ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2009

Θέμα 1. (4 βαθμοί) Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/2$ ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, 2 υπηρέτες και απεριόριστη χωρητικότητα με αποθαρρυνόμενους πελάτες. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι ένας πελάτης που βρίσκει n άτομα στο σύστημα, αποχωρεί άμεσα χωρίς να εξυπηρετηθεί με πιθανότητα $\frac{n}{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Οι ρυθμοί $\lambda, \mu > 0$ θεωρούνται γνωστές παράμετροι του συστήματος. Θέτουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

(α) (2 βαθμοί) Αιτιολογήστε σύντομα γιατί η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών είναι διαδικασία γέννησης-θανάτου και σχεδιάστε το αντίστοιχο διάγραμμα ρυθμών μετάβασης. Πότε το σύστημα είναι ευσταθές (στάσιμο); Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών $\{Q(t)\}$, όταν είναι ευσταθές.

(β) (1 βαθμός) Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των πελατών που εξυπηρετούνται και οι οριακές κατανομές $(r_n^{\text{ολικό}})$ και $(r_n^{\text{πραγμ}})$ των εμφυτευμένων διαδικασιών του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων, όλων των πελατών και των πελατών που τελικά εισέρχονται προς εξυπηρέτηση αντίστοιχα.

(γ) (1 βαθμός) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη που εισέρχεται σε αυτό. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη, δεδομένου ότι βρίσκει κατά την άφιξή του n πελάτες.

Θέμα 2. (5 βαθμοί) Θεωρούμε τη $M/M/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, 1 υπηρέτη και απεριόριστη χωρητικότητα, που υπόκειται σε καταστροφές. Συγκεκριμένα, οι καταστροφές συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό ξ (δηλαδή οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών καταστροφών είναι ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με ρυθμό ξ) και όταν συμβεί μια καταστροφή, όλοι οι παρόντες πελάτες απομακρύνονται άμεσα από το σύστημα.

(α) (1 βαθμός) Αιτιολογήστε σύντομα γιατί η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ που καταγράφει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και κάντε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασής της.

(β) (2 βαθμοί) Να βρείτε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$. Να βρείτε έναν τύπο (ακριβή αναλυτική έκφραση) για τον υπολογισμό των στάσιμων πιθανοτήτων p_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(γ) (2 βαθμοί) Θεωρήστε έναν πελάτη που κατά την άφιξή του βρίσκει n πελάτες στο σύστημα. Να βρεθεί η κατανομή του χρόνου παραμονής του στο σύστημα. Να βρεθεί η πιθανότητα να απομακρυνθεί από το σύστημα λόγω καταστροφής πριν προλάβει να εξυπηρετηθεί.

Θέμα 3. (2 βαθμοί) Θεωρούμε 3 ουρές O_1,O_2 και O_3 με 1 υπηρέτη και άπειρη χωρητικότητα η κάθε μία, συνδεδεμένες σε δίκτυο. Η ουρά O_1 έχει Poisson διαδικασία εξωτερικών αφίξεων με ρυθμό λ ενώ οι ουρές O_2 και O_3 δεν έχουν εξωτερικές αφίξεις. Κάθε αναχώρηση της O_1 κατευθύνεται στην O_2 και κάθε αναχώρηση της O_2 κατευθύνεται στην O_3. Κάθε αναχώρηση της O_3 κατευθύνεται στην O_1 με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ ή αναχωρεί από το δίκτυο με πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης στην ουρά O_i είναι εκθετικοί με ρυθμό $\frac{\mu}{i}$, $i = 1, 2, 3$. Θέτουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

(α) (1 βαθμός) Να βρεθεί η συνθήκη ευστάθειας του δικτύου και ο μέσος αριθμός πελατών στην O_1.

(β) (1 βαθμός) Να βρεθεί ο μέσος συνολικός χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο δίκτυο. Να βρεθεί ο μέσος συνολικός χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη στο δίκτυο.

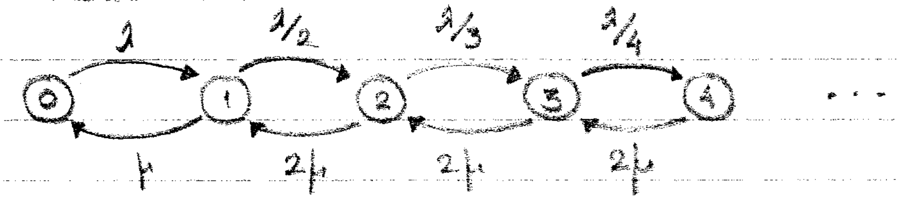
Υπενθύμιση: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής Γάμμα (Erlang) με παραμέτρους n και λ είναι $f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}$, $x > 0$ και η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής είναι $F(x) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^j}{j!}$, $x > 0$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 $\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Λύσεις θεμάτων στις Ουρές Αναμονής, Σεπτέμβριος 2009

Θέμα 1ο:

Το σύστημα είναι απλή Μαρκοβιανή ουρά με διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



δηλ. ρυθμούς γέννησης και θανάτου (αφίξεων και αναχωρήσεων) $\lambda_n = \frac{\lambda}{n+1}$, $n=0,1,2,\dots$ και $\mu_n = \begin{cases} \mu, & n=1 \\ 2\mu, & n=2,3,\dots \end{cases}$ αντίστοιχα.

Θέτοντας $\rho = \lambda/\mu$ έχουμε

$$p_n = \begin{cases} p_0, & n=0 \\ \rho p_0, & n=1 \\ \frac{\rho^n}{2^{n-1} n!} p_0, & n=2,3,\dots \end{cases} = \begin{cases} p_0, & n=0 \\ \frac{\rho^n}{2^{n-1} n!} p_0, & n=1,2,\dots \end{cases}$$

Άρα

$$B^{-1} = 1+\rho+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho^n}{2^{n-1} n!} = 1+\rho+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\rho/2)^n}{n!} = 1+\rho+2\left(e^{\frac{\rho}{2}}-\frac{\rho}{2}-1\right)$$

$$= 2e^{\frac{\rho}{2}}-1<\infty.$$

Επομένως το σύστημα είναι πάντα ευσταθές. Η στάσιμη κατανομή είναι τελικά

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{2e^{\rho/2}-1}, & n=0 \\ \frac{\rho}{2e^{\rho/2}-1}, & n=1 \\ \frac{\rho^n}{(2e^{\rho/2}-1)2^{n-1} n!}, & n=2,3,\dots \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2e^{\rho/2}-1}, & n=0 \\ \frac{\rho^n}{(2e^{\rho/2}-1)2^{n-1} n!}, & n=1,2,\dots \end{cases}$$

Ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων είναι

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \lambda\left(1+\frac{\rho}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\rho^n}{2^{n-1}(n+1)!}\right)\cdot\frac{1}{2e^{\rho/2}-1}$$

$$= \lambda\left(1+\frac{\rho}{2}+\frac{4}{\rho}\left(e^{\frac{\rho}{2}}-1-\frac{\rho}{2}-\frac{\rho^2}{8}\right)\right)\frac{1}{2e^{\rho/2}-1}$$

$$= \frac{\lambda\left(\frac{4}{\rho}e^{\frac{\rho}{2}}-\frac{4}{\rho}-1\right)}{2e^{\rho/2}-1}.$$

Επομένως το μακροπρόθεσμο ποσοστό των πελατών που εξυπηρετούνται είναι

$$\frac{\lambda^*}{\lambda} = \frac{\frac{4}{\rho}e^{\frac{\rho}{2}}-\frac{4}{\rho}-1}{2e^{\frac{\rho}{2}}-1}.$$

Ισχύει $r_n^{ολικό} = p_n$ λόγω της PASTA (ή $r_n^{ολικό} = \frac{\lambda_n^{ολ} p_n}{\lambda} = \frac{\lambda p_n}{\lambda} = p_n$)
ενώ $r_n^{πραγμ} = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*}$ οπότε

$$r_n^{πραγμ} = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda\left(\frac{4}{\rho}e^{\rho/2} - \frac{4}{\rho} - 1\right)}, & n = 0 \\[2ex] \dfrac{\rho^n}{\lambda\left(\frac{4}{\rho}e^{\rho/2} - \frac{4}{\rho} - 1\right)2^{n-1}(n+1)!}, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\rho^n}{(2e^{\rho/2}-1)2^{n-1}n!} = \frac{\rho}{2e^{\rho/2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}$$

$$= \frac{\rho}{2e^{\rho/2}-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\rho/2)^j}{j!} = \frac{\rho e^{\frac{\rho}{2}}}{2e^{\frac{\rho}{2}}-1}.$$

Ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη που εισέρχεται σε αυτό βρίσκεται από το Θ. Little $E[Q] = \lambda^* E[S]$ οπότε

$$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda^*} = \frac{\rho e^{\frac{\rho}{2}}}{\lambda\left(\frac{4}{\rho}e^{\frac{\rho}{2}} - \frac{4}{\rho} - 1\right)} = \frac{e^{\frac{\rho}{2}}}{\mu\left(\frac{4}{\rho}e^{\frac{\rho}{2}} - \frac{4}{\rho} - 1\right)}.$$

Έστω τώρα ένας πελάτης που βρίσκει n άτομα στο σύστημα κατά την άφιξή του. Με πιθανότητα $\frac{n}{n+1}$ αποχωρεί αμέσως οπότε έχει χρόνο παραμονής 0. Με πιθανότητα $\frac{1}{n+1}$ θα μπει στο σύστημα. Αν βρει $n=0$ ή 1 πελάτη θα μπει αμέσως προς εξυπηρέτηση οπότε ο μέσος χρόνος παραμονής του θα είναι $\frac{1}{\mu}$. Αν βρει $n = 2, 3, \dots$ πελάτες τότε θα περιμένει $n-1$ $Exp(2\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης μέχρι να αρχίσει η εξυπηρέτησή του και μετά θα μείνει ακόμα για το δικό του χρόνο εξυπηρέτησης. Άρα

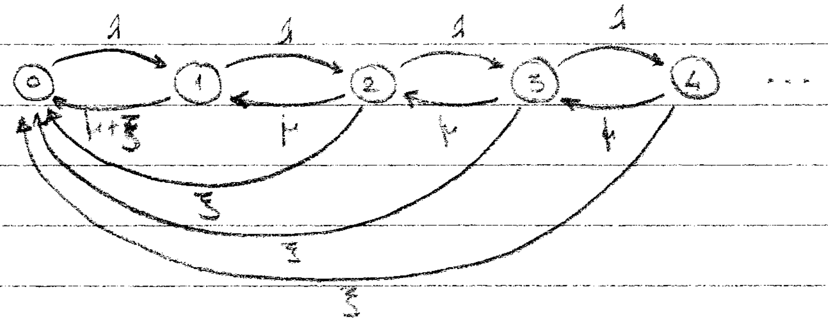
$$E[S_0] = \frac{0}{0+1}\cdot 0 + \frac{1}{0+1}\cdot\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}$$

$$E[S_1] = \frac{1}{1+1}\cdot 0 + \frac{1}{1+1}\cdot\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2\mu}$$

$$E[S_n] = \frac{n}{n+1}\cdot 0 + \frac{1}{n+1}\left(\frac{n-1}{2\mu} + \frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{2\mu}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Θέμα 2ο:

Ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι Μ.α.σ.χ. με διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



Έστω (p_n) η στάσιμη κατανομή αυτής της Μ.α.σ.χ. Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$\lambda p_0 = \mu p_1 + \xi \sum_{i=1}^{\infty} p_i$

$(\lambda+\mu+\xi) p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1}, \quad n=1,2,\dots$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πιθανογεννητριών, λαμβάνοντας υπόψη και την εξίσωση κανονικοποίησης $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ έχουμε

$$\lambda p_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda+\mu+\xi)p_n z^n = \xi(1-p_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda p_{n-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\mu p_{n+1} z^n$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+\mu+\xi)P(z) - \mu p_0 - \cancel{\xi p_0} = \xi - \cancel{\xi p_0} + \lambda z P(z) + \frac{\mu}{z}(P(z)-p_0)$$

$$\Leftrightarrow \left[(\lambda+\mu+\xi) - \lambda z - \frac{\mu}{z}\right]P(z) = \xi + \mu p_0\left(1-\frac{1}{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[(\lambda+\mu+\xi)z - \lambda z^2 - \mu\right]P(z) = \xi z + \mu p_0(z-1)$$

Έχουμε ότι η εξίσωση $D(z) = (\lambda+\mu+\xi)z - \lambda z^2 - \mu = 0$ έχει λύση $\alpha \in (0,1)$ διότι $D(0) = -\mu < 0$, $D(1) = \xi > 0$ και $D(z)$ συνεχής στο $[0,1]$ (Θ. Bolzano). Η άλλη ρίζα της $P(z)$ είναι $\frac{\mu}{\lambda\alpha}$. Θέτοντας $z=\alpha$ (η $P(z)$ συγκλίνει ως πιθανογεννήτρια στον $\{z : |z| \le 1\}$ οπότε ειδικότερα συγκλίνει για το $\alpha \in (0,1)$) έχουμε ότι αναγκαστικά είναι ρίζα και του $\xi z + \mu p_0(z-1)$. Επομένως

$D(z) = -\lambda(z-\alpha)\left(z - \frac{\mu}{\lambda\alpha}\right)$

$\xi z + \mu p_0(z-1) = \text{σταθ} \times (z-\alpha)$

οπότε

$$P(z) = \frac{\sigma\tau\alpha\theta}{z - \frac{\mu}{\lambda\alpha}} = \frac{\sigma\tau\alpha\theta}{1 - \frac{\lambda\alpha}{\mu} z}$$

Θέτοντας $z=1$ παίρνουμε την άγνωστη σταθερά και τελικά

$$P(z) = \frac{1 - \frac{\lambda\alpha}{\mu}}{1 - \frac{\lambda\alpha}{\mu} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda\alpha}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda\alpha}{\mu}\right)^n z^n$$

Επομένως

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda\alpha}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda\alpha}{\mu}\right)^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Το μέσο μήκος ουράς είναι

$$E[Q] = \frac{\frac{\lambda\alpha}{\mu}}{1 - \frac{\lambda\alpha}{\mu}}$$

και ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα βρίσκεται από το θεώρημα Little ως

$$E[S] = \frac{1}{\lambda} E[Q] = \frac{\frac{\alpha}{\mu}}{1 - \frac{\lambda\alpha}{\mu}}.$$

Έστω ένας πελάτης που αφικνούμενος στο σύστημα βρίσκει n πελάτες και S_n ο χρόνος παραμονής του σε αυτό. Τότε $S_n = \min(X, Y_n)$, όπου $X \sim Exp(\xi)$, $Y_n \sim Gamma(n+1, \mu)$ και X, Y_n ανεξάρτητες. Η κατανομή του S_n είναι

$$F_{S_n}(t) = Pr[\min(X, Y_n) \le t] = 1 - Pr[\min(X, Y_n) > t]$$

$$= 1 - Pr[X > t] Pr[Y_n > t] = 1 - e^{-\xi t} \sum_{i=0}^{n} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^i}{i!}.$$

Η πιθανότητα αυτός ο πελάτης να καταστραφεί πριν εξυπηρετηθεί είναι

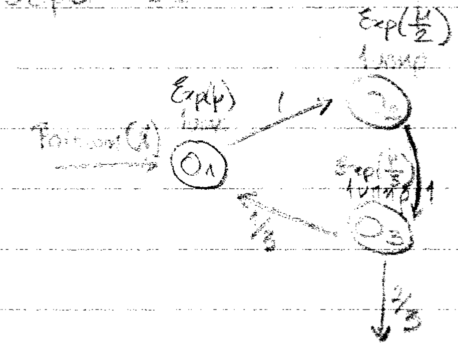
$$Pr[X < Y_n] = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\xi t}) \frac{\mu^{n+1}}{n!} t^n e^{-\mu t} dt$$

$$= 1 - \frac{\mu^{n+1}}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-(\mu+\xi)t} dt$$

$$= 1 - \frac{\mu^{n+1}}{n!} \cdot \frac{n!}{(\mu+\xi)^{n+1}}$$

$$= 1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}.$$

Θέμα 3ο:



Εξισώσεις κίνησης:

$\Lambda_1 = \lambda + \frac{1}{3}\Lambda_3$

$\Lambda_2 = \Lambda_1$

$\Lambda_3 = \Lambda_2$

Άρα $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \frac{3}{2}\lambda$.

Όλες οι ουρές είναι τύπου M/M/1 και άρα η συνθήκη ευσταθείας του δικτύου είναι $\rho_1 = \frac{\Lambda_1}{\mu_1} < 1$ & $\rho_2 = \frac{\Lambda_2}{\mu_2} < 1$ & $\rho_3 = \frac{\Lambda_3}{\mu_3} < 1$ δηλ. $\rho_1 = \frac{3}{2}\rho < 1$, $\rho_2 = 3\rho < 1$, $\rho_3 = \frac{9}{2}\rho < 1$ οπότε αρκεί και πρέπει $\max\left(\frac{3}{2}\rho, 3\rho, \frac{9}{2}\rho\right) < 1 \Leftrightarrow \frac{9}{2}\rho < 1 \Leftrightarrow \rho < \frac{2}{9}$.

Ο μέσος αριθμός πελατών στην O_1 είναι

$$E[Q_1] = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{\frac{3}{2}\rho}{1-\frac{3}{2}\rho} = \frac{3\rho}{2-3\rho}.$$

Ο μέσος χρόνος παραμονής στο δίκτυο βρίσκεται εφαρμόζοντας το Θ. Little σε όλο το δίκτυο. Άρα

$$E[S] = \frac{E[Q_1] + E[Q_2] + E[Q_3]}{\lambda}$$

$$= \frac{\frac{\rho_1}{1-\rho_1} + \frac{\rho_2}{1-\rho_2} + \frac{\rho_3}{1-\rho_3}}{\lambda}$$

Κάθε φορά που ένας πελάτης κάνει έναν κύκλο στο δίκτυο $O_1 \to O_2 \to O_3 \to O_1$ ο συνολικός χρόνος εξυπηρέτησης του είναι $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = \frac{1}{\mu} + \frac{2}{\mu} + \frac{3}{\mu} = \frac{6}{\mu}$. Κατά μέσο όρο, το πλήθος των κύκλων που κάνει είναι $\frac{3}{2}$ (Με πιθ. $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ κάνει n κύκλους και η μέση τιμή αυτής της γεωμετρικής είναι $3/2$ ή εναλλακτικά το μέσο πλήθος των κύκλων είναι $\Lambda_1/\lambda = 3/2$). Επομένως ο συνολ. χρόνος εξυπ. είναι $\frac{3}{2} \times \frac{6}{\mu} = \frac{9}{\mu}$.