ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

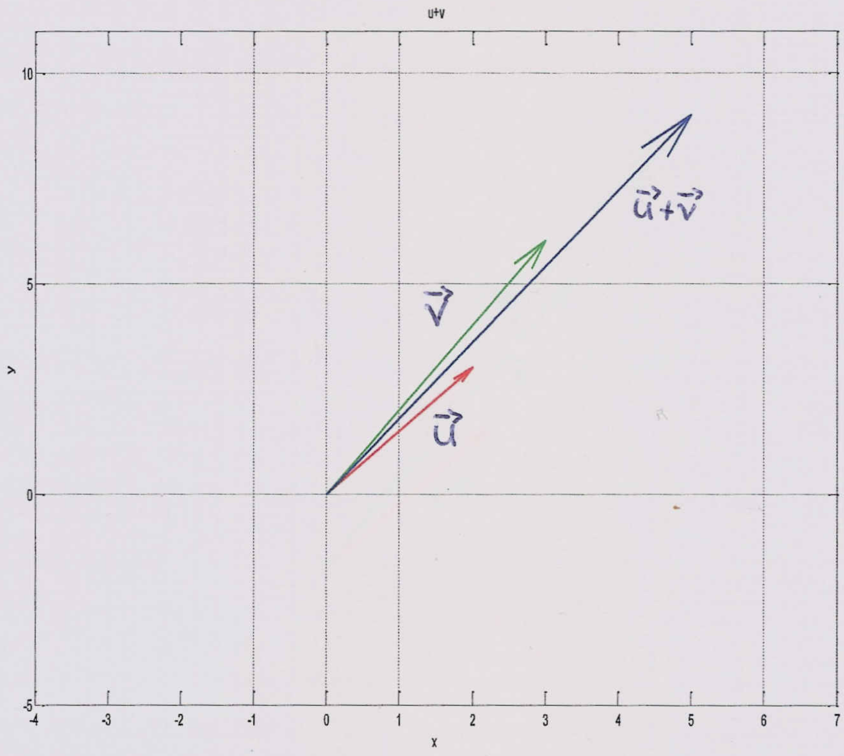
Ανάλυση ΙΙ
Προαιρετικές Ασκήσεις Εξάσκησης 2010-2011
Πακέτο No1

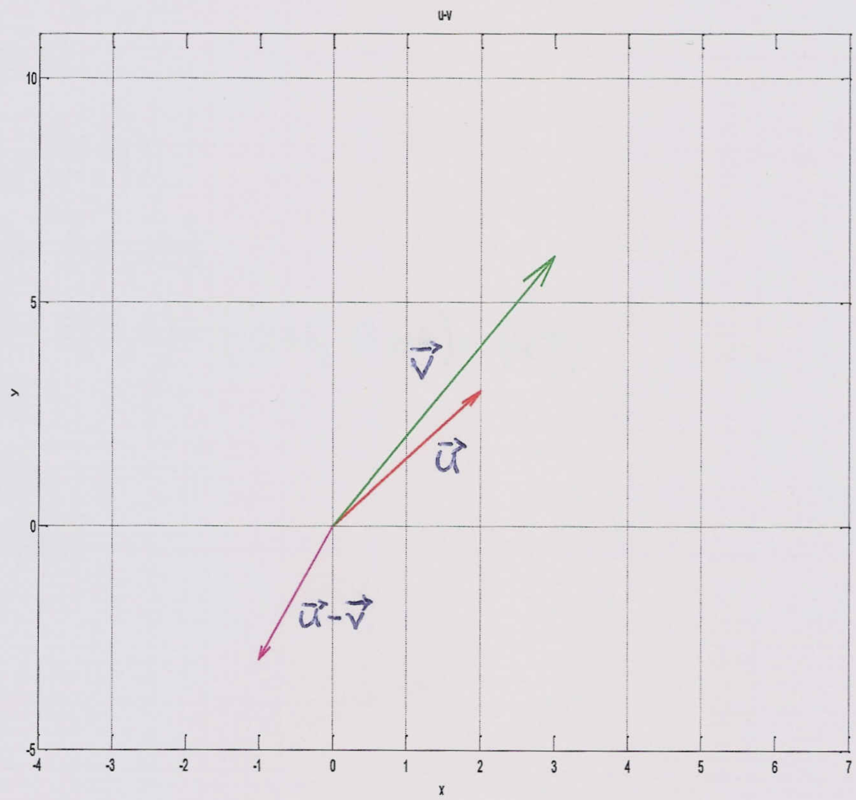
Αγγελόπουλος Βασίλειος
Α.Μ.: 1115 2005 00015

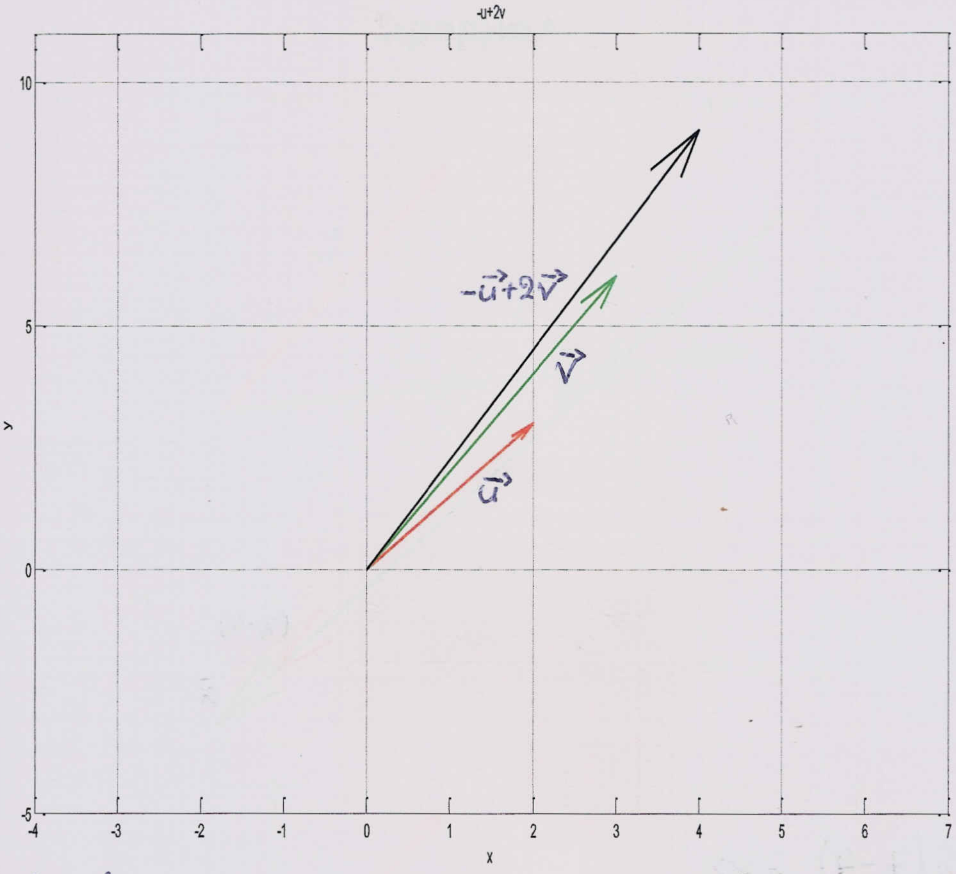
ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Ευαγγελάτου-Δάλλα Λεώνη

Αθήνα - 2011

Άσκηση 1



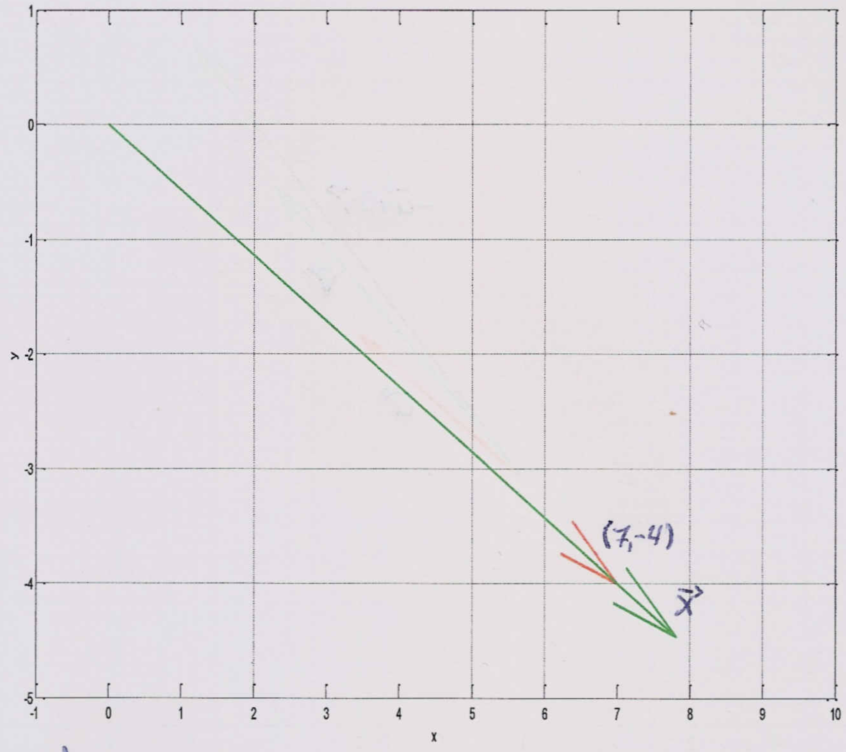




$\vec{u}=(2,3)$ και $\vec{v}=(3,6)$

- $\vec{u}+\vec{v}=(2+3,3+6)=(5,9)$
- $\vec{u}-\vec{v}=(2-3,3-6)=(-1,-3)$
- $-\vec{u}+2\vec{v}=(-2,-3)+2(3,6)=(-2+6,-3+12)=(4,9)$
- $\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$
- $\|\vec{v}\|=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{5^2+9^2}=\sqrt{106}$

Άσκηση 2



$x=(x,y)$ με $\vec{x}=\lambda(7,-4)$, $\lambda>0$

και $\|\vec{x}\|=9$.

Θα είναι: $x=7\lambda$ ①

$y=-4\lambda$ ②

Επιπλέον: $\|\vec{x}\|=\sqrt{x^2+y^2} \overset{①,②}{\Rightarrow}$

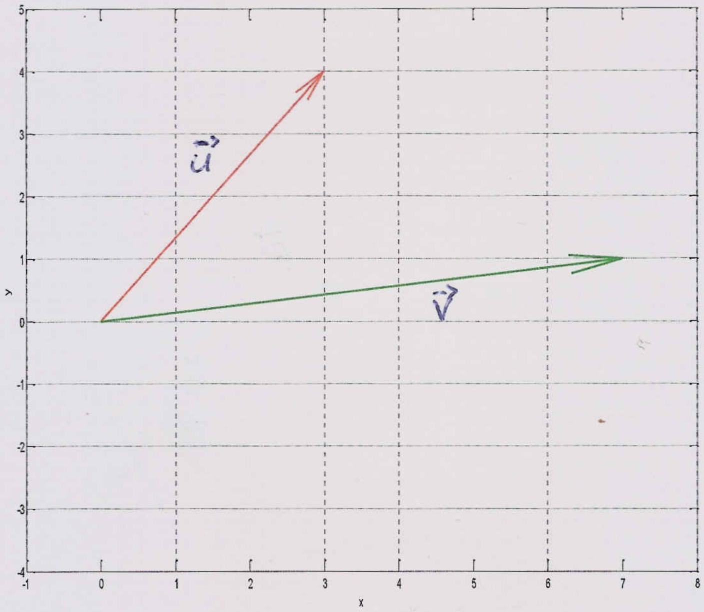
$\|\vec{x}\|=\sqrt{49\lambda^2+16\lambda^2} \Rightarrow$

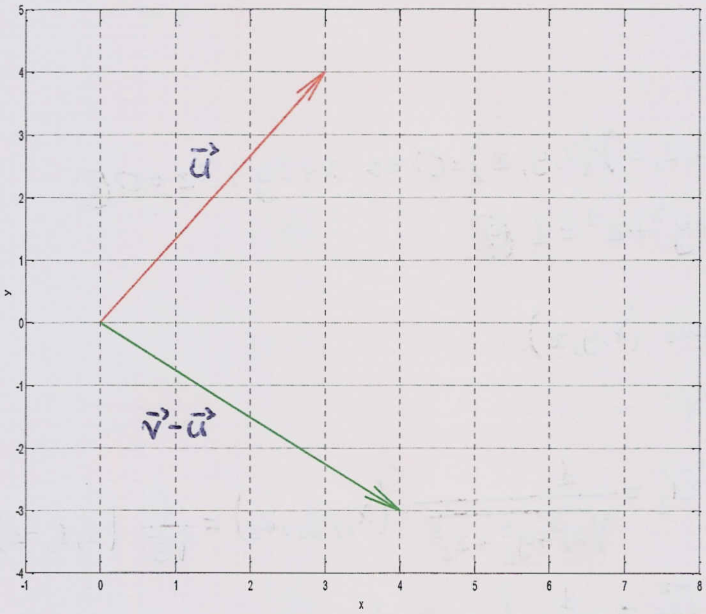
$9=\sqrt{65}\cdot\lambda \Rightarrow$

$\lambda=\dfrac{9\cdot\sqrt{65}}{65}$

Δηλαδή: $\vec{x}=\dfrac{9\cdot\sqrt{65}}{65}\cdot(7,-4)$

Άσκηση 3





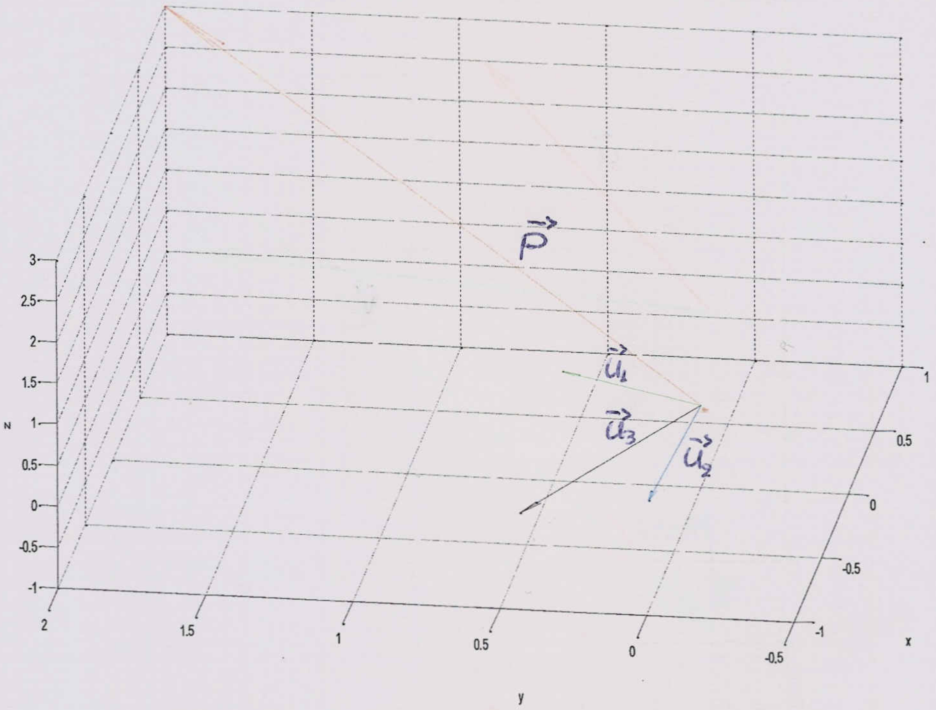
$\vec{u}=(3,4)$ και $\vec{v}=(7,1)$

- $\sigma υν\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \dfrac{21+4}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{49+1}} = \dfrac{25}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{2\cdot 25}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- $\vec{v}-\vec{u} = (-3+7, -4+1) = (4,-3) \rightsquigarrow \|\vec{v}-\vec{u}\| = 5$

$\sigma υν\varphi = \dfrac{(\vec{v}-\vec{u})\cdot\vec{u}}{\|\vec{v}-\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\|} = \dfrac{12+12}{5\cdot\sqrt{25}} = \dfrac{24}{25}$

Άσκηση 4



$\vec{p} = (1,2,3)$

Θα πρέπει: $\vec{p}\vec{x} = 0 \Rightarrow (1,2,3)\cdot(x,y,z) = 0 \Rightarrow x + 2y + 3z = 0$ (1)

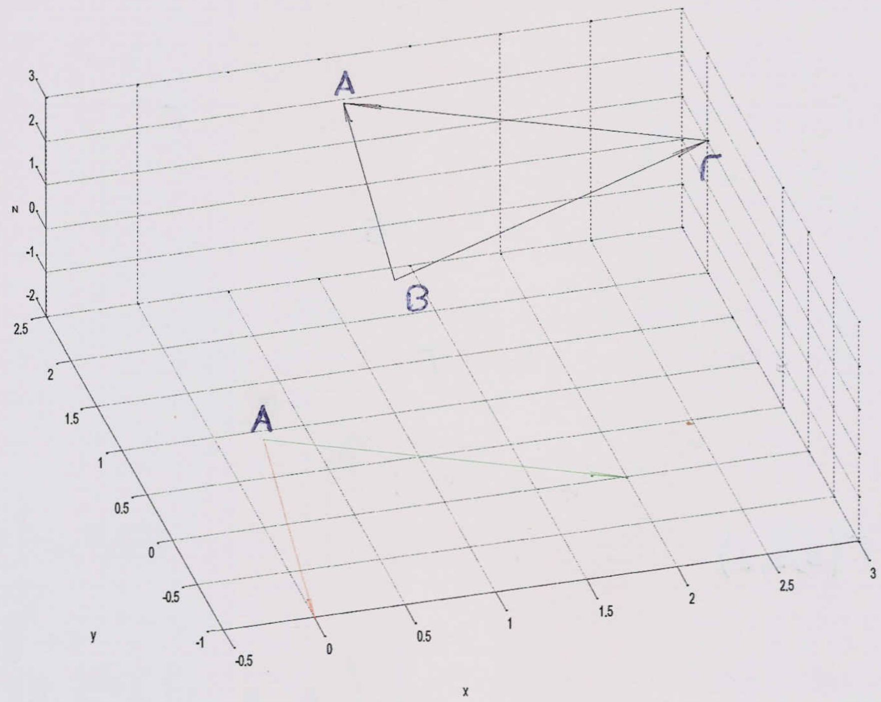
Επίσης: $\|\vec{x}\| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (2)

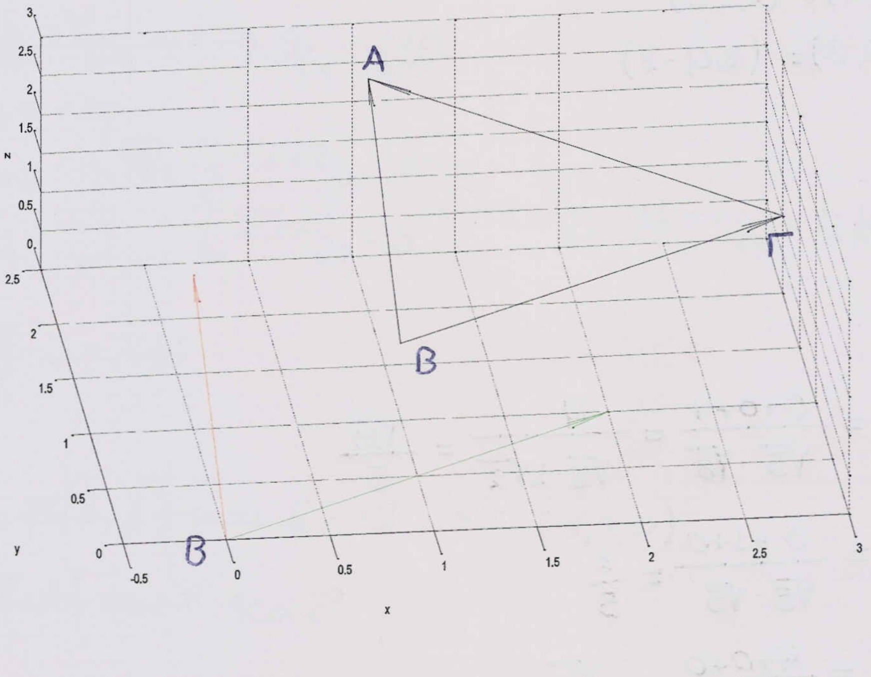
Δηλαδή, υπάρχουν άπειρα (x,y,z).

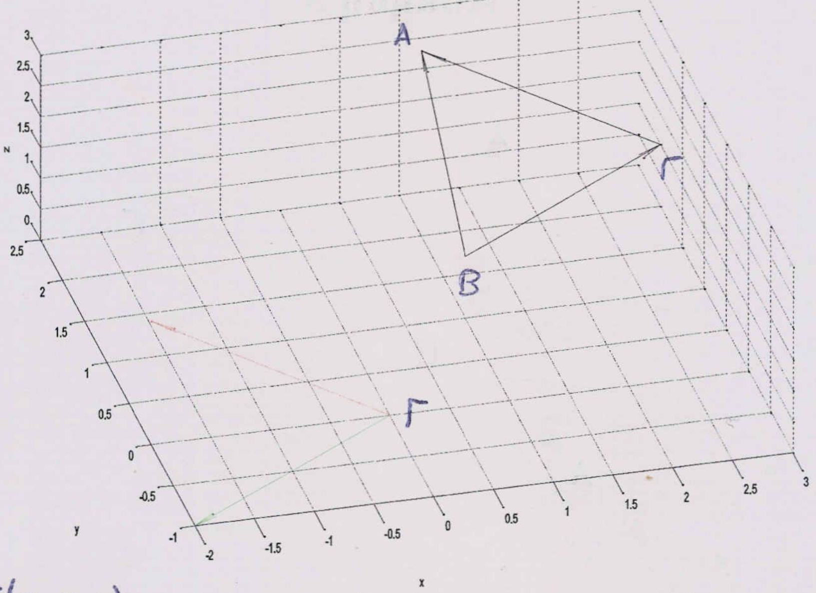
Άρα, θα έχουμε:

- $x_1 = 1,\ y_1 = 1,\ z_1 = -1 \rightsquigarrow \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \cdot (x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$
- $x_2 = -3,\ y_2 = 0,\ z_2 = 1 \rightsquigarrow \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,0,1)$
- $x_3 = -2,\ y_3 = 1,\ z_3 = 0 \rightsquigarrow \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)$

Άσκηση 5







$A(1,2,3)$, $B(1,1,1)$, $\Gamma(3,2,1)$

Θα είναι:

$\vec{AB} = (1,1,1) - (1,2,3) = (0,-1,-2)$

$\vec{B\Gamma} = (3,2,1) - (1,1,1) = (2,1,0)$

$\vec{A\Gamma} = (3,2,1) - (1,2,3) = (2,0,-2)$

$\hat{A} = \measuredangle(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})$

$\hat{B} = \measuredangle(-\vec{AB}, \vec{B\Gamma})$

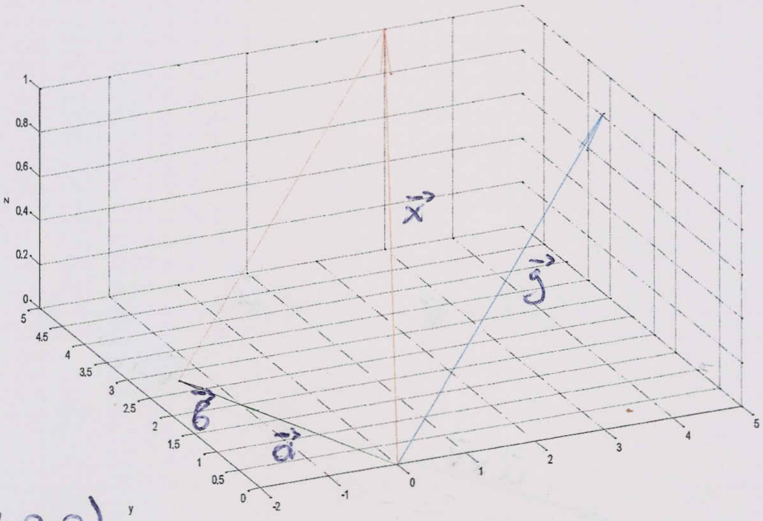
$\hat{\Gamma} = \measuredangle(-\vec{A\Gamma}, -\vec{B\Gamma})$

Άρα:

- $\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}}{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{A\Gamma}\|} = \dfrac{0+0+4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$
- $\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \dfrac{(-\vec{AB})\vec{B\Gamma}}{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{B\Gamma}\|} = \dfrac{0+1+0}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{1}{5}$
- $\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \dfrac{(-\vec{A\Gamma})(-\vec{B\Gamma})}{\|\vec{A\Gamma}\|\cdot\|\vec{B\Gamma}\|} = \dfrac{4+0+0}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Το τρίγωνο αυτό είναι οξυγώνιο (τα συνημίτονα όλων των γωνιών του είναι θετικά) και ισοσκελές, με ίσες γωνίες τις $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.

Άσκηση 6



$\vec{x}=(3,5,1)$ και $\vec{a}=(-1,2,0)$

Θα είναι: $\vec{x}=\lambda\vec{a}+\vec{g} \Rightarrow$

$\vec{x}=(-\lambda,2\lambda,0)+(g_1,g_2,g_3) \Rightarrow$

$\vec{x}=(-\lambda+g_1,\ 2\lambda+g_2,\ g_3)$ (1)

και: $\vec{g}\cdot\vec{a}=0 \Rightarrow -g_1+2g_2=0 \Rightarrow 2g_2=g_1$ (2)

Τότε: (1) $\Rightarrow \begin{cases} -\lambda+g_1=3 \\ 2\lambda+g_2=5 \\ g_3=1 \end{cases} \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} -\lambda+2g_2=3 \\ 2\lambda+g_2=5 \end{cases} \Rightarrow 5g_2=11 \Rightarrow g_2=11/5$

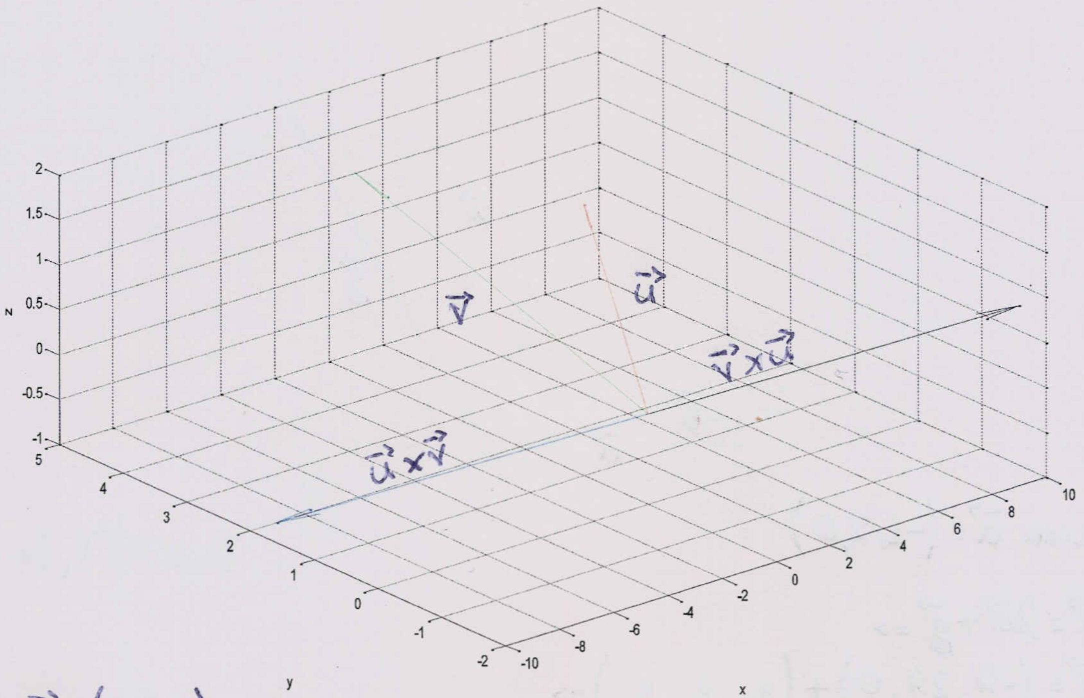
Έτσι: $\lambda=2g_2-3=\frac{22}{5}-3=7/5.$

$g_1=2g_2=22/5$

Δηλαδή: $\vec{g}=(22/5,\ 11/5,\ 1)$ και $\vec{b}=\lambda\vec{a}=7/5\cdot(-1,2,0)$.

Το $\vec{b}$ καλείται προβολή του $\vec{x}$ στο $\vec{a}$.

Άσκηση 7



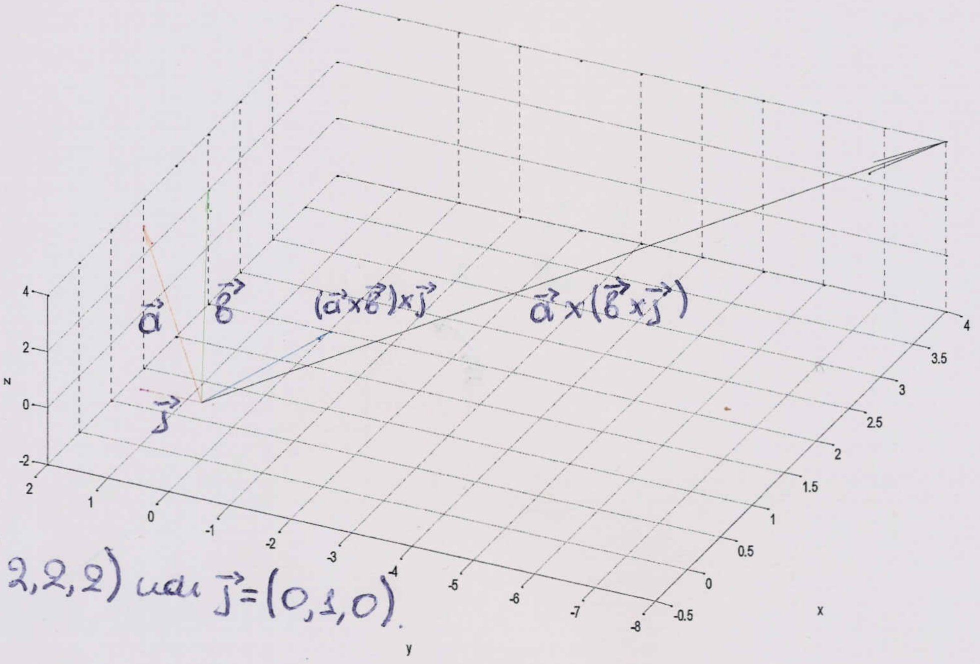
$\vec{u}=(0,1,2)$ και $\vec{v}=(1,5,1)$.

- $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (1\cdot1-2\cdot5)\vec{i}-(0\cdot1-2\cdot1)\vec{j}+(0\cdot5-1\cdot1)\vec{k}$
  $= -9\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k} = (-9,2,-1)$

- $\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2\cdot5-1\cdot1)\vec{i}-(1\cdot2-1\cdot0)\vec{j}+(1\cdot1-0\cdot5)\vec{k}$
  $= 9\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k} = (9,-2,1)$

Για τα 2 διανύσματα ισχύει: $\vec{v}\times\vec{u} = -(\vec{u}\times\vec{v})$.

Άσκηση 8



$\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(2,2,2)$ και $\vec{j}=(0,1,0)$.

- $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{j}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=(2\cdot2-2\cdot3)\vec{i}-(1\cdot2-2\cdot3)\vec{j}+(1\cdot2-2\cdot2)\vec{k}=(-2,4,-2)$$

$$(-2,4,-2)\times\vec{j}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 4 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(4\cdot0-2\cdot1)\vec{i}-((-2)\cdot0+0\cdot2)\vec{j}+((-2)\cdot1-0\cdot4)\vec{k}=(2,0,-2)$$

- $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{j})$

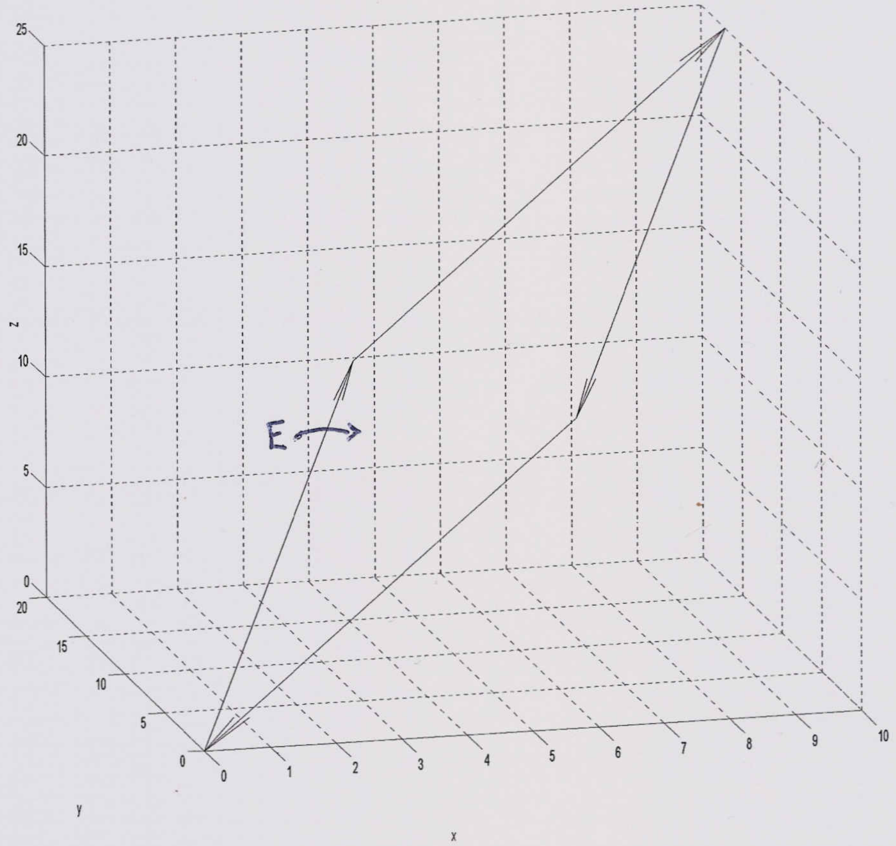
$$\vec{b}\times\vec{j}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(2\cdot0-2\cdot1)\vec{i}-(2\cdot0-0\cdot2)\vec{j}+(2\cdot1-0\cdot2)\vec{k}=(-2,0,2)$$

$$(1,2,3)\times(-2,0,2)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 2\end{vmatrix}=(2\cdot2-0\cdot3)\vec{i}-(1\cdot2+2\cdot3)\vec{j}+(1\cdot0+2\cdot2)\vec{k}=(4,-8,4)$$

- $(\vec{a}\cdot\vec{j})\cdot\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{j})\cdot\vec{a}=2\cdot(2,2,2)-2(1,2,3)=(2,0,-2)=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{j}$
- $(\vec{a}\cdot\vec{j})\cdot\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{j}=2\cdot(2,2,2)-12(0,1,0)=(4,-8,4)=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{j})$

Τα 2 διανύσματα δεν είναι ίσα και ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα.

Άσκηση 9



Κορυφές:

(0,0,0), (3,6,15), (7,11,10), (10,17,25)

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν παραλληλογράμμου με κορυφές τα $\vec{0}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}$, όπου $\vec{u}, \vec{v}$ $(\neq \vec{0})$ γραμμικώς ανεξάρτητα, δίνεται από τον τύπο:

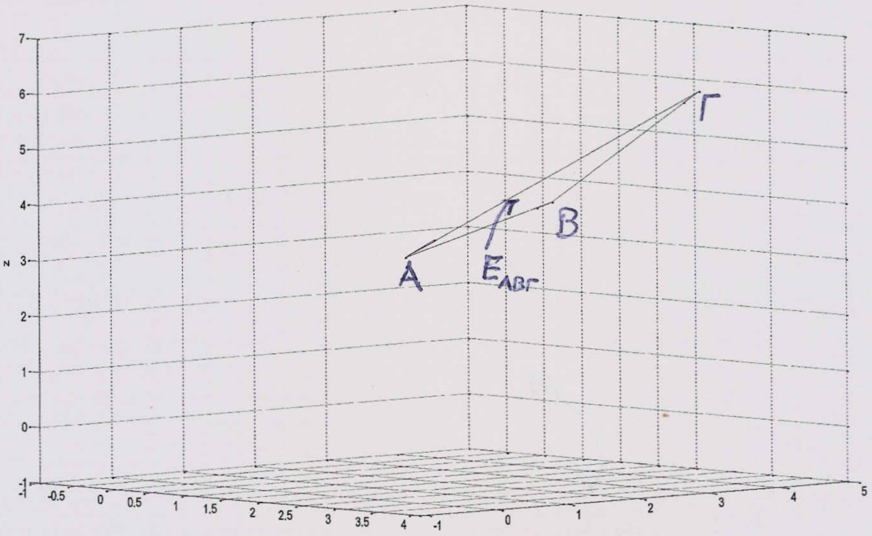
$E = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$

Έτσι: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 15 \\ 7 & 11 & 10 \end{vmatrix} = (6 \cdot 10 - 11 \cdot 15)\vec{i} - (3 \cdot 10 - 7 \cdot 15)\vec{j} + (3 \cdot 11 - 6 \cdot 7)\vec{k}$

$= (-105, 75, -9)$

Άρα: $E = \|(-105, 75, -9)\| = \sqrt{16731} = 39\sqrt{11}$.

Άσκηση 10



Κορυφές:

$A=(1,2,3)$, $B=(2,3,4)$, $\Gamma=(3,4,6)$

Έστω: $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(2,3,4)$ και $\vec{\gamma}=(3,4,6)$.

Αν μεταφέρουμε παράλληλα το τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$, θα προκύψει νέο, με εμβαδόν ίσο με αυτό του αρχικού. Έτσι:

$\vec{a}'=\vec{a}-\vec{a}=(0,0,0)$

$\vec{b}'=\vec{b}-\vec{a}=(2,3,4)-(1,2,3)=(1,1,1)$

$\vec{\gamma}'=\vec{\gamma}-\vec{a}=(3,4,6)-(1,2,3)=(2,2,3)$

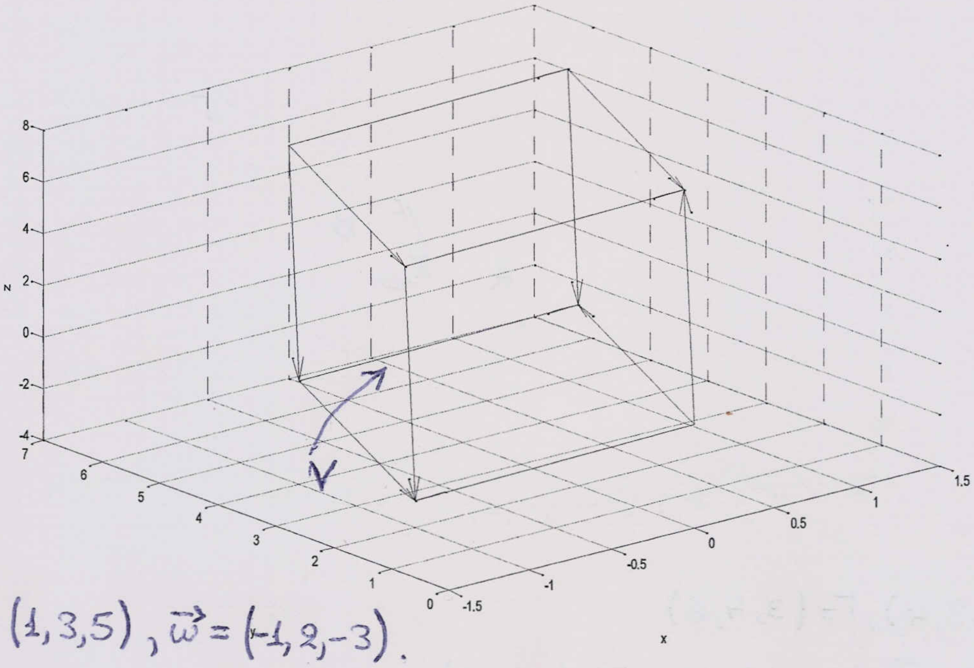
Το νέο τρίγωνο θα έχει το 1/2 του εμβαδού του παραλληλογράμμου με κορυφές τα $\vec{0}$, $\vec{b}'$, $\vec{\gamma}'$, $\vec{b}'+\vec{\gamma}'$. Οπότε, θα είναι:

$$E_{AB\Gamma}=\frac{1}{2}\|\vec{b}'\times\vec{\gamma}'\|=\frac{1}{2}\|(1,1,1)\times(2,2,3)\| \quad (1)$$

$$(1,1,1)\times(2,2,3)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{vmatrix}=(3\cdot1-1\cdot2)\vec{i}-(1\cdot3-1\cdot2)\vec{j}+(1\cdot2-2\cdot1)\vec{k}=(1,-1,0) \quad (2)$$

Δηλαδή: (1),(2) $\Rightarrow E_{AB\Gamma}=\frac{1}{2}\|(1,-1,0)\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Άσκηση 11



$\vec{u}=(0,2,3)$, $\vec{v}=(1,3,5)$, $\vec{w}=(-1,2,-3)$.

Γνωρίζουμε ότι ο όγκος παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα $\vec{0}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{u}+\vec{w}, \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ δίνεται από τη σχέση:

$V=|\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})|$

Έτσι:

$$\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (2\cdot 5-3\cdot 3)\cdot(-1)-(0\cdot 5-1\cdot 3)\cdot 2+(0\cdot 3-1\cdot 2)\cdot(-3)$$
$$= -1+6+6=11$$

Άρα: $V=|\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})|=|11|=11$.