ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ – ΙΟΥΝΙΟΣ 2008

Θέμα 1° (3 βαθμοί): Θεωρούμε την τροποποίηση της Μ/Μ/1 ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, με αποθαρρυνόμενους πελάτες και μεταβλητό ρυθμό εξυπηρέτησης. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι ένας πελάτης που βρίσκει n άτομα στο σύστημα αναχωρεί άμεσα από το σύστημα (χωρίς να εξυπηρετηθεί) με πιθανότητα $1-\alpha^n$, $n=0,1,2,\ldots$ (όπου $\alpha \in (0,1)$ σταθερά). Επιπλέον η ταχύτητα του υπηρέτη όταν υπάρχουν n άτομα στο σύστημα είναι $n\alpha^{n-1}$ (δηλαδή ο ρυθμός αναχώρησης είναι $\mu n\alpha^{n-1}$), $n=1,2,\ldots$.

(α) Πότε το σύστημα είναι ευσταθές (στάσιμο); Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών στο σύστημα $\{Q(t)\}$, όταν είναι ευσταθές. (1 βαθμός)

(β) Να βρεθούν οι οριακές κατανομές $(r_n^{\pi\rho\alpha\gamma\mu})$ και $(d_n^{\pi\rho\alpha\gamma\mu})$ των εμφυτευμένων διαδικασιών του αριθμού των πελατών σε στιγμές πραγματικών αφίξεων και πραγματικών αναχωρήσεων αντίστοιχα (δηλαδή λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους πελάτες που εισέρχονται στο σύστημα και εξυπηρετούνται). (1 βαθμός)

(γ) Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των χαμένων πελατών του συστήματος. ($\frac{1}{2}$ βαθμός)

(δ) Να βρεθεί ο μέσος κύκλος απασχόλησης του συστήματος. ($\frac{1}{2}$ βαθμός)

Θέμα 2° (4 βαθμοί): Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/2$ ουράς με ομαδικές αφίξεις και μεμονωμένες εξυπηρετήσεις ($M^c/M/2$ ουρά) με ρυθμό αφίξεων ομάδων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης ανά υπηρέτη μ (εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης με παράμετρο μ). Κάθε αφικνούμενη ομάδα έχει μέγεθος 1 με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και μέγεθος 2 με πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Έστω $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών.

(α) Να αιτιολογηθεί γιατί η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και να γίνει το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασής της. ($\frac{1}{2}$ βαθμός)

(β) Να διατυπώσετε τη συνθήκη ευστάθειας για το σύστημα, δικαιολογώντας τη διαισθητικά. ($\frac{1}{2}$ βαθμός)

(γ) Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$. (2 βαθμοί)

(δ) Για $\lambda=3$ και $\mu=5$ να βρείτε έναν γενικό τύπο για τις στάσιμες πιθανότητες p_n, $n=0,1,2,\ldots$. (1 βαθμός)

Θέμα 3° (3 βαθμοί): Θεωρούμε ένα δίκτυο Jackson με N σταθμούς εξυπηρέτησης. Η διαδικασία εξωτερικών αφίξεων στο σταθμό i είναι Poisson με ρυθμό $\lambda > 0$ για $i=1,2,\ldots,N$. Κάθε αναχώρηση από έναν σταθμό i κατευθύνεται με πιθανότητα 1 στον επόμενο σταθμό $i+1$ για $i=1,2,\ldots,N-1$, ενώ οι αναχωρήσεις από το σταθμό N εγκαταλείπουν το δίκτυο. Κάθε σταθμός έχει έναν υπηρέτη και οι χρόνοι εξυπηρέτησης στο σταθμό i είναι εκθετικοί με παράμετρο $\lambda i+\alpha$, όπου $\alpha \geq 0$.

(α) Να βρείτε τη συνθήκη ευστάθειας του δικτύου σε όσο το δυνατόν απλούστερη μορφή. ($\frac{1}{2}$ βαθμός)

(β) Να βρείτε το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο δίκτυο. (1 βαθμός)

(γ) Να βρείτε το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο δίκτυο δεδομένου ότι εισήλθε σε αυτό δια του σταθμού N. (1 βαθμός)

(δ) Να βρείτε το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη του δικτύου στο σταθμό N. ($\frac{1}{2}$ βαθμός)

Διάρκεια εξέτασης : 2 ώρες και 30 λεπτά.
Να γραφούν και τα 3 θέματα

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Λύσεις θεμάτων στις Ουρές Αναμονής, Ιούνιος 2008.

Θέμα 1ο:

Το σύστημα είναι απλή Μαρκοβιανή ουρά με ρυθμούς αφίξεων και αναχωρήσεων

$\lambda_n = \lambda \alpha^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$\mu_n = \mu n \alpha^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$

Θέτοντας $\rho = \lambda/\mu$ έχουμε

$$\frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \frac{\lambda \cancel{\alpha^0} \lambda \cancel{\alpha^1} \cdots \lambda \cancel{\alpha^{n-1}}}{\mu 1 \cancel{\alpha^0} \mu 2 \cancel{\alpha^1} \cdots \mu n \cancel{\alpha^{n-1}}} = \frac{\rho^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Άρα

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho} < \infty$$

οπότε το σύστημα είναι πάντα ευσταθές.

Η στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών είναι

$$p_n = B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων είναι

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \alpha^n e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!} = \lambda e^{-\rho} e^{\alpha \rho} = \lambda e^{-(1-\alpha)\rho}$$

οπότε

$$r_n^{\pi\rho\alpha\gamma\mu} = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*} = \frac{\lambda \alpha^n e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}}{\lambda e^{-(1-\alpha)\rho}} = e^{-\alpha\rho} \frac{(\alpha\rho)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Λόγω της ιδιότητας των μετρουμένων αφίξεων είναι

$$d_n^{\pi\rho\alpha\gamma\mu} = r_n^{\pi\rho\alpha\gamma\mu} = e^{-\alpha\rho} \frac{(\alpha\rho)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Το μακροπρόθεσμο ποσοστό των χαμένων πελατών είναι

$$1 - \frac{\lambda^*}{\lambda} = 1 - e^{-(1-\alpha)\rho}$$

Εναλλακτικά το μακροπρόθεσμο ποσοστό των χαμένων πελατών είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{(1-\alpha^n)}^{\text{πιθ. αποδορ.}} r_n^{\text{ολικό}} \overset{\text{PASTA}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha^n)\, p_n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha^n)\, e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}$$

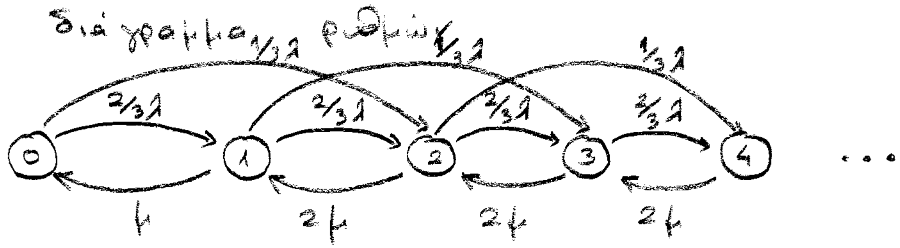
$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!} - e^{-\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\rho)^n}{n!} = 1 - e^{-\rho}e^{\alpha\rho} = 1 - e^{-(1-\alpha)\rho}.$$

Έστω I ένας χρόνος αργίας και Z ο κύκλος αποσχόλησης του συστήματος. Τότε

$$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow e^{-\rho} = \frac{1/\lambda}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{e^{\rho}}{\lambda}.$$

Θέμα 2ο:

Ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι Μ.α.σ.χ. με διάγραμμα ρυθμών



Η συνθήκη ευστάθειας είναι

$$\lambda\cdot\overbrace{\left(\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 2\right)}^{\text{Μέσο μέγεθος ομάδας}} < 2\mu \iff \rho = \lambda/\mu < 3/2.$$

(μέσος αριθμός αφίξεων ανά χρονική μονάδα

< μέγιστη δυνατότητα εξυπηρέτησης ανά χρονική μονάδα).

Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$(\lambda+\mu)p_1 = \tfrac{2}{3}\lambda p_0 + 2\mu p_2$$

$$(\lambda+2\mu)p_n = \tfrac{1}{3}\lambda p_{n-2} + \tfrac{2}{3}\lambda p_{n-1} + 2\mu p_{n+1}, \quad n\geq 2.$$

Με τη μέθοδο των πιθανογεννητριών παίρνουμε

$$\lambda p_0 + (\lambda+\mu)p_1 z + \sum_{n=2}^{\infty}(\lambda+2\mu)p_n z^n = \mu p_1 + \frac{2}{3}\lambda p_0 z + 2\mu p_2 z$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3}\lambda p_{n-2} z^n + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{3}\lambda p_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} 2\mu p_{n+1} z^n \iff$$

$$(\lambda+2\mu)P(z) - \mu p_1 z - 2\mu p_0 = \frac{\lambda z^2}{3}P(z) + \frac{2\lambda z}{3}P(z) - \mu p_1 + \frac{2\mu}{z}(P(z)-p_0) \iff$$

$$\left[(\lambda+2\mu) - \frac{\lambda z^2}{3} - \frac{2\lambda z}{3} - \frac{2\mu}{z}\right]P(z) = \mu p_1 z + 2\mu p_0 - \mu p_1 - \frac{2\mu}{z}p_0$$

$$\iff$$

$$\left[(\lambda+2\mu)z - \frac{\lambda}{3}z^3 - \frac{2\lambda}{3}z^2 - 2\mu\right]P(z) = \mu p_1 z^2 + 2\mu p_0 z - \mu p_1 z - 2\mu p_0$$

$$\iff$$

$$\left[(\lambda+2\mu)z - \frac{\lambda}{3}z^3 - \frac{2\lambda}{3}z^2 - 2\mu\right]P(z) = \lambda p_0 z^2 + 2\mu p_0 z - \lambda p_0 z - 2\mu p_0$$
$$= p_0(\lambda z^2 + 2\mu z - \lambda z - 2\mu)$$

$$\iff$$

$$(z-1)\left(-\frac{\lambda}{3}z^2 - \lambda z + 2\mu\right)P(z) = (z-1)(\lambda z + 2\mu)p_0$$

$$\iff$$

$$P(z) = \frac{\lambda z + 2\mu}{-\frac{\lambda}{3}z^2 - \lambda z + 2\mu}\, p_0 \qquad (*)$$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης $P(1)=1$ έχουμε

$$1 = \frac{\lambda+2\mu}{-\frac{\lambda}{3} - \lambda + 2\mu}\, p_0 \iff p_0 = \frac{2\mu - \frac{4}{3}\lambda}{2\mu+\lambda}. \qquad (**)$$

Η συνθήκη ευσταθείας βγαίνει πάλι απαιτώντας $p_0 > 0$ οπότε $2\mu - \frac{4}{3}\lambda > 0 \iff \frac{\lambda}{\mu} < 3/2$.

Από τις $(*)$ και $(**)$ έχουμε (διαιρώντας με μ αριθμ-παρον)

$$P(z) = \frac{\rho z + 2}{-\frac{\rho}{3}z^2 - \rho z + 2} \cdot \frac{2 - \frac{4}{3}\rho}{2+\rho}.$$

Για $\lambda = 3$, $\mu = 5$ έχουμε από τις $(*)$ και $(**)$:

$$P(z) = \frac{3z+10}{-z^2 - 3z + 10} \cdot \frac{10-4}{10+3} = \frac{6}{13} \cdot \frac{3z+10}{-(z-2)(z+5)}$$

$$= \frac{6}{13} \cdot \frac{3z+10}{(2-z)(5+z)} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{5+z}$$

Κάνοντας ομώνυμα και εξισώνοντας συντελεστές:

$A = \frac{96}{91}$, $B = -\frac{30}{91}$, οπότε

$$P(z) = \frac{96}{91} \cdot \frac{1}{2-z} - \frac{30}{91} \cdot \frac{1}{5+z} = \frac{96}{182} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{30}{455} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{5}}$$

$$= \frac{96}{182}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{30}{455}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{5}\right)^n.$$

Άρα $\quad p_n = \frac{96}{182}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{30}{455}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^n, \quad n=0,1,2,\dots$

Θέμα 3ο:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1 &= \lambda \\ \Lambda_2 &= \Lambda_1+\lambda \\ \Lambda_3 &= \Lambda_2+\lambda \\ &\vdots \\ \Lambda_N &= \Lambda_{N-1}+\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Lambda_i = i\lambda, \quad i=1,2,\dots,N$$

Συνθήκη ευστάθειας σταθμού i: $\rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} < 1 \Leftrightarrow \frac{i\lambda}{i\lambda+\alpha} < 1$

που ισχύει αρκεί $\alpha > 0$.

Ο μέσος αριθμός πελατών στο δίκτυο είναι

$$\sum_{i=1}^{N} E[Q_i] = \sum_{i=1}^{N}\frac{\rho_i}{1-\rho_i} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\frac{i\lambda}{i\lambda+\alpha}}{1-\frac{i\lambda}{i\lambda+\alpha}} = \sum_{i=1}^{N} i\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda N(N+1)}{2\alpha}$$

Ο συνολικός ρυθμός εξωτερικών αφίξεων στο δίκτυο είναι $N\lambda$. Από Θ. Little

$$E[S_{\delta\acute{\iota}\kappa\tau\upsilon o}] = \frac{\frac{\lambda N(N+1)}{2\alpha}}{N\lambda} = \frac{N+1}{2\alpha}.$$

Ένας πελάτης που εισέρχεται στο δίκτυο μέσω του σταθμ. N βλέπει λόγω της PASTA κατά μέσο όρο $E[Q_N] = \frac{N\lambda}{\alpha}$ άτομα στο σύστημα και ο μέσος χρόνος παραμονής του είναι

$$E[S_{\delta\acute{\iota}\kappa\tau\upsilon o} \mid \text{Εισήλθε διά του σταθμού } N] = \underbrace{\left(1+\frac{N\lambda}{\alpha}\right)}_{\text{αριθμός εξυπηρετήσεων για να φύγει}}\cdot\frac{1}{\mu_N}$$

$$= \frac{\alpha+N\lambda}{\alpha}\cdot\frac{1}{N\lambda+\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

Για να βρούμε το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη του δικτύου στο σταθμό N, θεωρούμε ως σύστημα το σταθμό N και εφαρμόζουμε το Θ. Little

$$E[S_{σταθμος\ N}] = \frac{E[Q_N]}{\Lambda_N} = \frac{\frac{N\lambda}{\alpha}}{N\lambda} = \frac{1}{\alpha}.$$