<u>Ενότητα 3: Συμβατότης – Ασυμβατότης</u>

<u>Άσκηση 3.1</u>

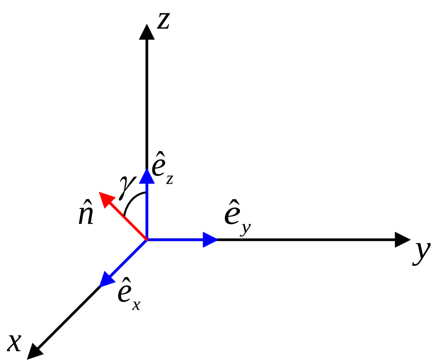
Ένα σύστημα με spin $1/2$ γνωρίζουμε ότι βρίσκεται σε μια ιδιοκατάσταση του $\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n}$ με ιδιοτιμή $\hbar/2$, όπου το $\hat{n}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα πάνω στο $xz-$επίπεδο που σχηματίζει γωνία γ με τον θετικό $z-$άξονα.

i. Υποθέστε ότι πραγματοποιείται μέτρηση του $\hat{S}_x$. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε $+\hbar/2$;

ii. Υπολογίστε τη διακύμανση του $\hat{S}_x$, δηλαδή, $\left\langle\left(\hat{S}_x-\left\langle\hat{S}_x\right\rangle\right)^2\right\rangle$.

(Για να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις ελέγξτε το αποτέλεσμα για τις ειδικές περιπτώσεις όπου η γωνία γ είναι 0, $\pi/2$, και π.)

<u>Λύση:</u>



i. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\hat{n}=\hat{e}_x\sin\gamma+\hat{e}_z\cos\gamma$$

Άρα,

$$\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n}=\left(\hat{S}_x\hat{e}_x+\hat{S}_y\hat{e}_y+\hat{S}_z\hat{e}_z\right)\cdot\left(\hat{e}_x\sin\gamma+\hat{e}_z\cos\gamma\right)=\hat{S}_\chi\sin\gamma+\hat{S}_z\cos\gamma$$

Ή

$$\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n}=\hbar/2\left(|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle+|\right)\sin\gamma+\hbar/2\left(|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|\right)\cos\gamma$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση ο τελεστής $\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n}$ είναι διαγώνιος με ιδιοτιμή $+\hbar/2$ ως προς (άγνωστο προς στιγμήν) ιδιο-ket το οποίο σύμφωνα με τους συμβολισμούς μας το γράφουμε $|x\rangle=\left|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n};+\right\rangle$, δηλαδή

$$\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n}\left|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n};+\right\rangle=+\hbar/2\left|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n};+\right\rangle$$

(ή ότι ο τελεστής $\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n}$ τον οποίο γνωρίζουμε είναι διαγώνιος ως προς $|x\rangle$)

Τι ζητάμε; Την πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση $\left|\hat{S}_x;+\right\rangle$, δηλαδή κατ' αρχάς το amplitude (εύρος) $\left\langle \hat{S}_x;+\middle|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n};+\right\rangle$ και ειδικότερα $\left|\left\langle \hat{S}_x;+\middle|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n};+\right\rangle\right|^2$. Άρα, πρέπει να υπολογίσουμε το $\left|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n};+\right\rangle \equiv |x\rangle$.

Γράφουμε την αναπαράσταση του $\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n}$ ως προς το σύνολο $|+\rangle$, $|-\rangle$ (πλήρες).

Έχουμε:

$$\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n} = \begin{pmatrix} \langle +|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n}|+\rangle & \langle +|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n}|-\rangle \\ \langle -|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n}|+\rangle & \langle -|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n}|-\rangle \end{pmatrix} = \hbar/2 \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix}$$

Λύνουμε την αντίστοιχη σεκουλική εξίσωση η οποία προκύπτει από τη σχέση:

$$\hbar/2 \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Θέλω $\det\left(\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n} - \lambda\hat{1}\right) = 0$ ή

$$\det\begin{pmatrix} \hbar/2\cos\gamma - \lambda & \hbar/2\sin\gamma \\ \hbar/2\sin\gamma & -\hbar/2\cos\gamma - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\hbar/2$$

Άρα,

$$\hbar/2 \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \hbar/2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Η λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος (αγνώστων a και b) είναι $b = a\tan\gamma/2$. Επειδή το σύστημα είναι κανονικοποιημένο, δηλαδή

$$\left\langle \hat{\vec{S}}\cdot\hat{n};+\middle|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n};+\right\rangle = 1$$

Άρα

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{\cos^2\gamma/2} = \cos\gamma/2$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη + σύμβαση.

Άρα

$$\left|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n};+\right\rangle = a\left|+\right\rangle + b\left|-\right\rangle = \cos\gamma/2\left|+\right\rangle + \sin\gamma/2\left|-\right\rangle$$

Έχουμε επίσης

$$\left|\hat{S}_x;+\right\rangle = 1/\sqrt{2}\left|+\right\rangle + 1/\sqrt{2}\left|-\right\rangle$$

Άρα, η πιθανότητα α βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση $\left|\hat{S}_x;+\right\rangle$ είναι

$$\left|\left\langle \hat{S}_x;+\middle|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n};+\right\rangle\right|^2 = \left|\left(1/\sqrt{2}\left\langle+\right| + 1/\sqrt{2}\left\langle-\right|\right)\left(\cos\gamma/2\left|+\right\rangle + \sin\gamma/2\left|-\right\rangle\right)\right|^2 = 1/2\left(1+\sin\gamma\right)$$

- Για $\gamma = 0$ (βλ. Σχήμα), το οποίο σημαίνει ότι $\left|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n};+\right\rangle = \left|\hat{S}_z;+\right\rangle = \left|+\right\rangle$, έχουμε

$$\left|\left\langle \hat{S}_x;+\middle|\hat{S}_z;+\right\rangle\right|^2 = 1/2\left(0+1\right) = 1/2$$

- Για $\gamma = \pi/2$ (βλ. Σχήμα), το οποίο σημαίνει ότι $\left|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n};+\right\rangle = \left|\hat{S}_x;+\right\rangle$, έχουμε

$\left|\left\langle \hat{S}_x;+\middle|\hat{S}_x;+\right\rangle\right|^2 = 1/2\left(1+1\right) = 1$ (ορθώς, το $\left|\hat{S}_x;+\right\rangle$ είναι κανοικοποιημένο)

- Για $\gamma = \pi$ (βλ. Σχήμα), το οποίο σημαίνει ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $\left|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n};+\right\rangle = \left|\hat{S}_z;-\right\rangle$, έχουμε

$$\left|\left\langle \hat{S}_x;+\middle|\hat{S}_z;-\right\rangle\right|^2 = 1/2\left(1+0\right) = 1/2$$

Συμπερασμα: Η πιθανότητα (παραμετροποιημένη ως προς γ) να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση $\left|\hat{S}_x;+\right\rangle$ είναι κατά τα γνωστά

$$\left|\left\langle \hat{S}_x;+\middle|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{n};+\right\rangle\right|^2 = 1/2\left(1+\sin\gamma\right), \quad 0 \le \gamma \le \pi$$

Επιλέγοντας το κατάλληλο γ βρίσκω την πιθανότητα.

ii. Έχουμε ότι

$$\left\langle \left(\hat{S}_x - \left\langle \hat{S}_x \right\rangle\right)^2 \right\rangle = \left\langle \hat{S}_x{}^2 \right\rangle - \left(\left\langle \hat{S}_x \right\rangle\right)^2$$

Όπως γνωρίζουμε

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right)$$

$$\hat{S}_x{}^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right)\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right) = \frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|\right) = \frac{\hbar^2}{4}$$

Άρα,

$$\left\langle \hat{S}_x \right\rangle = \left[\cos\frac{\gamma}{2}\langle +| + \sin\frac{\gamma}{2}\langle -|\right]\frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right)\left[\cos\frac{\gamma}{2}|+\rangle + \sin\frac{\gamma}{2}|-\rangle\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{\hbar}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\hbar}{2}\sin\gamma$$

$$\left(\left\langle \hat{S}_x \right\rangle\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}\sin^2\gamma$$

$$\left\langle \hat{S}_x{}^2 \right\rangle = \left[\cos\frac{\gamma}{2}\langle +| + \sin\frac{\gamma}{2}\langle -|\right]\frac{\hbar^2}{4}\left[\cos\frac{\gamma}{2}|+\rangle + \sin\frac{\gamma}{2}|-\rangle\right] = \frac{\hbar^2}{4}\left[\cos^2\frac{\gamma}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right] = \frac{\hbar^2}{4}$$

Οπότε, με αντικατάσταση

$$\left\langle \left(\hat{S}_x - \left\langle \hat{S}_x \right\rangle\right)^2 \right\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(1 - \sin^2\gamma\right) = \frac{\hbar^2}{4}\cos^2\gamma$$

και τελικά

$$\left\langle \left(\Delta\hat{S}_x\right)^2 \right\rangle_{\gamma=0;\left|\hat{S}_z;+\right\rangle} = \frac{\hbar^2}{4},$$

$$\left\langle \left(\Delta\hat{S}_x\right)^2 \right\rangle_{\gamma=\pi/2;\left|\hat{S}_z;+\right\rangle} = 0,$$

$$\left\langle \left(\Delta\hat{S}_x\right)^2 \right\rangle_{\gamma=\pi;\left|\hat{S}_z;+\right\rangle} = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Άσκηση 3.2

Θεωρήστε ένα χώρο ket τριών διαστάσεων. Αν ένα σύνολο από ορθογωνικά ket – έστω τα $|1\rangle$, $|2\rangle$, και $|3\rangle$ – χρησιμοποιούνται σαν σύνολο βάσεως, οι τελεστές $\hat{\mathbf{A}}$ και $\hat{\mathbf{B}}$ αναπαρίστανται ως εξής:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

όπου τα a και b είναι πραγματικοί αριθμοί.

i. **Προφανώς ο τελεστής $\hat{\mathbf{A}}$ εμφανίζει εκφυλισμένο σύνολο ιδιοτιμών. Ισχύει το ίδιο και για τον τελεστή $\hat{\mathbf{B}}$;**

ii. **Δείξτε ότι οι τελεστές $\hat{\mathbf{A}}$ και $\hat{\mathbf{B}}$ μετατίθενται.**

iii. **Βρείτε ένα καινούριο ορθογωνικό σύνολο από kets τα οποία θα είναι ταυτόχρονα ιδιοδιανύσματα και των δύο τελεστών. Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές των $\hat{\mathbf{A}}$ και $\hat{\mathbf{B}}$ για κάθε ένα από τα τρία ιδιοδιανύσματα. Ο προσδιορισμός των ιδιοτιμών χαρακτηρίζει απόλυτα το κάθε ιδιοδιάνυσμα;**

Άσκηση 3.3

Αποδείξτε ότι

$$\left[\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{D}}\right] = -\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{C}}\left\{\hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{B}}\right\} + \hat{\mathbf{A}}\left\{\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{B}}\right\}\hat{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{C}}\left\{\hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{A}}\right\}\hat{\mathbf{B}} + \left\{\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{A}}\right\}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{B}}.$$

Άσκηση 3.4

Χρησιμοποιώντας την ορθοκανονικότητα των $|+\rangle$ και $|-\rangle$, αποδείξτε ότι

$$\left[\hat{\mathbf{S}}_i, \hat{\mathbf{S}}_j\right] = i\varepsilon_{ijk}\hbar\hat{\mathbf{S}}_k, \quad \left\{\hat{\mathbf{S}}_i, \hat{\mathbf{S}}_j\right\} = \left(\frac{\hbar^2}{2}\right)\delta_{ij},$$

όπου

$$\hat{\mathbf{S}}_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right), \; \hat{\mathbf{S}}_y = \frac{\hbar}{2}\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right) \text{ και } \hat{\mathbf{S}}_z = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right).$$

<u>Άσκηση 3.5</u>

Δυο Ερμιτειανοί τελεστές αντιμετατίθενται:

$$\left\{\hat{\mathbf{A}},\hat{\mathbf{B}}\right\} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}} = 0$$

Είναι πιθανόν ένα ket να είναι συγχρόνως ιδιοδιάνυσμα και των δυο τελεστών; Αποδείξτε ή απεικονίστε τον ισχυρισμός σας.