ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2008

Θέμα 1. (4 βαθμοί) Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ και ρυθμό εξυπηρέτησης $\mu_n = \mu$, όταν στο σύστημα υπάρχουν n πελάτες με $n = 1, 2, \ldots, K$, και ρυθμό εξυπηρέτησης $\mu_n = 2\mu$, όταν στο σύστημα υπάρχουν n πελάτες με $n = K+1, K+2, \ldots$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ένας πελάτης που βρίσκει n άτομα στο σύστημα κατά την άφιξή του αναχωρεί άμεσα από το σύστημα (χωρίς να εξυπηρετηθεί) με πιθανότητα $\frac{2}{3}$, αν $n = 0, 1, \ldots, K-1$ και με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ αν $n = K, K+1, \ldots$. Υποθέτουμε ότι $\lambda, \mu > 0$, K θετικός ακέραιος και θέτουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

(α) (1 βαθμός) Πότε το σύστημα είναι ευσταθές (στάσιμο); Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών $\{Q(t)\}$, όταν είναι ευσταθές.

(β) (1.5 βαθμοί) Να βρεθεί ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων στο σύστημα λ^*, καθώς και οι οριακές κατανομές $(r_n^{\pi\rho\alpha\gamma\mu})$ και $(d_n^{\pi\rho\alpha\gamma\mu})$ των εμφυτευμένων διαδικασιών του αριθμού των πελατών σε στιγμές πραγματικών αφίξεων και πραγματικών αναχωρήσεων αντίστοιχα (δηλαδή, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους πελάτες που εισέρχονται στο σύστημα και εξυπηρετούνται).

(γ) (1.5 βαθμοί) Να βρεθεί το μέσο πλήθος πελατών του συστήματος και το μακροπρόθεσμο ποσοστό των χαμένων πελατών του συστήματος. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής και ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα και δεν αναχωρεί άμεσα.

Θέμα 2. (4 βαθμοί) Θεωρούμε τη $M/M/1$ ουρά με ομαδικές αφίξεις και μεμονωμένες εξυπηρετήσεις ($M^c/M/1$ ουρά) με ρυθμό αφίξεων ομάδων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Κάθε αφικνούμενη ομάδα έχει 2 πελάτες. Το σύστημα υπόκειται σε καταστροφές που συμβαίνουν σύμφωνα με μια Poisson διαδικασία με ρυθμό ν (δηλαδή οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών καταστροφών είναι ανεξάρτητοι με εκθετική κατανομή με ρυθμό ν). Όταν συμβεί μια καταστροφή όλοι οι παρόντες πελάτες απομακρύνονται άμεσα απ' το σύστημα.

(α) (1 βαθμός) Να δικαιολογήσετε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και να κάνετε το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασής της.

(β) (2 βαθμοί) Να προσδιοριστεί η πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$. (Υπόδειξη: Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda z^3 - (\lambda + \mu + \nu)z + \mu = 0$ έχει τρεις πραγματικές λύσεις z_1, z_2, z_3 με $z_1 < -1 < z_2 < 1 < z_3$).

(γ) (1 βαθμός) Βρείτε έναν τύπο για τον υπολογισμό των στάσιμων πιθανοτήτων p_n.

Θέμα 3. (3 βαθμοί) Θεωρούμε ένα δίκτυο Jackson με 2 σταθμούς εξυπηρέτησης. Στο σταθμό 1 υπάρχει μια εξωτερική διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ ενώ στο σταθμό 2 δεν υπάρχουν εξωτερικές αφίξεις. Ο σταθμός 1 έχει 1 υπηρέτη, ενώ ο σταθμός 2 έχει άπειρους υπηρέτες. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης στο σταθμό 1 είναι εκθετικοί με παράμετρο μ ενώ στο σταθμό 2 είναι εκθετικοί με παράμετρο $\mu/2$. Κάθε αναχώρηση από το σταθμό 1 πηγαίνει με πιθανότητα 1 στο σταθμό 2. Κάθε αναχώρηση από το σταθμό 2 πηγαίνει στο σταθμό 1 με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, επιστρέφει στο σταθμό 2 με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ενώ αναχωρεί από το δίκτυο με πιθανότητα $\frac{1}{2}$.

(α) (0.5 βαθμοί) Να βρείτε τη συνθήκη ευστάθειας του δικτύου.

(β) (1 βαθμός) Να βρείτε το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο δίκτυο.

(γ) (0.5 βαθμοί) Να βρείτε το μέσο αριθμό φορών που ένας πελάτης περνάει από το σταθμό 1.

(δ) (1 βαθμός) Να βρείτε το μέσο χρόνο από τη στιγμή που εισέρχεται ένας πελάτης που βρίσκει το δίκτυο κενό (δηλαδή και τους δυο σταθμούς κενούς) μέχρι την επόμενη στιγμή που το δίκτυο θα ξαναμείνει κενό.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 $\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!