Ανάλυση ΙΙ μάθημα 04 - (02/03)

Υπενθύμιση

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ στον $\mathbb{R}^3$

$\vec{a} \cdot \vec{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \in \mathbb{R}$

$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =:$$

$$=: (a_2 b_3 - b_2 a_3)\vec{i} - (a_1 b_3 - b_1 a_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\vec{k} \quad \perp \vec{a}, \vec{b}$$

Μεικτό Γινόμενο

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$

Μεικτό γινόμενο των $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{\gamma})$

ή $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{\gamma}$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{\gamma}) = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot \left((b_2 \gamma_3 - \gamma_2 b_3)\vec{i} - (b_1 \gamma_3 - \gamma_1 b_3)\vec{j} + (b_1 \gamma_2 - \gamma_1 b_2)\vec{k} \right) =$$

$$= a_1(b_2\gamma_3 - \gamma_2 b_3) - a_2(b_1\gamma_3 - \gamma_1 b_3) + a_3(b_1\gamma_2 - \gamma_1 b_2)$$

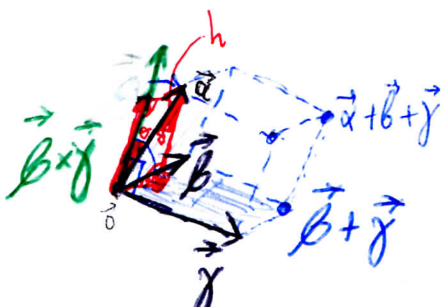
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = -\vec{a}\cdot(\vec{\gamma}\times\vec{b}) = -\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{\gamma}) = \ldots$$

$$= \vec{\gamma}\cdot(\vec{b}\times\vec{\alpha}) = -\vec{\gamma}\cdot(\vec{\alpha}\times\vec{b})$$

(Ιδιότητες οριζουσών

Όγκος παραλληλεπιπέδου στον $\mathbb{R}^3$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ Δημιουργούμε // επίπεδο τυχαία διανύσματα. (με $\vec{b}\times\vec{\gamma} \neq \vec{0}$ δηλ. $\vec{b} \neq \lambda\vec{\gamma}$ για (παραλληλ) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$)



$$V = |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{\gamma})| =$$

$$= \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \right|^{(\text{απολ})}$$

Απόδειξη

$$V = \text{εμ}(\text{βάσης}) \cdot h = \|\vec{b}\times\vec{\gamma}\| \cdot h$$

$$h = \|\vec{a}\| |\text{συν}\,\theta| = \|\vec{a}\| \left| \frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{\gamma})}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\times\vec{\gamma}\|} \right| = \frac{|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{\gamma})|}{\|\vec{b}\times\vec{\gamma}\|}$$

$$V = |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{\gamma})|$$

Σημείωση Εάν $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ τότε το παραλληλεπίπεδο που φτιάχνουν τα $\vec{\alpha}_1, \ldots \vec{\alpha}_n$ έχει όγκο $V = \left| \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \right|$