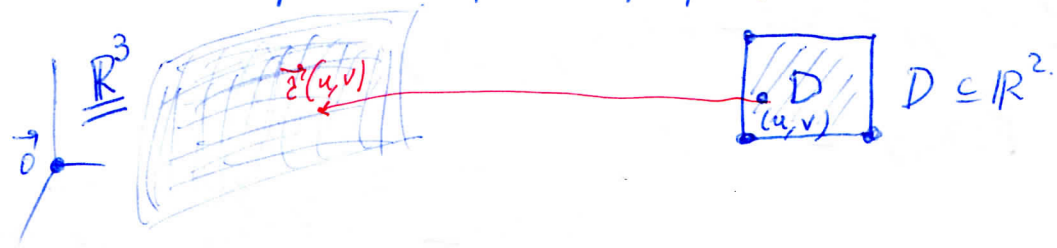
$$S = \{ \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D \}$$

(\vec{r} = διανυσματικός)

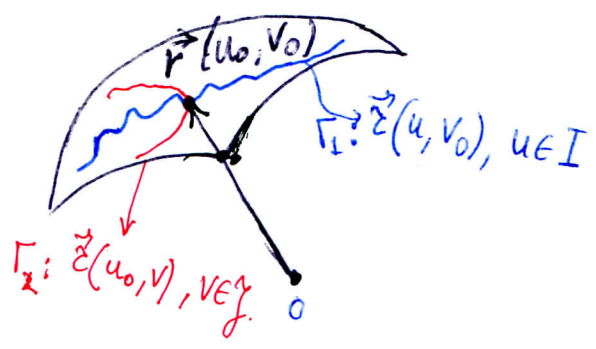
$n \times$ Καρτεσιανό γινόμενο \approx διαστήματα $\left(\begin{array}{l} D \subseteq \mathbb{R}^2, D = I \times J \text{ όπου} \\ I, J \subseteq \mathbb{R} \text{ } I, J = \text{διαστήματα} \end{array} \right.$

$$D = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ (διαστήματα } I, J \subseteq \mathbb{R}) \quad \left(\begin{array}{l} D \text{ κυκλ. δίσκος κ. κλπ} \end{array} \right)$$

S επιφάνεια με παραμετρηση $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$



Σημείωση: $\vec{r}: I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3, (u_0, v_0) \in I \times J$



$\vec{r}(\cdot, v_0): I \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη
 $\vec{r}(u_0, \cdot): J \rightarrow \mathbb{R}^3$ —||—
 σταθεροποιούμε
 την v_0

Πως περιγράφεται μια επιφάνεια στον \mathbb{R}^3

• Αναλυτική εξίσωση

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0 \}$$
$$F: A (\subseteq \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$$

• Καρτεσιανή εξίσωση

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : z = f(x, y), (x, y) \in B \}$$

αν η $F(x, y, z) = 0$ λύνεται ως προς z ή $y = g(x, z)$ αν $F(x, y, z) = 0$ λύνεται ως προς y ή $x = h(y, z)$ αν $F(x, y, z) = 0$ λύνεται ως προς x

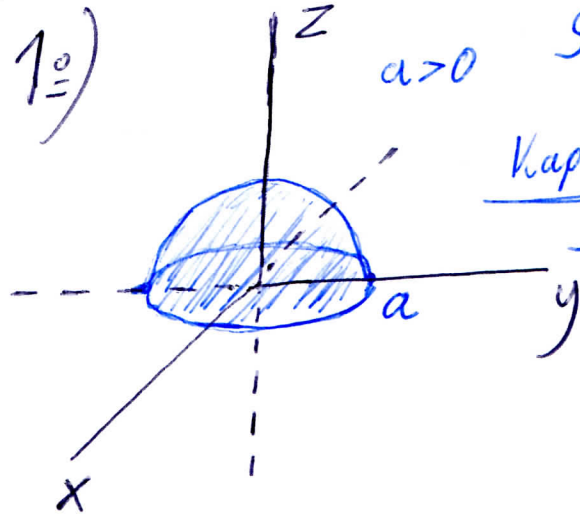
• Παραμ. εξισώσεις

$$S = \{ \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D \}$$

τότε

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D$$

Παράδειγματα



Αναλυτική μορφή

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$$

Καρτεσιανή μορφή

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in B\}$$

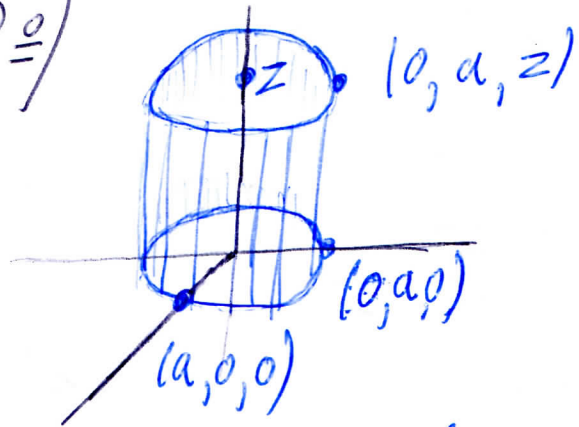
$$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

Παραμετρικοποίηση

$$S = \{\vec{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}), (x, y) \in B\}$$

Χρειάζομαστε "καλή" παραμετρικοποίηση της S / Δεν μπορούμε να βρούμε άμεσα Οχυσ

2^ο)



$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2, z \in [0, 2]\}$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

$$(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2]$$

$$S = \{\vec{r}(\vartheta, z) = (a \cos \vartheta, a \sin \vartheta, z), \vartheta \in [0, 2\pi], z \in [0, 2]\}$$

(Δεν υπάρχει καρτεσιανή εξίσωση)

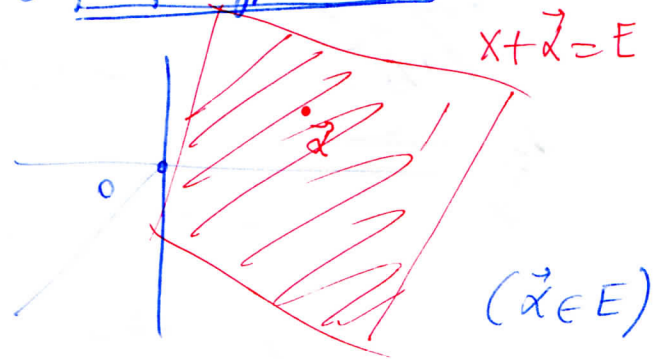
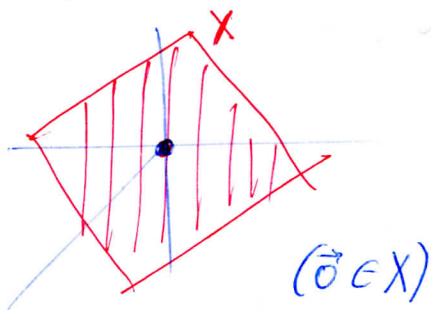
Ειδίκες επιφάνειες

Ⓐ Επίπεδα στον \mathbb{R}^3

Τα επίπεδα είναι μεταφορές διανυσματικών χώρων.

Έστω X ένας 2-διάστατος γρ. υπόχωρος του \mathbb{R}^3

$$X = \{ \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}, \quad \vec{u}, \vec{v} \text{ γρ. ανεξ.}$$



$$\vec{a} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$$

$$E = \vec{a} + X = \{ \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

Επίπεδο που περνά από το \vec{a} , $\parallel \vec{u}, \vec{v}$

Παρ. εφ' όψεως

$$\vec{r}(\lambda, \mu) = (x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1, y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2, z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3)$$

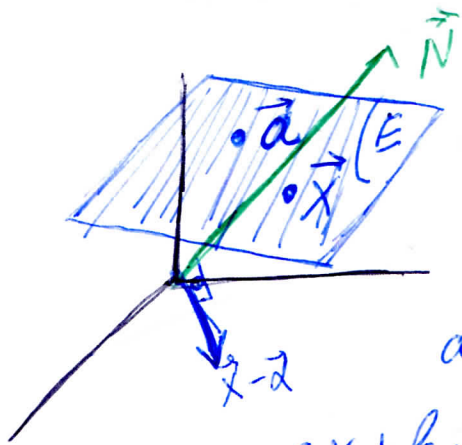
Δίνουμε ως προς λ και μ

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0 \\ \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = ax + by + c \\ y = a'x + b'z + c' \end{cases}$$

Πάντα υπάρχει για $\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0$, $x = a''y + b''z + c''$
 ορίσμενα $\neq 0$, εστω τα \vec{u}, \vec{v} είναι ΓΡ. ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ

Ασκήσεις

1η) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περνά από το $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$ και $\perp \vec{N} = (a, b, \gamma) \neq (0, 0, 0)$



$$E: (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow$$

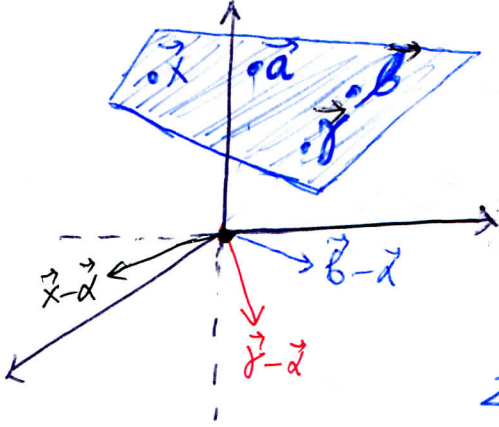
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$ax + by + \gamma z = c, \quad c = ax_0 + by_0 + \gamma z_0$$

||| Άρα αν έχουμε κάποιο επίπεδο |||
 με εξίσωση $Ax + By + \Gamma z = \Delta$
 τότε το $(A, B, \Gamma) \perp$ επίπεδο |||

2η) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου E που περνά από 3 σημεία $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ με $\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{\gamma} - \vec{a}$ γραμ. ανεξάρτητα.

Λύση (2η αση)



$$\vec{r}(\lambda, \mu) = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) + \mu(\vec{\gamma} - \vec{a}), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Άρα $x = a_1 + \lambda(\beta_1 - a_1) + \mu(\gamma_1 - a_1)$

$y = a_2 + \lambda(\beta_2 - a_2) + \mu(\gamma_2 - a_2)$

$z = a_3 + \lambda(\beta_3 - a_3) + \mu(\gamma_3 - a_3)$

Λύνουμε ως προς λ, μ (2 εξισώσεις) και αντικαθιστούμε στην 3η εξίσωση.

Βρίσκουμε:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ \beta - a_1 & \beta_2 - a_2 & \beta_3 - a_3 \\ \gamma_1 - a_1 & \gamma_2 - a_2 & \gamma_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

μικτό γινόμενο

δηλ. $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot ((\vec{\beta} - \vec{a}) \times (\vec{\gamma} - \vec{a})) = 0$

(εξηγείστε τι σημαίνει αυτό!)

(B) Ειδίαις επιφάνειες : Κυβινδρικές

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = \varphi(x, y) = 0\}$$

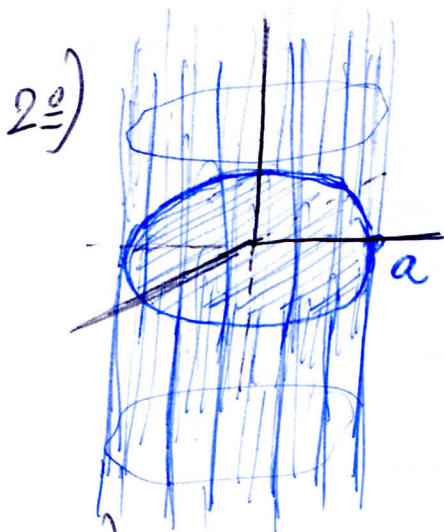
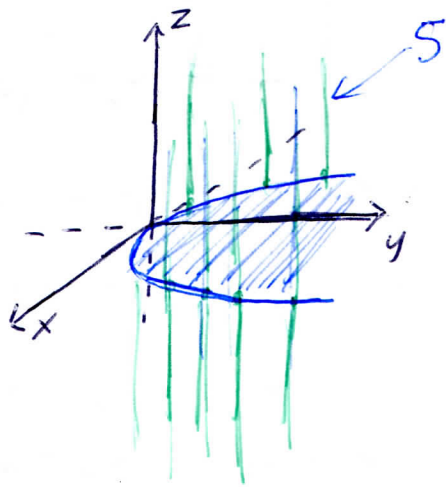
ή $F(x, y, z) = \varphi(x, z) = 0$ ή $F(x, y, z) = w(y, z) = 0$

ή $F(x, y, z) = f(x) = 0$ ή $F(x, y, z) = g(y) = 0$

ή $F(x, y, z) = h(z) = 0$

Παράδειγμα

1^ο) Αναλυτική εξίσωση
 $y - x^2 = 0$



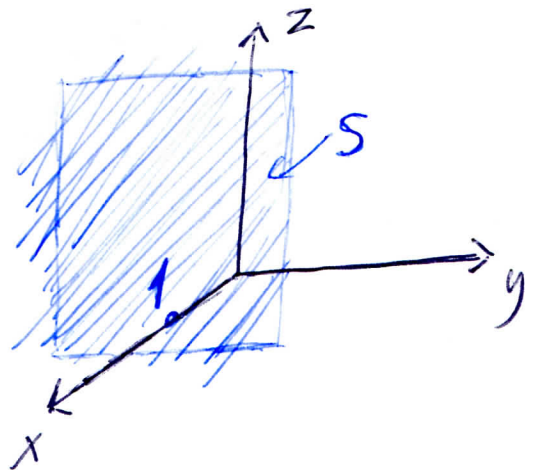
$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2, z \in \mathbb{R}\}$$

3^ο) $x=1$, επιφάνεια στον \mathbb{R}^3

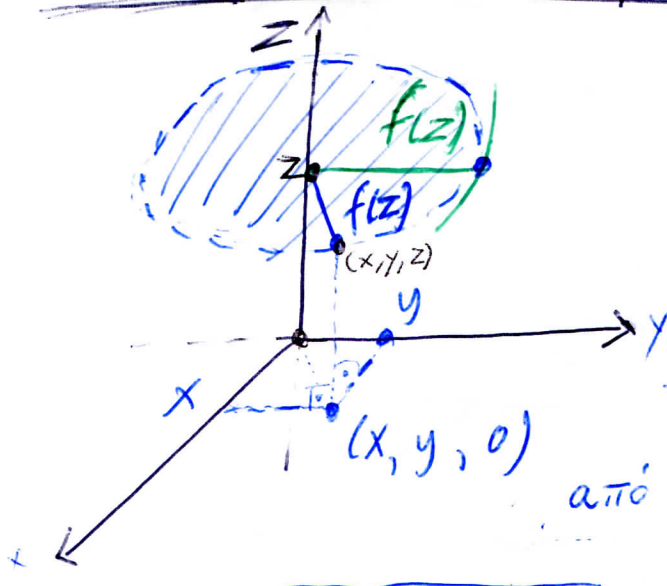
$$1x + 0y + 0z = 1$$

κάθετο

$$\vec{N} = (1, 0, 0)$$



Επιφάνειες εκ περιστροφής



Έστω μια συνάρτηση $z \rightarrow f(z) (= y)$ που βρίσκεται στο επίπεδο oxy .

Περιστρέφουμε γύρω από τον άξονα των z . Τότε

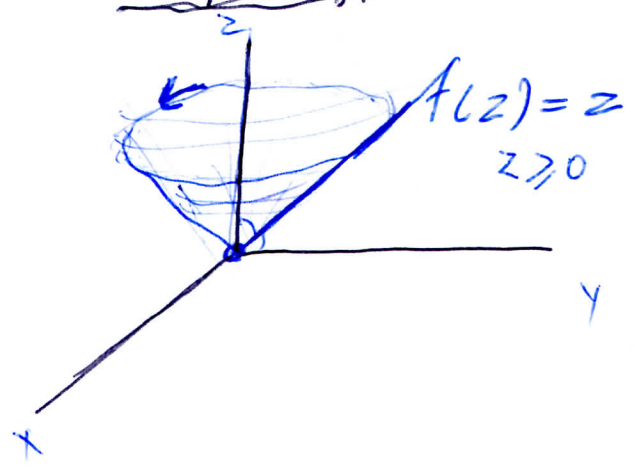
$$|f(z)|^2 = x^2 + y^2$$

Άρα οι συνελλοισές $ax^2 + by^2$ είναι $a=b$

τότε έχουμε επιφ. εκ περιστροφής ως προς άξονα z .

$$|g(x)|^2 = y^2 + z^2, \text{ περ. } x, \quad |h(y)|^2 = x^2 + z^2 \text{ περ. } y$$

Παράδειγμα



$$z^2 = x^2 + y^2$$

Κώνος

Δ ^{**} Επιφάνειες 2ου βαθμού στον \mathbb{R}^3
(τετραγωνικές)

Υπάρχουν 680 B) των
Μαθημάτων 7

Εξισώσεις - Σχήματα :

Μαθαίνουμε **ΤΕΛΕΙΑ** τα

- Επιπεδοειδές
- Ε.Π. Παραβολοειδές
- Υπερβολικό Παραβολοειδές
- Ε.Π. Κώνο



Απαραίτητα βιβλ: Τριώνιά ομοκυρψώματα
 Ειδίωμακά ομοκυρψώματα
 Μέγιστα, Ελάχιστα Συναρτήσεων
 Τύπος Taylor, Θ. Stokes, Θ. Gauss