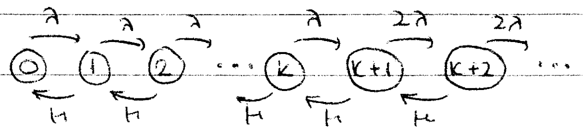
Θέμα 1

Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



α) Το σύστημα είναι ευσταθές ανν $B^{-1} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} < \infty$

$$B^{-1} = 1+\sum_{n=1}^{k+1}\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdots\mu_n} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = 1+\sum_{n=1}^{k+1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=k+2}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n 2^{n-k-1}$$

$$= 1+\frac{\lambda}{\mu}\,\frac{1-(\lambda/\mu)^{k+1}}{1-(\lambda/\mu)} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+2} 2 \sum_{n=k+2}^{\infty}\left(\frac{2\lambda}{\mu}\right)^{n-k-2} \qquad \boxed{2\lambda<\mu}$$

$$= \frac{1-(\lambda/\mu)^{k+2}}{1-(\lambda/\mu)} + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+2}\frac{1}{1-(2\lambda/\mu)} = \frac{1}{1-(\lambda/\mu)} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+2}\left(\frac{1}{1-(\lambda/\mu)} + \frac{2}{1-(2\lambda/\mu)}\right)$$

$$= \frac{1}{1-(\lambda/\mu)}\left[1+\frac{(\lambda/\mu)^{k+2}}{1-(2\lambda/\mu)}\right].$$ Συνεπώς το σύστημα είναι ευσταθές ανν $2\lambda<\mu$.

Επιπλέον $$p_n = B\,\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \begin{cases} B\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, & n\le k+1 \\ B\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n 2^{n-k-1}, & n\ge k+1\end{cases} \qquad (1)$$

β) $$\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{k} \lambda_n p_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{k} \lambda p_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} 2\lambda p_n$$

$$= \lambda\sum_{n=0}^{k} p_n + 2\lambda\sum_{n=k+1}^{\infty} p_n = \lambda\sum_{n=0}^{k} p_n + 2\lambda\left(1-\sum_{n=0}^{k} p_n\right) = 2\lambda - \lambda\sum_{n=0}^{k} p_n$$

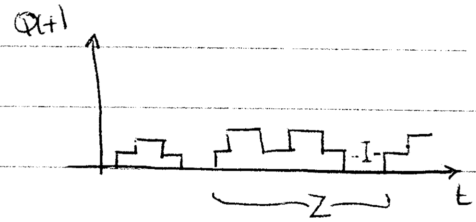
$$\overset{(1)}{=} 2\lambda - \lambda\sum_{n=0}^{k} B\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 2\lambda - \lambda B\,\frac{1-(\lambda/\mu)^{k+1}}{1-(\lambda/\mu)} = \lambda\left(2-B\,\frac{1-(\lambda/\mu)^{k+1}}{1-(\lambda/\mu)}\right).$$

γ) Έστω $p=$ η πιθανότητα ενός πελάτης κατά την άφιξη του να βρει το πολύ k άτομα

$$p=\sum_{n=0}^{K} r_n=\sum_{n=0}^{K}\frac{\lambda_n P_n}{\lambda^*}\overset{(1)}{=}\frac{1}{\lambda^*}\sum_{n=0}^{K}\lambda B\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n=\frac{\lambda B}{\lambda^*}\,\frac{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}{1-(\lambda/\mu)}$$

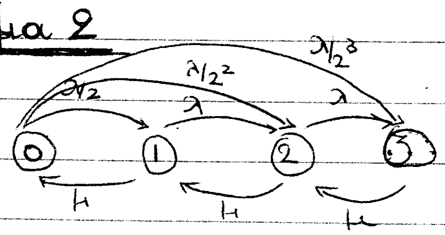
δ) Έστω $E(Z)$ = μέσος κύκλος απασχόλησης

$E(I)$ = μέσος χρόνος αργίας



όπου $E(I)=\frac{1}{\lambda}$ και $\frac{E(I)}{E(Z)}=p_0=B \Rightarrow E(Z)=\frac{E(I)}{B}=\frac{1}{\lambda B}$

Θέμα 2



Θεωρούμε $P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n z^n$

α)

Εξισώσεις Ισορροπίας

$$\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\,p_0=\mu p_1 \Rightarrow \lambda\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-1/2}\,p_0=\mu p_1 \Rightarrow \lambda p_0=\mu p_1 \qquad \times z^0$$

$$(\lambda+\mu)p_1=\frac{\lambda}{2}p_0+\mu p_2 \qquad \times z^1$$

$$(\lambda+\mu)p_n=\frac{\lambda}{2^n}p_0+\mu p_{n+1}+\lambda p_{n-1}, \quad n\geq 2 \qquad \times z^n$$

$$\lambda p_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda+\mu)p_n z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda}{2^n}z^n p_0+\sum_{n=0}^{\infty}\mu p_{n+1}z^n+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda p_{n-1}z^n$$

$$\lambda p_0+(\lambda+\mu)\left(P(z)-p_0\right)=\lambda\frac{z}{2}\,\frac{1}{1-z/2}\,p_0+\frac{\mu}{z}\sum_{m=1}^{\infty}p_m z^m+\lambda z\sum_{m=1}^{\infty}p_m z^m$$

$$(\lambda+\mu)P(z)-\mu p_0=\lambda p_0\frac{z}{2-z}+\frac{\mu}{z}\left(P(z)-p_0\right)+\lambda z\left(P(z)-p_0\right)$$

$$\left((\lambda+\mu)z-\lambda z^2-\mu\right)P(z)=\mu p_0(z-1)+\lambda p_0 z^2\left(\frac{1}{2-z}-1\right)$$

$$P(z)=\frac{(z-1)\left(\mu p_0(2-z)+\lambda p_0 z^2\right)}{(z-2)\left((\lambda+\mu)z-\lambda z^2-\mu\right)} = p_0\,\frac{\mu-2\mu z+\lambda z^2}{(z-2)(-\lambda z+\mu)} \qquad (2)$$

Το p_0 υπολογίζεται από την εξίσωση κανονικοποίησης $P(1)=1$

Για $z=1$ η $(2) \Rightarrow 1=p_0\frac{\mu+\lambda}{\mu-\lambda} \Rightarrow p_0=\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}$

Παρατηρούμε ότι $p_0>0 \Leftrightarrow \mu>\lambda$ (συνθήκη ευστάθειας)

γ)

Επιπλέον η (2) γράφεται

$$P(z)=p_0\left(\frac{zA+B}{2-z}+\frac{\Gamma}{\mu-\lambda z}\right) \quad \text{όπου } A=-1,\ B=\frac{2\mu}{\mu-2\lambda},\ \Gamma=-\frac{2\mu\lambda}{\mu-2\lambda}$$

$$=p_0\frac{Az+B}{2}\,\frac{1}{1-z/2}+p_0\frac{\Gamma}{\mu}\,\frac{1}{1-\lambda z/\mu}$$

$$=p_0\frac{Az+B}{2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left(\frac{1}{2}\right)^n+p_0\frac{\Gamma}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$=\frac{Ap_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{Bp_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{p_0\Gamma}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$=\frac{Ap_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}z^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+p_0\underbrace{\left(\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{\mu}\right)}_{=1}+\frac{Bp_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}z^n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{\Gamma p_0}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}z^n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$=p_0+\sum_{n=1}^{\infty}z^n\underbrace{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(Ap_0+\frac{Bp_0}{2}\right)+\frac{\Gamma p_0}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]}_{p_n,\ n\geq 1}$$

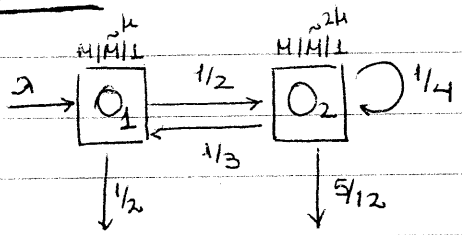
δ) Έστω $\bar{g}$ = μέσος ρυθμός αφίξεων

αν το σύστημα είναι κενό τότε ο μέσος ρυθμός αφίξεων δίνεται ως $\lambda\sum_{i=1}^{\infty}i\left(\frac{1}{2}\right)^i=\frac{\lambda}{2}\,\frac{1}{(1-1/2)^2}=2\lambda$

ενώ αν το σύστημα δεν είναι κενό τότε ο ρυθμός αφίξεων είναι λ.

Τελικά $\bar{g}=p_0\,2\lambda+(1-p_0)\lambda=\lambda(1+p_0)$

Θέμα 3



α) Παρατηρούμε ότι η O_1 είναι M|M|1 συνεπώς είναι ευσταθής ανν $\Lambda_1<\mu$

Ανάλογα η O_2 είναι ευσταθής ανν $\Lambda_2<2\mu$

Τα Λ_1, Λ_2 θα υπολογιστούν από τις εξισώσεις κίνησης

$$\left.\begin{array}{l}\Lambda_1 = \lambda + \frac{1}{3}\Lambda_2 \\ \Lambda_2 = \frac{1}{4}\Lambda_2 + \frac{1}{2}\Lambda_1 \Rightarrow \frac{1}{2}\Lambda_2 = \frac{1}{3}\Lambda_1\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\Lambda_1 = \frac{9}{7}\cdot\lambda \\ \Lambda_2 = \frac{6}{7}\lambda\end{array}\right.$$

Άρα η συνθήκη ευστάθειας είναι $\Lambda_1<\mu$ (εφόσον $\Lambda_2<\Lambda_1<\mu<2\mu$)

Έστω $E(S)$ = μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο δίκτυο

και $E(Q)$ = μέσο πλήθος πελατών στο δίκτυο

και $E(Q_i)$ = -"- -"- -"- στον σταθμό i, $i=1,2$.

τότε από Little έχουμε ότι $E(Q) = \lambda E(S)$

και $E(Q) = E(Q_1) + E(Q_2)$

όμως O_i είναι M|M|1 άρα $E(Q_i) = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$, $\rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i}$, $\mu_1=\mu$, $\mu_2=2\mu$.

οποτε $E(S) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\Lambda_1}{\mu-\Lambda_1} + \frac{\Lambda_2}{2\mu-\Lambda_2}\right) = \frac{9/7}{\mu - 9\lambda/7} + \frac{6/7}{2\mu - 6\lambda/7}$

Έστω $E(S_1)$ = μέσος χρόνος παραμονής στον σταθμό 1

τότε από Little έχουμε $E(S_1) = \frac{E(Q_1)}{\Lambda_1} = \frac{1}{\mu-\Lambda_1}$

όμως σε μια διέλευση από το δίκτυο κάθε πελάτης περνάει από τον σταθμό 1, N, το πλήθος φορών, όπου

$P(N=1) = P($να φύγει απευθείας από τον $O_1) + P(O_1 \to O_2$ να μείνει στον O_2 και μετά να φύγει από το δίκτυο$)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k \frac{5}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-1/4}\,\frac{5}{12} = \frac{7}{9}$$

α τρόπος)

$$P(N=2) = P(O_1 \to O_2 \text{ να μείνει στον } O_2 \to O_1)\, P(N=1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k \frac{1}{3}\right) P(N=1) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-1/4}\,\frac{1}{3}\,P(N=1)$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{7}{9} = \frac{2}{9}\left(1-\frac{2}{9}\right)$$

όμοιως $P(N=n) = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\left(1-\frac{2}{9}\right) \quad n=1,2,\dots$

β τρόπος) η $P(O_1 \to O_2 \text{ να μείνει στον } O_2 \to O_1) = \frac{1}{2} \times \frac{\text{πιθανότητα } O_2 \to O_1}{\text{πιθ. } O_2 \to O_1 + \text{πιθ. να φυγε}}$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1/3}{1/3 + 5/12} = \frac{1}{2}\,\frac{4}{9} =$$

άρα $P(N=n) = \left(P(O_1 \to O_2 \text{ να μείνει στον } O_2 \to O_1)\right)^{n-1} P(N=1)$

$$= \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\left(1-\frac{2}{9}\right)$$

οπότε $E(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(N=n) = \left(1-\frac{2}{9}\right)\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-2/9} = \frac{9}{7}$

συνεπώς ο μέσος χρόνος που παραμένει ένας πελάτης στον σταθμό O_1 σε μια διέλευση του από το δίκτυο είναι

$$E(S_1)\cdot E(N) = \frac{9}{7}\,\frac{1}{\mu-\lambda_1} = \frac{9}{7}\,\frac{1}{\mu - \frac{9}{7}\lambda}$$

β) $P(Q_1 > Q_2) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Q_1 > Q_2 \mid Q_2 = n)\, P(Q_2 = n)$

όμως η O_1 είναι $M/M/1 \Rightarrow P(Q_1 = k) = \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_1}{\mu}\right) = \rho_1^k(1-\rho_1)$

όμοιως για την $O_2 \Rightarrow P(Q_2 = n) = \left(\frac{\lambda_2}{2\mu}\right)^n\left(1-\frac{\lambda_2}{\mu}\right) = \rho_2^n(1-\rho_2)$

άρα $P(Q_1 > Q_2) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Q_1 > Q_2 \mid Q_2 = n)\, \rho_2^n(1-\rho_2)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} \rho_1^k(1-\rho_1)\rho_2^n(1-\rho_2)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(1-\rho_1)(1-\rho_2)\,\rho_2^n\,\rho_1^{n+1}\,\frac{1}{1-\rho_1} = \frac{(1-\rho_2)\rho_1}{1-\rho_1\rho_2}$$

γ) Θεωρούμε διαδικασία $\{(Q(t), R(t)),\ t \geq 0\}$ όπου

$Q(t)$ = πλήθος πελατών στο σύστημα τη στιγμή t

$R(t)$ = στάδιο άφιξης πελάτη που έρχεται στο σύστημα

με χώρο καταστάσεων $S = \{(n,i),\ n=0,1,2,3,\ i=1,2\}$

κατάσταση	επόμενη	χρόνος μετάβασης	
$(n,1)$, $n=0,1,2,3$	$(n,2)$	$Exp(2\lambda)$	: άφιξη νέου πελάτη, ολοκλήρωσε το 1ο στάδιο
$(n,2)$ $n=0,1,2$	$(n+1,1)$	$Exp(2\lambda)$	: ολοκλήρωσε το 2ο στάδιο και ο πελάτης εισήλθε στο σύστημα
$(3,2)$	$(3,1)$	$Exp(2\lambda)$	: ολοκλήρωσε το 2ο αλλά δεν χωράει στο σύστημα
(n,i), $n=1,2,3$, $i=1,2$	$(n-1,i)$	$Exp(\mu)$	: ολοκλήρωση εξυπηρέτησης

Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

$$\begin{tikzcd}
(0,1) \arrow[d, "2\lambda"] & (1,1) \arrow[l, "\mu"'] \arrow[d, "2\lambda"] & (2,1) \arrow[l, "\mu"'] \arrow[d, "2\lambda"] & (3,1) \arrow[l, "\mu"'] \arrow[d, "2\lambda"] \\
(0,2) \arrow[ur, bend left, "2\lambda"] & (1,2) \arrow[l, "\mu"] \arrow[ur, bend left, "2\lambda"] & (2,2) \arrow[l, "\mu"] \arrow[ur, bend left] & (3,2) \arrow[l, "\mu"] \arrow[u, bend right=60, "2\lambda"']
\end{tikzcd}$$