



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικό και Καποδιστριακό  
Πανεπιστήμιο Αθηνών

---

**Τίτλος Μαθήματος: Μοριακή Κβαντική Χημεία**

**Ενότητα 1: Το Πείραμα Stern – Gerlach**

Αριστείδης Μαυρίδης

Τμήμα Χημείας

---

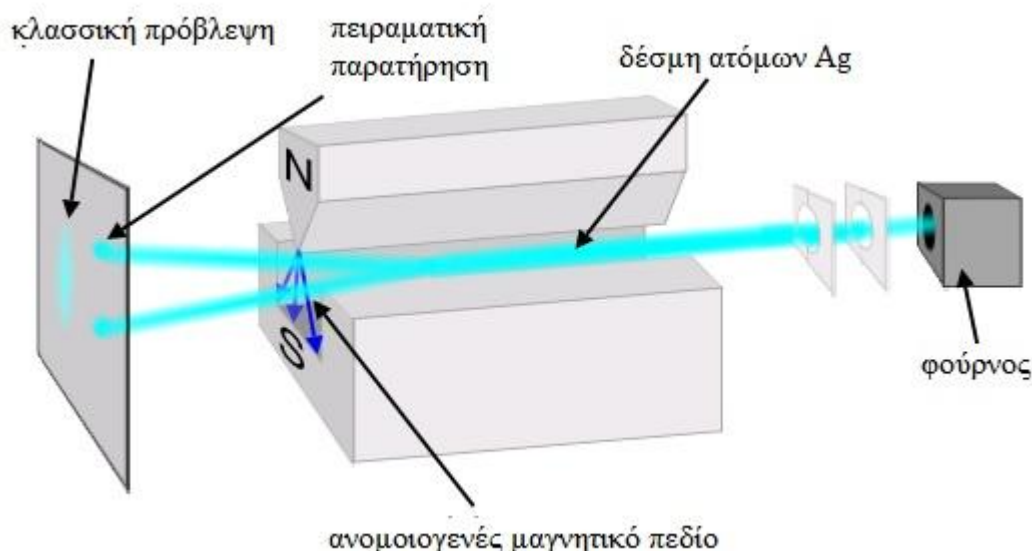
1.	Το Πείραμα Stern – Gerlach .....	3
1.1	Περιγραφή του Πειράματος.....	3
1.2	Διαδοχικά Πειράματα Stern – Gerlach .....	5
1.3	Πόλωση του φωτός.....	5

## 1. Το Πείραμα Stern – Gerlach<sup>1</sup>

Σε αυτή την ενότητα θα εστιάσουμε στο πείραμα Stern – Gerlach. Το πείραμα οφείλει την πατρότητα του στον O. Stern ο οποίος το εισηγήθη το 1921 και έγινε στη Φρανκφούρτη το 1922 σε συνεργασία με τον W. Gerlach στο εργαστήριο του Stern. Το πείραμα αυτό υποδεικνύει με δραματικό τρόπο την αναγκαιότητα της αναμορφώσεως – εγκαταλείψεως των εννοιών της κλασικής μηχανικής. Στις επόμενες ενότητες ο φορμαλισμός της κβαντικής μηχανικής θα παρουσιασθεί κατά κάποιο τρόπο αξιωματικά αλλά πάντα έχοντας ως οδηγό τα αποτελέσματα των πειραμάτων Stern–Gerlach το παράδειγμα του πειράματος Stern – Gerlach (SG)

### 1.1 Περιγραφή του Πειράματος

Στην παράγραφο αυτή θα κάνουμε μια σύντομη περιγραφή του πειράματος SG. Αρχικώς, άτομα αργύρου ( $\text{Ag}$ ,  $[\text{Ar}] 4d^{10} 5s^1$ ) παράγονται εντός φούρνου. Ο φούρνος έχει μία μικρή οπή μέσω της οποίας έχουμε διαφυγή ορισμένων ατόμων αργύρου (μη πολωμένων ως προς spin). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, η δέσμη ατόμων αργύρου περνάει μέσα από μία κατευθυντήρια σχισμή και έπειτα υπόκειται στην επίδραση ενός ανομοιογενούς μαγνητικού πεδίου,  $\vec{B} = B(z)\hat{e}_z$ , όπου  $B(z)$  είναι η συνάρτησις εντάσεως του μαγνητικού πεδίου και  $\hat{e}_z$  μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του άξονος  $z$ .



Σχήμα 1: Το πείραμα Stern - Gerlach<sup>2</sup>

<sup>1</sup> W. Gerlach, O. Stern; Über die Richtungsquantelung im Magnetfeld, Annalen der Physik, (4), **74**, (1924), 672-699

<sup>2</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Stern%E2%80%93Gerlach\\_experiment](https://en.wikipedia.org/wiki/Stern%E2%80%93Gerlach_experiment)

Ποια είναι η επίδραση του ανομοιογενούς μαγνητικού πεδίου στα άτομα αργύρου; Το άτομο του αργύρου αποτελείται από έναν πυρήνα και 47 ηλεκτρόνια, εκ των οποίων τα 46 είναι συζευγμένα και μόνον ένα είναι μονήρες. Αν αγνοήσουμε το πυρηνικό spin, βλέπουμε ότι το άτομο έχει στροφορμή αποδιδόμενη αποκλειστικώς στη στροφορμή spin του «εξωτερικού» ηλεκτρονίου (στην κατάσταση 5s δεν έχουμε τροχιακή στροφορμή). Άρα, το άτομο του αργύρου διαθέτει μαγνητική διπολική ροπή ανάλογη του ηλεκτρονιακού spin,  $\mathbf{S}$ ,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \gamma \hat{\mathbf{S}} \quad (1)$$

όπου η σταθερά αναλογίας δίνεται από τη σχέση

$$\gamma = \frac{e}{m_e c} \quad (2)$$

όπου  $e < 0$ ,  $m_e$  η μάζα του ηλεκτρονίου και  $c$  η ταχύτητα του φωτός (ακριβώς).

Η ενέργεια αλληλεπιδράσεως με το (ανομοιογενές) μαγνητικό πεδίο, όπως στην κλασσική φυσική, είναι

$$E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (3)$$

Η δύναμη  $F_z$  η οποία ασκείται επί του ατόμου Ag θα είναι:

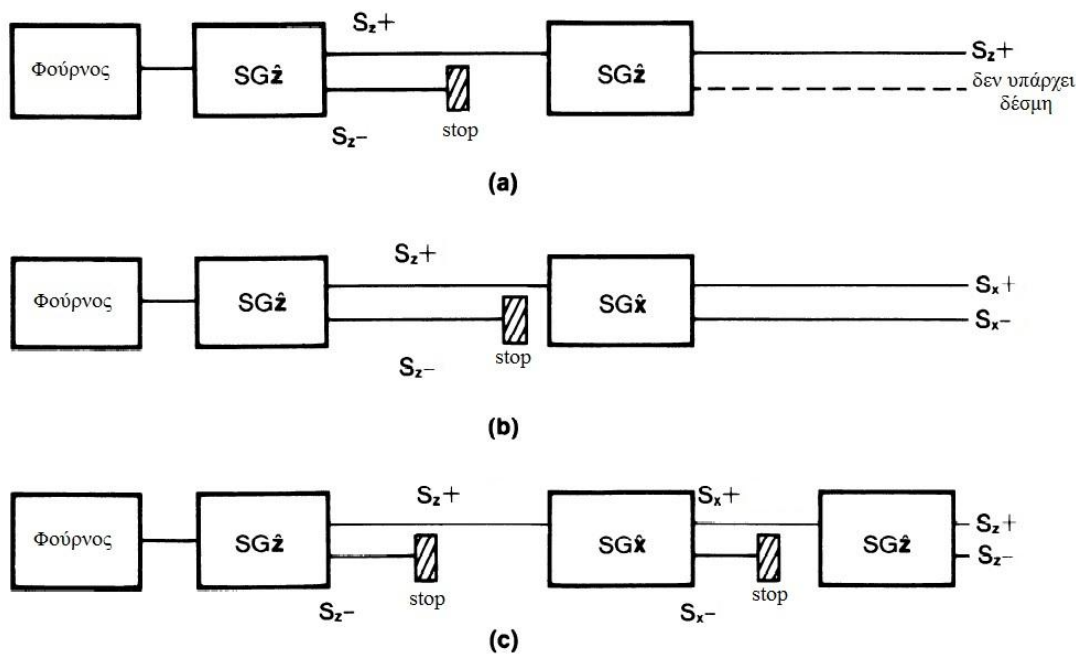
$$F_z = \frac{\partial}{\partial z} (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) = \mu_z \frac{\partial B(z)}{\partial z} \quad (4)$$

(αγνοούμε τις άλλες συνιστώσες του  $\mathbf{B}$ , τις οποίες μπορούμε να τις κάνουμε πολύ μικρές)

Αναλόγως του προσήμου της  $\mu_z$  (δηλαδή του  $S_z = \pm \frac{1}{2}$ ) η δέσμη (τα άτομα της δέσμης), διαχωρίζεται σε δυο δέσμες μια προς τα «πάνω» και μια προς τα «κάτω». Με άλλα λόγια η συσκευή SG «μετράει» τις συνιστώσες του  $\boldsymbol{\mu}$ , δηλαδή του  $\hat{\mathbf{S}}$ , κατά μήκος μίας «αυθαίρετης» διευθύνσεως  $z$ . Προφανώς η κατεύθυνση των ατόμων εντός του φούρνου και πριν της εισαγωγής των εντός του πεδίου είναι τυχαία: δεν υφίσταται προνομιούχος κατεύθυνση του  $\boldsymbol{\mu}$  (μη πολωμένα άτομα). Εάν λοιπόν το ηλεκτρόνιο ήταν κλασσικό σωματίδιο, θα περιμέναμε όλες τις δυνατές τιμές του  $\mu_z$ , από  $-|\boldsymbol{\mu}|$  έως  $|\boldsymbol{\mu}|$ . Το αποτέλεσμα θα ήταν μία συνεχής γραμμή και όχι δύο σημεία (κηλίδες) επί του συστήματος ανιχνεύσεως. Οι δύο πιθανές τιμές του  $\hat{S}_z$  που παρατηρούνται εδώ είναι ανάλογες της σταθεράς του Planck,  $\hbar$ , δηλαδή  $S_z = +\frac{\hbar}{2}$  και  $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ , όπου  $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$  Js. Άρα, έχουμε κβάντωση της στροφορμής.

## 1.2 Διαδοχικά Πειράματα Stern – Gerlach

Προφανώς ότι ισχύει για την κατεύθυνση  $-z$  ισχύει για κάθε κατεύθυνση. Η δέσμη θα διαχωριζόταν σε δύο μέρη  $S_x +$  και  $S_x -$  αντί για  $S_z +$  και  $S_z -$ .



Σχήμα 2: Διαδοχικά πειράματα Stern - Gerlach

Η περίπτωση (a) όπως βλέπουμε στο Σχήμα 2 είναι «φυσιολογική», οι (b) και (c) όμως όχι! Αν και η  $S_z -$  συνιστώσα αφαιρέθηκε τελείως μετά το πρώτο φίλτρο SG εμφανίζεται και πάλι μετά το τρίτο φίλτρο SG! Αυτό σημαίνει ότι δε μπορούμε συγχρόνως να «μετρήσουμε» την  $S_z$  και την  $S_x$  συνιστώσα. Η «επιλογή» της  $S_x +$  από το δεύτερο φίλτρο SG καταστρέφει απολύτως κάθε γνώση μας (προηγούμενη) για τις συνιστώσες  $S_z \pm$ .

Η κατάσταση αυτή δεν βελτιώνεται με οιοδήποτε διαφορετικό πείραμα, το θέμα δεν είναι θέμα πειραματικών διατάξεων αλλά ενδογενές της κβαντικής μηχανικής.

## 1.3 Πόλωση του φωτός

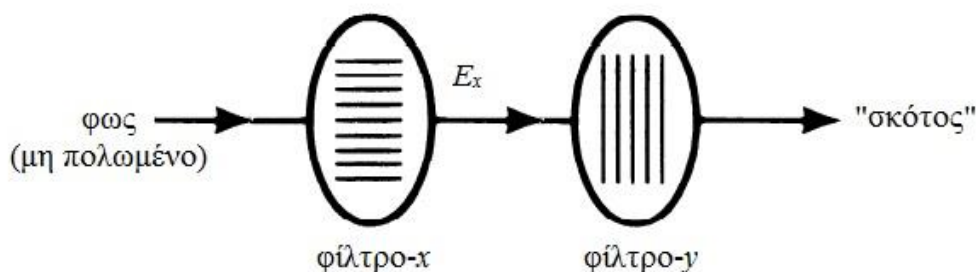
Ας δούμε κάποιο ανάλογο πείραμα με φως το οποίο είναι ίσως (ή έτσι νομίζουμε) πιο οικείο. Έστω μονοχρωματική ακτινοβολία (φως) κινούμενη κατά μήκος της κατευθύνσεως  $\hat{z}$ . Γραμμικό (ή επίπεδο) πολωμένο φως με το διάνυσμα πολώσεως κατά μήκος της διεύθυνσεως  $\hat{x}$  αποδίδεται από την κάτωθι σχέση.

$$\vec{E}(t) = E_0 \hat{x} \cos(kz - \omega t) \quad (5)$$

Πολωμένο φως ως προς την  $\hat{y}$  διεύθυνση αποδίδεται από τη σχέση (κινούμενο επίσης κατά μήκος του  $\hat{z}$ ).

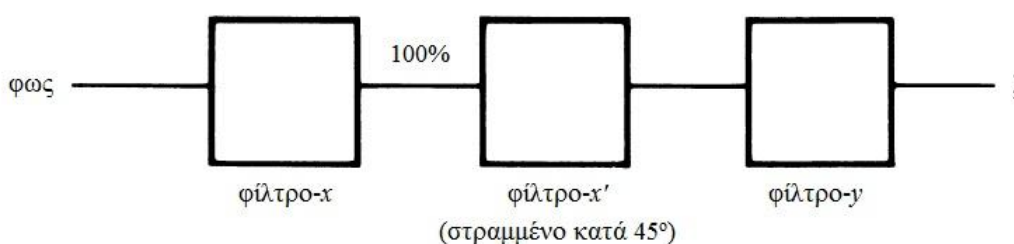
$$\vec{E}(t) = E_0 \hat{y} \cos(kz - \omega t) \quad (6)$$

Προφανώς ένα φίλτρο  $-\hat{x}$  γίνεται φίλτρο  $-\hat{y}$  εάν το περιστρέψουμε  $90^\circ$  περί την  $\hat{z}$ -κατεύθυνση (κατεύθυνση κινήσεως του κύματος). Είναι γνωστό ότι εάν μία δέσμη φωτός διέλθει μέσα από ένα φίλτρο  $-\hat{x}$  και επακόλουθα μέσα από ένα φίλτρο  $-\hat{y}$ , τότε δε θα εξέλθει καμία δέσμη φωτός από τη διάταξη αυτή (Σχήμα 3).



Σχήμα 3: Δέσμη φωτός που διέρχεται από φίλτρα Polaroid (x και y)

Τι θα συμβεί όμως εάν μεταξύ των  $\hat{x}$ -,  $\hat{y}$ -φίλτρων τοποθετηθεί ένα φίλτρο  $-\hat{x}'$ , το οποίο έχουμε περιστρέψει κατά  $45^\circ$  στο επίπεδο  $xy$  (Σχήμα 4).



Σχήμα 4: Δέσμη φωτός που διέρχεται από φίλτρα Polaroid (x, x' και y)

Στην προκειμένη περίπτωση, φως εμφανίζεται από την έξοδο του φίλτρου  $-\hat{y}$ , αν και η πολωμένη ακτίνα μετά το φίλτρο  $-\hat{x}$  δεν είχε  $\hat{y}$ -συνιστώσα! Αυτό σημαίνει ότι μετά την τοποθέτηση του φίλτρου  $-\hat{x}'$  ξεχνάμε τελείως την πόλωση  $-\hat{x}$ : δηλαδή η παρέμβαση του  $\hat{x}'$  καταστρέφει πλήρως την πόλωση  $-\hat{x}$ .

Σημειώστε τις αναλογίες με τις «πολώσεις» SG τις οποίες προηγουμένως περιγράψαμε.

$$\text{Αναλογίες: } S_z \pm (\text{άτομα}) \leftrightarrow \hat{x}, \hat{y} (\text{φως})$$

$$S_x \pm (\text{άτομα}) \leftrightarrow \hat{x}', \hat{y}' (\text{φως})$$

Πως περιγράφουμε κλασσικώς (κλασσική ηλεκτροδυναμική) την κατάσταση του φωτός;

$$E = E_0 \hat{x}' \cos(kz - \omega t) = E_0 \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(kz - \omega t) \right] \quad (7)$$

και

$$E = E_0 \hat{y}' \cos(kz - \omega t) = E_0 \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(kz - \omega t) \right] \quad (8)$$

Παρατηρείστε ότι η πόλωση  $\hat{x}'$  (ή  $\hat{y}'$ ) εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των  $\hat{x}, \hat{y}$  – πολώσεων. Έτσι, ερμηνεύουμε την εμφάνιση φωτός μετά το φίλτρο  $-\hat{y}$ , διότι υπάρχει η συνιστώσα  $\hat{y}$  εντός της  $\hat{x}'$  (ή  $\hat{y}'$ ).

Χρησιμοποιώντας αναλογίες θα μπορούσαμε να υποθέσουμε έναν χώρο δύο διαστάσεων και να γράψουμε στην περίπτωση των ατόμων Ag τις σχέσεις

$$|S_x;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z;+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z;-\rangle \quad (9)$$

$$|S_x;-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z;+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z;-\rangle \quad (10)$$

Με τη γραφή (9) ή (10) μπορούμε να καταλάβουμε τα αποτελέσματα SG, αλλά εν μέρει.

Τι γίνεται όμως με τις καταστάσεις  $|S_y;+\rangle$  και  $|S_y;-\rangle$ ;

Θα μπορούσαμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε τις συνιστώσες  $|S_z;+\rangle$  και  $|S_z;-\rangle$ , δηλαδή αυτόν τον υποθετικό διανυσματικό χώρο, αλλά τον εξαντλούμε στη γραφή των  $|S_x;+\rangle$  και  $|S_x;-\rangle$ .

Πως θα διακρίνουμε τα διανύσματα  $|S_x;\pm\rangle$  και  $|S_y;\pm\rangle$ ;

Εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αναλογίες με το κυκλικό πολωμένο φως. Το κυκλικό πολωμένο φως παράγεται από γραμμικώς πολωμένο φως αφού το υποχρεώσουμε να περάσει από ειδικό,  $\frac{1}{4}$  – φίλτρου.

Πως παριστάνουμε μαθηματικώς το κυκλικώς πολωμένο φως; Δεξιόστροφο κυκλικώς πολωμένο φως δεν είναι τίποτε άλλο παρά γραμμικός συνδυασμός  $\hat{x}$  – πολωμένου και  $\hat{y}$  – πολωμένου φωτός με διαφορά φάσεως μεταξύ τους κατά  $90^\circ$ , δηλαδή

$$\vec{E} = E_0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(kz - \omega t + \pi/2) \right\} \quad (11)$$

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{\epsilon}) \quad (12)$$

όπου:

$$\vec{\epsilon} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \exp[i(kz - \omega t)] + \frac{i}{\sqrt{2}} \hat{y} \exp[i(kz - \omega t)] \right\}, \quad i = \exp(i\pi/2) \quad (13)$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τις ακόλουθες αναλογίες:

$S_y +$  (άτομο)  $\leftrightarrow$  δεξιόστροφο κυκλικώς πολωμένο φως

$S_y -$  (άτομο)  $\leftrightarrow$  αριστερόστροφο κυκλικώς πολωμένο φως

Τότε:

$$|S_y; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; +\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}} |S_z; -\rangle \quad (14)$$

Η (14) διαφέρει από την (9) και (10) λόγω της μιγαδικής μονάδας. Αυτό σημαίνει ότι ο δισδιάστατος διανυσματικός χώρος ο οποίος απαιτείται για να περιγράψει τις καταστάσεις spin του ατόμου του Ag είναι χώρος διανυσματικός μεν αλλά και μιγαδικός δε. Δηλαδή γραμμικός συνδυασμός των  $|S_z; \pm\rangle$  διανυσμάτων αλλά με μιγαδικούς συντελεστές.

Ας παρατηρηθεί ότι μιλήσαμε για «φως» αλλά όχι για φωτόνια(!). Οι αναλογίες μας βασίσθηκαν στις εξισώσεις Maxwell, δηλαδή στην κλασσική ηλεκτροδυναμική.



## Σημειώματα

### Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0

### Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Αριστείδης Μαυρίδης, 2015. Αριστείδης Μαυρίδης. «Μοριακή Κβαντική Χημεία. Το Πείραμα Stern - Gerlach». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: [opencourses.uoa.gr/courses/CHEM6](http://opencourses.uoa.gr/courses/CHEM6)

### Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

### Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

