ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2008

Θέμα 1. (4 βαθμοί) Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ και ρυθμό εξυπηρέτησης $\mu_n = \mu$, όταν στο σύστημα υπάρχουν n πελάτες με $n = 1, 2, \ldots, K$, και ρυθμό εξυπηρέτησης $\mu_n = 2\mu$, όταν στο σύστημα υπάρχουν n πελάτες με $n = K+1, K+2, \ldots$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ένας πελάτης που βρίσκει n άτομα στο σύστημα κατά την άφιξή του αναχωρεί άμεσα από το σύστημα (χωρίς να εξυπηρετηθεί) με πιθανότητα $\frac{2}{3}$, αν $n = 0, 1, \ldots, K-1$ και με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ αν $n = K, K+1, \ldots$. Υποθέτουμε ότι $\lambda, \mu > 0$, K θετικός ακέραιος και θέτουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

(α) (1 βαθμός) Πότε το σύστημα είναι ευσταθές (στάσιμο); Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών $\{Q(t)\}$, όταν είναι ευσταθές.

(β) (1.5 βαθμοί) Να βρεθεί ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων στο σύστημα λ^*, καθώς και οι οριακές κατανομές $(r_n^{\pi\rho\alpha\gamma\mu})$ και $(d_n^{\pi\rho\alpha\gamma\mu})$ των εμφυτευμένων διαδικασιών του αριθμού των πελατών σε στιγμές πραγματικών αφίξεων και πραγματικών αναχωρήσεων αντίστοιχα (δηλαδή, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους πελάτες που εισέρχονται στο σύστημα και εξυπηρετούνται).

(γ) (1.5 βαθμοί) Να βρεθεί το μέσο πλήθος πελατών του συστήματος και το μακροπρόθεσμο ποσοστό των χαμένων πελατών του συστήματος. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής και ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα και δεν αναχωρεί άμεσα.

Θέμα 2. (4 βαθμοί) Θεωρούμε τη $M/M/1$ ουρά με ομαδικές αφίξεις και μεμονωμένες εξυπηρετήσεις ($M^c/M/1$ ουρά) με ρυθμό αφίξεων ομάδων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Κάθε αφικνούμενη ομάδα έχει 2 πελάτες. Το σύστημα υπόκειται σε καταστροφές που συμβαίνουν σύμφωνα με μια Poisson διαδικασία με ρυθμό ν (δηλαδή οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών καταστροφών είναι ανεξάρτητοι με εκθετική κατανομή με ρυθμό ν). 'Οταν συμβεί μια καταστροφή όλοι οι παρόντες πελάτες απομακρύνονται άμεσα απ' το σύστημα.

(α) (1 βαθμός) Να δικαιολογήσετε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και να κάνετε το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασής της.

(β) (2 βαθμοί) Να προσδιοριστεί η πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$. (Υπόδειξη: Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda z^3 - (\lambda + \mu + \nu)z + \mu = 0$ έχει τρεις πραγματικές λύσεις z_1, z_2, z_3 με $z_1 < -1 < z_2 < 1 < z_3$).

(γ) (1 βαθμός) Βρείτε έναν τύπο για τον υπολογισμό των στάσιμων πιθανοτήτων p_n.

Θέμα 3. (3 βαθμοί) Θεωρούμε ένα δίκτυο Jackson με 2 σταθμούς εξυπηρέτησης. Στο σταθμό 1 υπάρχει μια εξωτερική διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ ενώ στο σταθμό 2 δεν υπάρχουν εξωτερικές αφίξεις. Ο σταθμός 1 έχει 1 υπηρέτη, ενώ ο σταθμός 2 έχει άπειρους υπηρέτες. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης στο σταθμό 1 είναι εκθετικοί με παράμετρο μ ενώ στο σταθμό 2 είναι εκθετικοί με παράμετρο $\mu/2$. Κάθε αναχώρηση από το σταθμό 1 πηγαίνει με πιθανότητα 1 στο σταθμό 2. Κάθε αναχώρηση από το σταθμό 2 πηγαίνει στο σταθμό 1 με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, επιστρέφει στο σταθμό 2 με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ενώ αναχωρεί από το δίκτυο με πιθανότητα $\frac{1}{2}$.

(α) (0.5 βαθμοί) Να βρείτε τη συνθήκη ευστάθειας του δικτύου.

(β) (1 βαθμός) Να βρείτε το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο δίκτυο.

(γ) (0.5 βαθμοί) Να βρείτε το μέσο αριθμό φορών που ένας πελάτης περνάει από το σταθμό 1.

(δ) (1 βαθμός) Να βρείτε το μέσο χρόνο από τη στιγμή που εισέρχεται ένας πελάτης που βρίσκει το δίκτυο κενό (δηλαδή και τους δυο σταθμούς κενούς) μέχρι την επόμενη στιγμή που το δίκτυο θα ξαναμείνει κενό.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 $\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1ο – Λύση:

Ο αριθμός των πελατών $\{Q(t)\}$ στο σύστημα είναι διαδικασία γέννησης-θανάτου με ρυθμούς

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda\left(1-\frac{2}{3}\right) = \lambda/3 & , \text{ αν } n = 0,1,\dots,K-1 \\ \lambda\left(1-\frac{1}{3}\right) = 2\lambda/3 & , \text{ αν } n = K, K+1, \dots \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & , \text{ αν } n = 1,2,\dots,K \\ 2\mu & , \text{ αν } n = K+1, K+2, \dots \end{cases}$$

Επομένως:

$$\frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \begin{cases} \dfrac{\lambda/3 \cdot \lambda/3 \cdot \ldots \cdot \lambda/3}{\mu \cdot \mu \cdot \ldots \cdot \mu} & , \text{ αν } n = 1,2,\dots,K \\ \dfrac{\lambda/3 \cdot \lambda/3 \cdot \ldots \lambda/3 \cdot 2\lambda/3 \; 2\lambda/3 \cdot \ldots \cdot 2\lambda/3}{\mu \cdot \mu \cdot \ldots \mu \cdot 2\mu \; 2\mu \cdot \ldots \cdot 2\mu} & , \text{ αν } n = K+1, K+2, \dots \end{cases}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^n = \left(\frac{\rho}{3}\right)^n, n = 1, 2, \dots$$

Άρα

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{3}\right)^n < \infty \iff \rho < 3 \iff \lambda < 3\mu$$

Αυτή είναι η συνθήκη ευστάθειας για το σύστημα.

Η στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών είναι τότε

$$p_n = B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \left(1-\frac{\rho}{3}\right)\left(\frac{\rho}{3}\right)^n, n = 0, 1, \dots$$

Ο πραγματικός μέσος ρυθμός αφίξεων στο σύστημα είναι

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{K-1} \frac{\lambda}{3} p_n + \sum_{n=K}^{\infty} \frac{2\lambda}{3} p_n = \frac{\lambda}{3} \sum_{n=0}^{K-1} p_n + \frac{2\lambda}{3} \sum_{n=K}^{\infty} p_n$$

$$= \frac{\lambda}{3} \sum_{n=0}^{K-1} p_n + \frac{2\lambda}{3}\left(1 - \sum_{n=0}^{K-1} p_n\right) = -\frac{\lambda}{3} \sum_{n=0}^{K-1} p_n + \frac{2\lambda}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}\lambda \cancel{\left(1-\frac{\rho}{3}\right)} \frac{1-\left(\frac{\rho}{3}\right)^K}{\cancel{1-\frac{\rho}{3}}} + \frac{2}{3}\lambda = \lambda\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\rho}{3}\right)^K\right) = \frac{\lambda}{3}\left(1 + \left(\frac{\rho}{3}\right)^K\right)$$

Επομένως

$$r_n^{\text{πραγμ}} = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*} = \begin{cases} \dfrac{\lambda p_n}{3\lambda^*} & , n = 0,1,\dots,K-1 \\ \dfrac{2\lambda p_n}{3\lambda^*} & , n = K+1, K+2 \dots \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\left(1-\frac{\rho}{3}\right)\left(\frac{\rho}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{\rho}{3}\right)^K} & , n = 0,1,\dots,K-1 \\ \dfrac{2\left(1-\frac{\rho}{3}\right)\left(\frac{\rho}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{\rho}{3}\right)^K} & , n = K+1, K+2, \dots \end{cases}$$

Λόγω των μεμονωμένων μεταβάσεων είναι $d_n^{\text{πραγμ}} = r_n^{\text{πραγμ}}$.

Είναι

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n \underset{\uparrow}{=} \frac{\rho/3}{1-\rho/3} = \frac{\rho}{3-\rho}$$

Μέση τιμή γεωμετρικής κατανομής

και

$$\text{Μακροπρόθεσμο ποσοστό χαμένων πελατών} = 1 - \frac{\lambda^*}{\lambda} = 1 - \frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{\rho}{3}\right)^K\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{\rho}{3}\right)^K$$

Για το μέσο χρόνο παραμονής ενός πραγματικού πελάτη, που εισέρχεται, δηλαδή, στο σύστημα εφαρμόζουμε το Θ. Little

$$E[Q] = \lambda^* E[S_{πραγμ}] \Longrightarrow \frac{\rho}{3-\rho} = \frac{\lambda}{3}\left(1+\left(\frac{\rho}{3}\right)^K\right) E[S_{πραγμ}] \Longrightarrow$$

$$E[S_{πραγμ}] = \frac{3}{(3\mu-\lambda)\left(1+\left(\frac{\rho}{3}\right)^K\right)}$$

Για το μέσο χρόνο εξυπηρέτησης $E[X]$ ενός πραγματικού πελάτη που εισέρχεται εφαρμόζουμε το Θ. Little στο χώρο εξυπηρέτησης.

Τότε

$$E[Q_S] = \lambda^* E[X] \Longrightarrow 1\, \overbrace{Pr[Q_s=1]}^{\substack{1-Pr[Q=0] \\ \| \\ Pr[Q\geq 1]}} + 0\, Pr[Q_s=0] = \lambda^* E[X] \Longrightarrow$$

$$\frac{\rho}{3} = \frac{\lambda}{3}\left(1+\left(\frac{\rho}{3}\right)^K\right) E[X] \Longrightarrow$$

$$E[X] = \frac{1}{\mu\left(1+\left(\frac{\rho}{3}\right)^K\right)}$$

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε και μέσω του πραγματικού μέσου ρυθμού αναχωρήσεων μ^*. Είναι

$$\mu^* = p_0 \cdot 0 + (1-p_0)\frac{1}{E[X]}$$

αλλά επίσης

$$\mu^* = \lambda^* = \frac{\lambda}{3}\left(1+\left(\frac{\rho}{3}\right)^K\right)$$

οπότε

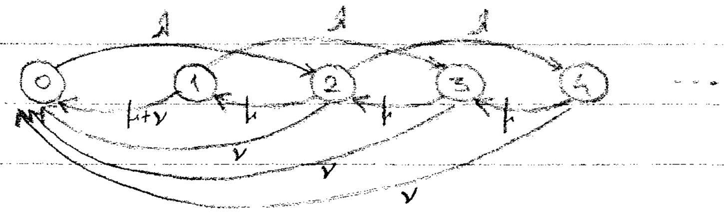
$$(1-p_0)\frac{1}{E[X]} = \frac{\lambda}{3}\left(1+\left(\frac{\rho}{3}\right)^K\right) \Longrightarrow E[X] = \frac{\overbrace{1-p_0}^{\rho/3}}{\lambda/3\left(1+\left(\rho/3\right)^K\right)} = \frac{1}{\mu\left(1+\left(\frac{\rho}{3}\right)^K\right)}$$

Θέμα 2ο - Λύση:

Το διάγραμμα γεγονότων και αντίστοιχων χρόνων για την $\{Q(t)\}$ έχει ως εξής

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Αντίστοιχος χρόνος
0	2	$Exp(\lambda)$
1	3	$Exp(\lambda)$
	0	$\min(Exp(\mu) \overset{\text{ανεξ.}}{,} Exp(\nu)) = Exp(\mu+\nu)$
$n \geq 2$	$n+2$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	$Exp(\mu)$
	0	$Exp(\nu)$

Δεδομένου ότι όλοι οι χρόνοι είναι εκθετικοί έχουμε ότι η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

Λόγω της εξίσωσης κανονικοποίησης

$$\lambda p_0 = (\mu+\nu)p_1 + \sum_{j=2}^{\infty} \nu p_j = \mu p_1 + \nu - \nu p_0$$

$$(\lambda+\mu+\nu)p_1 = \mu p_2$$

$$(\lambda+\mu+\nu)p_n = \lambda p_{n-2} + \mu p_{n+1}, \quad n \geq 2$$

Πολλαπλασιάζοντας την n-οστή εξίσωση με z^n και αθροίζοντας παίρνουμε

$$\lambda p_0 + (\lambda+\mu+\nu)\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = \mu \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} z^n + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} p_{n-2} z^n + \nu - \nu p_0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda+\mu+\nu)P(z) - \mu p_0 - \cancel{\nu p_0} = \frac{\mu}{z}(P(z)-p_0) + \lambda z^2 P(z) + \nu - \cancel{\nu p_0} \Leftrightarrow$$

$$(\lambda+\mu+\nu)zP(z) - \mu p_0 z = \mu P(z) - \mu p_0 + \lambda z^3 P(z) + \nu z \Leftrightarrow$$

$$[\lambda z^3 - (\lambda+\mu+\nu)z + \mu]P(z) = \mu(1-z)p_0 - \nu z \Leftrightarrow$$

$$P(z) = \frac{\mu(1-z)p_0 - \nu z}{\lambda z^3 - (\lambda+\mu+\nu)z + \mu}.$$

Έστω $f(z) = \lambda z^3 - (\lambda+\mu+\nu) z + \mu$. Τότε

$$\lim_{z \to -\infty} f(z) = -\infty, \quad f(-1) = -\lambda + (\lambda+\mu+\nu) + \mu = 2\mu + \nu > 0$$

$$f(1) = \lambda - (\lambda+\mu+\nu) + \mu = -\nu < 0, \quad \lim_{z \to +\infty} f(z) = +\infty$$

και άρα από το Θ. Bolzano έχουμε ότι η $f(z)$ έχει ρίζες z_1, z_2, z_3 με $z_1 < -1 < z_2 < 1 < z_3$.

Επειδή $|z_2| < 1$ και η $P(z)$ είναι πιθανογεννήτρια και η z_2 μηδενίζει τον παρονομαστή της θα πρέπει αναγκαστικά και ο αριθμητής να μηδενίζεται στη θέση z_2. Δεδομένου ότι είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού θα είναι της μορφής $c(z-z_2)$. Ο παρονομαστής θα είναι της μορφής $\lambda(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$. Επομένως

$$P(z) = \frac{c(z-z_2)}{\lambda(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = \frac{c}{\lambda(z-z_1)(z-z_3)}$$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης έχουμε

$$1 = P(1) = \frac{c}{\lambda(1-z_1)(1-z_3)} \quad \text{οπότε} \quad c = \lambda(1-z_1)(1-z_3)$$

Τελικά

$$P(z) = \frac{(1-z_1)(1-z_3)}{(z-z_1)(z-z_3)},$$

όπου z_1, z_3 οι ρίζες της $\lambda z^3 - (\lambda+\mu+\nu) z + \mu = 0$ με $z_1 < -1$ και $z_3 > 1$.

Αναλύοντας σε απλά κλάσματα έχουμε

$$P(z) = \frac{A}{z_1 - z} + \frac{B}{z_3 - z} = \frac{(1-z_1)(1-z_3)}{(z_1-z)(z_3-z)} \iff$$

$$A(z_3 - z) + B(z_1 - z) = (1-z_1)(1-z_3) \iff$$

$$A z_3 + B z_1 - (A+B) z = (1-z_1)(1-z_3) \iff$$

$$\left.\begin{cases} z_3 A + z_1 B = (1-z_1)(1-z_3) \\ A + B = 0 \end{cases}\right\} \iff$$

$$A = \frac{(1-z_1)(1-z_3)}{z_3 - z_1} \qquad B = \frac{(1-z_1)(1-z_3)}{z_1 - z_3}$$

Συνεπώς

$$P(z) = \frac{(1-z_1)(1-z_3)}{z_3-z_1}\left(\frac{1}{z_1-z} - \frac{1}{z_3-z}\right)$$

$$= \frac{(1-z_1)(1-z_3)}{z_3-z_1}\left(\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} - \frac{1}{z_3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_3}}\right)$$

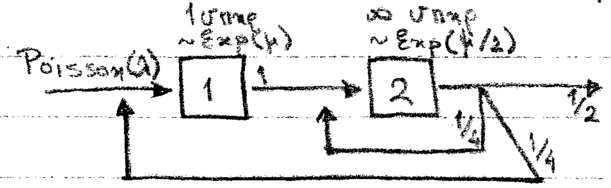
$$= \frac{(1-z_1)(1-z_3)}{z_3-z_1}\left(\frac{1}{z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z_1}\right)^n z^n - \frac{1}{z_3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z_3}\right)^n z^n\right)$$

οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές του z^n:

$$p_n = \frac{(1-z_1)(1-z_3)}{z_3-z_1}\left(\left(\frac{1}{z_1}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{z_3}\right)^{n+1}\right), \quad n=0,1,2,\dots$$

Θέμα 3ο - Λύση:

Το δίκτυο έχει σχηματικά τη μορφή



Το σύστημα των εξισώσεων κίνησης είναι

$$\left\{\begin{array}{l}\Lambda_1 = \lambda + \Lambda_2\cdot\frac{1}{4}\\ \Lambda_2 = \Lambda_1 + \Lambda_2\cdot\frac{1}{4}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\Lambda_1 = \lambda + \Lambda_2\frac{1}{4}\\ \Lambda_2 = \frac{4}{3}\Lambda_1\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\Lambda_1 = \lambda + \frac{1}{3}\Lambda_1\\ \Lambda_2 = \frac{4}{3}\Lambda_1\end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{3}\Lambda_1 = \lambda\\ \Lambda_2 = \frac{4}{3}\Lambda_1\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\Lambda_1 = \frac{3}{2}\lambda\\ \Lambda_2 = 2\lambda\end{array}\right\}$$

Επειδή ο σταθμός 1 έχει 1 υπηρέτη και ο σταθμός 2 έχει ∞ υπηρέτες η συνθήκη ευστάθειας είναι $\frac{\Lambda_1}{\mu} < 1$ και $\frac{\Lambda_2}{\mu/2} < \infty$ που δίνει $\frac{3}{2}\lambda < \mu$. Έστω $\rho = \lambda/\mu$. Η στάσιμη κατανομή του δικτύου είναι

$$p(n_1, n_2) = \left(1 - \frac{\Lambda_1}{\mu}\right)\left(\frac{\Lambda_1}{\mu}\right)^{n_1} e^{-\frac{2\Lambda_2}{\mu}} \frac{\left(\frac{2\Lambda_2}{\mu}\right)^{n_2}}{n_2!}$$

$$= \left(1 - \frac{3}{2}\rho\right)\left(\frac{3}{2}\rho\right)^{n_1} e^{-4\rho} \frac{(4\rho)^{n_2}}{n_2!}$$

Ο μέσος αριθμός πελατών στο δίκτυο είναι

$$E[Q_{\delta\iota\kappa\tau}] = E[Q_1] + E[Q_2] = \frac{\frac{3}{2}\rho}{1 - \frac{3}{2}\rho} + 4\rho = \frac{3\rho}{2 - 3\rho} + 4\rho$$

$$= \frac{3\rho + 8\rho - 12\rho^2}{2 - 3\rho} = \frac{11\rho - 12\rho^2}{2 - 3\rho}$$

και άρα ο μέσος χρόνος παραμονής είναι από Θ. Little

$$E[S] = \frac{1}{\lambda} E[Q_{\delta\iota\kappa\tau}] = \frac{11 - 12\rho}{2 - 3\rho} \cdot \frac{1}{\mu}$$

Ένας πελάτης αφού τελειώσει τους κύκλους γύρω από το σταθμό 2 πάει στο σταθμό 1 με πιθ $\frac{1/4}{1/4 + 1/2} = \frac{1}{3}$ ή αναχωρεί με πιθ $\frac{1/2}{1/4 + 1/2} = \frac{2}{3}$. Επομένως:

Περνάει 1 φορά από το σταθμό 1 με πιθ. $\frac{2}{3}$

2 φορές $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$

$\vdots$

n φορές $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{3}$

Άρα ο μέσος αριθμός διελεύσεων είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \underset{\uparrow}{=} \frac{3}{2}$$

Μέση τιμή γεωμετρικής.

Πιο απλά ο μέσος αριθμός διελεύσεων απ' το σταθμό 1 είναι

$$\frac{\Lambda_1}{\lambda_{\delta\iota\kappa\tau}} = \frac{\Lambda_1}{\lambda} = \frac{3}{2}.$$

Ο χρόνος Y απ' τη στιγμή που εισέρχεται ένας πελάτης που βρίσκει το σύστημα κενό μέχρι τη στιγμή που θα ξαναμείνει το σύστημα κενό είναι χρόνος συνεχούς λειτουργίας. Έχουμε

$$p(0,0) = \frac{\overbrace{1/\lambda}^{\text{περίοδος αργίας}}}{\underbrace{E[Y]+1/\lambda}_{\text{κύκλος λειτουργίας}}} \Longrightarrow$$

$$E[Y] = \frac{1}{\lambda p(0,0)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{(1-\frac{3}{2}p)e^{-4p}} - 1\right).$$