Ασκήσεις (ο $\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$, Γωνίες διανυσμάτων, Εσωτερικό-Εξωτερικό-Μικτό Γινόμενο)

1) Έστω $\vec{u}=(7,1)$ και $\vec{v}=(-4,5)$.
Να υπολογιστούν : $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $-\vec{u}+2\vec{v}$ και $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

Λύση της 1)

- $\vec{u}+\vec{v}=(7,1)+(-4,5)=(7-4,\,1+5)=(3,6)$
- $\vec{u}-\vec{v}=(7,1)-(-4,5)=(7-(-4),\,1-5)=(11,-4)$
- $-\vec{u}+2\vec{v}=-(7,1)+2(-4,5)=(-7,-1)+(-8,10)=(-7+(-8),-1+10)=(-15,9)$

- $\|\vec{u}\|=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}$
- $\|\vec{v}\|=\sqrt{(-4)^2+5^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$

2) Να βρεθεί $\vec{x}=(x,y)$ με $\vec{x}=\lambda(4,2)$ $\lambda>0$ και $\|\vec{x}\|=2$

<u>Λύση της 2)</u>

$\vec{x} = \lambda(4,2) \Rightarrow \|\vec{x}\| = |\lambda|\,\|(4,2)\| = \lambda\,\|(4,2)\| = \lambda\sqrt{4^2+2^2} = \lambda\sqrt{20} = \lambda\, 2\sqrt{5}$

$\|\vec{x}\| = 2$

$\Rightarrow$

$\lambda \cdot 2\sqrt{5} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Άρα $\vec{x} = \frac{\sqrt{5}}{5}(4,2)$

3) Έστω $\vec{u}=(5,2)$ και $\vec{v}=(3,5)$. Να υπολογιστούν τα συνθ με $\theta=\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$ και συνφ με $\varphi=\sphericalangle(\vec{v}-\vec{u},\vec{u})$.

Λύση της 3)

- $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \dfrac{(5,2)\cdot(3,5)}{\sqrt{5^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+5^2}} = \dfrac{15+10}{\sqrt{29}\sqrt{34}} = \dfrac{25}{\sqrt{29}\sqrt{34}}$

- $\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{(\vec{v}-\vec{u})\cdot\vec{u}}{\|\vec{v}-\vec{u}\|\;\|\vec{u}\|}$, $\vec{v}-\vec{u} = (3,5)-(5,2) = (-2,3)$ και $\|\vec{v}-\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13}$

άρα $\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{(-2,3)\cdot(5,2)}{\sqrt{13}\;\sqrt{29}} = \dfrac{-4}{\sqrt{13}\sqrt{29}}$

4) Έστω $\vec{p}=(3,6,2)$. Να βρεθούν 3 διαφορετικά μοναδιαία διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, ώστε να είναι κάθετα στο $\vec{p}$.

Λύση της 4)

Ζητάμε $\vec{x}=(x,y,z)$ ώστε $\vec{x}\cdot\vec{p}=0$ και $\|\vec{x}\|=1$. Αναλυτικά ζητάμε (x,y,z) ώστε

$$(x,y,z)\cdot(3,6,2)=0 \quad \text{και} \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2}=1 \quad \text{δηλαδή}$$

$$3x+6y+2z=0 \quad \text{και} \quad x^2+y^2+z^2=1. \quad (\text{άπειρα } (x,y,z))$$

Παίρνουμε τα πιο "εύκολα" :

$x_1=2,\ y_1=-1,\ z_1=0,\quad \vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}(x_1,y_1,z_1)\Rightarrow \vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)$

$x_2=0,\ y_2=1,\ z_2=-3,\quad \vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}(x_2,y_2,z_2)\Rightarrow \vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(0,1,-3)$

$x_3=4,\ y_3=0,\ z_3=-6,\quad \vec{u}_3=\frac{1}{\sqrt{x_3^2+y_3^2+z_3^2}}(x_3,y_3,z_3)\Rightarrow \vec{u}_3=\frac{1}{\sqrt{52}}(4,0,-6)$

5) Έστω τρίγωνο στον $\mathbb{R}^3$ με κορυφές $A(1,5,3)$, $B(3,5,5)$ και $\Gamma(1,9,4)$.
Να βρεθούν τα συνημίτονα των γωνιών του.
Τι είδους τρίγωνο είναι το $AB\Gamma$;

Λύση της 5)

• Η γωνία $\Gamma\hat{A}B$ είναι ίση με την γωνία που έχουν τα $\vec{u}_1=(3,5,5)-(1,5,3)=(2,0,2)$, $\vec{u}_2=(1,9,4)-(1,5,3)=(0,4,1)$

δηλ. $\sigma\upsilon\nu(\Gamma\hat{A}B)=\sigma\upsilon\nu\measuredangle(\vec{u}_1,\vec{u}_2)=\dfrac{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2}{\|\vec{u}_1\|\|\vec{u}_2\|}=\dfrac{(2,0,2)\cdot(0,4,1)}{\sqrt{2^2+0^2+2^2}\cdot\sqrt{0^2+4^2+1^2}}=\dfrac{2\cdot 0+0\cdot 4+2\cdot 1}{\sqrt{8}\sqrt{17}}=\dfrac{2}{\sqrt{8}\sqrt{17}}$

• Η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι ίση με την γωνία που έχουν τα $-\vec{u}_2=(0,-4,-1)$, $\vec{u}_3=(3,5,5)-(1,9,4)=(2,-4,1)$

δηλ. $\sigma\upsilon\nu(A\hat{\Gamma}B)=\sigma\upsilon\nu\measuredangle(-\vec{u}_2,\vec{u}_3)=\dfrac{(-\vec{u}_2)\cdot\vec{u}_3}{\|-\vec{u}_2\|\|\vec{u}_3\|}=\dfrac{(0,-4,-1)\cdot(2,-4,1)}{\sqrt{0^2+(-4)^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}}=\dfrac{0\cdot 2+(-4)(-4)+(-1)\cdot 1}{\sqrt{17}\sqrt{21}}=\dfrac{15}{\sqrt{17}\sqrt{21}}$

• Η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι ίση με την γωνία που έχουν τα $-\vec{u}_1$, $-\vec{u}_3$

δηλ. $\sigma\upsilon\nu(A\hat{B}\Gamma)=\sigma\upsilon\nu\measuredangle(-\vec{u}_1,-\vec{u}_3)=\dfrac{(-\vec{u}_1)\cdot(-\vec{u}_3)}{\|(-\vec{u}_1)\|\|(-\vec{u}_3)\|}=\dfrac{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_3}{\|\vec{u}_1\|\|\vec{u}_3\|}=\dfrac{(2,0,2)\cdot(2,-4,1)}{\sqrt{8}\sqrt{21}}=\dfrac{6}{\sqrt{8}\sqrt{21}}$.

Το τρίγωνο είναι οξυγώνιο (τα συνημίτονα των γωνιών του είναι όλα θετικά).

6) Έστω $\vec{x}=(2,1,-3)$ και $\vec{a}=(3,-1,0)$. Να βρεθούν $\vec{b}$ και $\vec{g}$ ώστε $\vec{x}=\vec{b}+\vec{g}$ όπου $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ και το $\vec{g}$ κάθετο στο $\vec{a}$.

Πως καλείται το $\vec{b}$;

Λύση της 6)

$\vec{x} = \vec{b} + \vec{g}$, $\vec{b} = \lambda \vec{\alpha}$ $\Rightarrow$ $(2,1,-3) = \lambda(3,-1,0) + (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, όπου $\vec{g} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ (1)

· $\vec{g}$ κάθετο στο $\vec{\alpha}$ $\Rightarrow$ $\vec{g} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Rightarrow (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \cdot (3,-1,0) = 0 \Rightarrow 3\gamma_1 - \gamma_2 + 0\cdot\gamma_3 = 0 \Rightarrow 3\gamma_1 - \gamma_2 = 0$ (2)

Από την (1) έχουμε $\begin{cases} 2 = 3\lambda + \gamma_1 \\ 1 = -\lambda + \gamma_2 \\ -3 = 0 + \gamma_3 \end{cases}$ και από την (2) $3\gamma_1 = \gamma_2$

Άρα $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\gamma_1 = \frac{1}{2}$, $\gamma_2 = \frac{3}{2}$, $\gamma_3 = -3$.

Επομένως το $\vec{b} = \frac{1}{2}(3,-1,0)$ και το $\vec{g} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -3\right)$

Το $\vec{b}$ είναι η προβολή του $\vec{x}$ στο $\vec{\alpha}$.

Σημείωση : Αν θυμόμαστε τον τύπο της προβολής (σελ. 28) αντικαθιστούμε : $\vec{b} = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{x}}{\|\vec{\alpha}\|^2}\vec{\alpha}$,

οπότε $\vec{b} = \frac{(3,-1,0)\cdot(2,1,-3)}{\|(3,-1,0)\|^2}(3,-1,0) = \frac{5}{10}(3,-1,0) = \frac{1}{2}(3,-1,0)$

και $\vec{g} = \vec{x} - \vec{b}$, $\vec{g} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -3\right)$.

7) Να υπολογισθούν τα $\vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{v}\times\vec{u}$ όπου $\vec{u}=(2,1,1)$, $\vec{v}=(0,1,1)$

Τι σχέση έχουν τα $\vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{v}\times\vec{u}$;

Λύση της 7)

- $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1\cdot1-1\cdot1)\vec{i} - (2\cdot1-0\cdot1)\vec{j} + (2\cdot1-0\cdot1)\vec{k} = 0\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = (0,-2,2)$

- $\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1\cdot1-1\cdot1)\vec{i} - (0\cdot1-2\cdot1)\vec{j} + (0\cdot1-2\cdot1)\vec{k} = 0\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} = (0,2,-2)$

Σχέση : $-\vec{v}\times\vec{u} = \vec{u}\times\vec{v}$.

8) Να υπολογισθούν τα τριπλά γινόμενα $(\vec{\alpha}\times\vec{b})\times\vec{i}$, $\vec{\alpha}\times(\vec{b}\times\vec{i})$ όπου $\vec{\alpha}=(2,1,0)$, $\vec{b}=(3,3,3)$, $\vec{i}=(1,0,0)$

Αποδείξτε ότι $(\vec{\alpha}\times\vec{b})\times\vec{i}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{i})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{i})\vec{\alpha}$

και $\vec{\alpha}\times(\vec{b}\times\vec{i})=(\vec{\alpha}\cdot\vec{i})\vec{b}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{b})\vec{i}$

Είναι τα τριπλά γινόμενα ίσα ;

Ανήκουν στο ίδιο επίπεδο ;

Λύση της 8)

• Υπολογισμός του $(\vec{\alpha}\times\vec{b})\times\vec{i}$

Υπολογίζουμε το $\vec{\alpha}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&0\\3&3&3\end{vmatrix}=3\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}=(3,-6,3)$

Υπολογίζουμε το $(\vec{\alpha}\times\vec{b})\times\vec{i}=(3,-6,3)\times(1,0,0)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-6&3\\1&0&0\end{vmatrix}=0\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}=(0,3,6)$

• Υπολογισμός του $\vec{\alpha}\times(\vec{b}\times\vec{i})$

Υπολογίζουμε το $\vec{b}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&3&3\\1&0&0\end{vmatrix}=0\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}=(0,3,-3)$

Υπολογίζουμε το $\vec{\alpha}\times(\vec{b}\times\vec{i})=(2,1,0)\times(0,3,-3)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&0\\0&3&-3\end{vmatrix}=-3\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}=(-3,6,6)$

• $(\vec{\alpha}\cdot\vec{i})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{i})\vec{\alpha}=2(3,3,3)-3(2,1,0)=(0,3,6)$. Άρα $(\vec{\alpha}\times\vec{b})\times\vec{i}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{i})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{i})\vec{\alpha}$.

• $(\vec{\alpha}\cdot\vec{i})\vec{b}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{b})\vec{i}=2(3,3,3)-9(1,0,0)=(-3,6,6)$. Άρα $\vec{\alpha}\times(\vec{b}\times\vec{i})=(\vec{\alpha}\cdot\vec{i})\vec{b}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{b})\vec{i}$.

Δεν είναι ίσα : $(\vec{\alpha}\times\vec{b})\times\vec{i}=(0,3,6)\neq(-3,6,6)=\vec{\alpha}\times(\vec{b}\times\vec{i})$

$\begin{cases}\text{Το } (\vec{\alpha}\times\vec{b})\times\vec{i} \text{ ανήκει στο επίπεδο } E \text{ που περνά από τα } \vec{0}=(0,0,0),\ \vec{b}=(3,3,3),\ \vec{\alpha}=(2,1,0)\\ \text{Το } \vec{\alpha}\times(\vec{b}\times\vec{i}) \text{ » » » } E' \text{ » » » } \vec{0}=(0,0,0),\ \vec{b}=(3,3,3),\ \vec{i}=(1,0,0)\end{cases}$

• Τα E, E' είναι διαφορετικά επίπεδα.

9) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές τα $(0,0,0),(1,2,3),(3,2,1),(4,4,4)$

Λύση της 9)

Το εμβαδόν $E = \|(1,2,3)\times(3,2,1)\|$, όπου

$$(1,2,3)\times(3,2,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4,8,-4), \text{ άρα } \|(-4,8,-4)\| = \sqrt{(-4)^2+8^2+(-4)^2} = 4\sqrt{6}.$$

Επομένως $E = 4\sqrt{6}$.

10) Να υπολογισθεί το εμβαδόν E του τριγώνου με κορυφές $P(1,-1,0)$, $Q(2,1,-1)$, $R(-1,1,2)$

Λύση της 10)

Έστω $\vec{x}_1=(1,-1,0)$, $\vec{x}_2=(2,1,-1)$, $\vec{x}_3=(-1,1,2)$. Το τρίγωνο έχει το ίδιο εμβαδόν με αυτό που έχει κορυφές τα $\vec{x}_1-\vec{x}_1=\vec{0}=(0,0,0)$, $\vec{x}_2-\vec{x}_1=(1,2,-1)$, $\vec{x}_3-\vec{x}_1=(-2,2,2)$ (παράλληλη μεταφορά)

Το τρίγωνο αυτό έχει εμβαδόν Ε ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού που φτιάχνουν τα $\vec{0}$, $\vec{x}_2-\vec{x}_1$, $\vec{x}_3-\vec{x}_1$, $\vec{x}_2+\vec{x}_3-2\vec{x}_1$.

Άρα το $E=\frac{1}{2}\|(\vec{x}_2-\vec{x}_1)\times(\vec{x}_3-\vec{x}_1)\|=\frac{1}{2}\|(1,2,-1)\times(-2,2,2)\|=\frac{1}{2}\|(6,0,6)\|=\frac{6}{2}\|(1,0,1)\|=3\sqrt{2}$

11) Να υπολογισθεί ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα $\vec{u}=(1,2,-1)$, $\vec{v}=(-2,0,3)$, $\vec{w}=(0,7,-4)$

(δηλ. έχει κορυφές τα $\vec{0}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$)

Λύση της 11)

Έχουμε αποδείξει ο ζητούμενος όγκος $V=|\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})|\left(=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|=|\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})|\right)=\left|\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\right|$

Υπολογίζουμε $V=\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix}\right| = \left|1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}\right| =$

$= |1\cdot(-21)-2\cdot 8-1\,(-14)| = |-23| = \underline{23}$